数理解析研究所講究録
78巻 1969年 76-87

High derivations とその応用

大阪大理 中井喜和

§1. 序

高階の derivation の概念は H. Osborn ([1]) によって始めて導入された概念である。従来 C^r 多様体の上の C^r 函数の高階微分 (higher order differential) は座標系を使って定義されていたのであるが、彼はそれに対して函手的考察を試みた。即ち C^r 多様体の上の C^r 函数のつくる代数系 A は一つの圏をつくるが、そのような代数系 A に対し、その高階微分加群を構成し、それが古典的な C^r 函数の高階微分のつくる加群と同型であることを示したのである。然し本講演では、Osborn の理論を紹介することが目的ではない。Osborn の論文においては、その目的からして高階の derivation あるいは differential (derivation と differential を何れも微分として訳している日本語訳の不備を残念に思う) の代数的一般論は十分には展開されていない。然し著者はそれらの概念が、将来いろいろな

方面で相当役に立つものになるのではなかろうかと予想している。現在のところ幾何学的な応用については、見通しはたてられないのであるが、将来そのような試みをやってみたいと考えている。この講演では高階 derivation と differential に対する基本的理論の紹介と、その一つの応用として、純非分離拡大体のガロア理論の構成について述べる。こゝで high derivation なる言葉について、一言お断りしておきたい。すでによく知られている様に F.K. Schmidt によって higher derivations という概念が導入されている。これら二つの概念の間には密接な関係があるのであるが、あくまで異るものである。それを明らかにするために high derivation という言葉を使うことにしたのである。

§2. 定義

2.1. k, A を 1 を持つ可換環とし、A を k-代数とする。即ち k より A への 1 を 1 に写す準同型 f が存在するものとする。F を A-加群とするとき $A/k \longrightarrow F$ の階数 q の derivation D とは次の二つの条件をみたすものである。

(1) $D \in \mathrm{Hom}_k(A, F)$

(2) $x_0, x_1, \cdots, x_q$ を A の任意の $q+1$ 個の元とするとき、D は次の条件をみたす。

$$D(x_0x_1\cdots x_q)=\sum_{s=1}^{q-1}(-1)^{s-1}\sum_{i_1<\cdots<i_s}x_{i_1}\cdots x_{i_s}D(x_0\cdots\hat{x}_{i_1}\cdots\hat{x}_{i_s}\cdots x_q)$$

とくに $q=1,2$ のときは，上の式は夫々次のようになる．

$q=1$. $\quad D(x_0x_1)=x_0D(x_1)+x_1D(x_0)$

$q=2$, $\quad D(x_0x_1x_2)=x_0D(x_1x_2)+x_1D(x_0x_2)+x_2D(x_0x_1)$

$$-x_0x_1D(x_2)-x_0x_2D(x_1)-x_1x_2D(x_0)$$

即ち階数 1 の derivation は通常の derivation である．また定義式より直ちに $D(1)=0$ を得る．

2.2. いまつぎのような完全列を考える．

$$0\longrightarrow I\longrightarrow A\otimes_k A\xrightarrow{\varphi}A\longrightarrow 0$$

こゝに φ は $\varphi(\sum a\otimes b)=\sum ab$ で定義される準同型である．I は $A\otimes A$ のイデアルで $1\otimes a-a\otimes 1$ の形の元で生成される．$A\otimes A$ を A-加群とみるみ方はいくつもあるが，以下とくに断らないかぎり $a(b\otimes c)=ab\otimes c$ で A-加群の構造をいれることにする．さて D を $\mathrm{Hom}_k(A,F)$ の元とし $A\otimes A\longrightarrow F$ の写像 D^* を $D^*(a\otimes b)=aD(b)$ で定義すると，D^* は A-加群の準同型である．そのとき次の命題が成立する．

Proposition 1. D が $A/k\longrightarrow F$ の階数 q の derivation であるための必要且十分な条件は次の二つの条件の成立することである．

(3) $D(1)=0$

(4) $D^*(I^{q+1})=0$

$A\otimes A$ は A 加群として

$$A\otimes A = A\otimes 1 \oplus I$$

と直和分解されるが，(3)の条件はまた次の条件(3′)と同値になる.

(3′) $D^*(A\otimes 1)=0$

従って D^* は I/I^{q+1} より F への A-準同型を定義する. 一方 A から I/I^{q+1} への写像 $\delta^{(q)}$ を

$$\delta^{(q)}(x)=\{1\otimes x - x\otimes 1 \text{ の類}\}$$

と定義すると $\delta^{(q)}$ は階数 q の derivation になり，上の考察より次の図式が可換になることがわかる. このことは I/I^{q+1} が階数 q の A/k の derivation について Universal mapping property を持つことを意味する. 之を

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "\delta^{(q)}"'] & & F \\ & I/I^{q+1} \arrow[ur, "D^*"'] & \end{tikzcd}$$

$\Omega_k^{(q)}(A)$ とかき 階数 q の (Kähler) differential module とよぶ. 之は A-同型を除き只一つ定まる

2.3. k, A, F は上の通りとし，a を A の元とする. a_L によって

$$a_L(x) = ax \quad (x\in A \text{ あるいは } \in F)$$

なる $A\longrightarrow A$ (あるいは $F\longrightarrow F$) の A-準同型をあらわす. また F の元 m に対して m_R は

$$m_R(a) = am \qquad (a \in A)$$

なる $A \to F$ の準同型をあらわすことにする。そのとき

$$[D, a] = Da_L - a_L D - D(a)_R$$

とおく。之は明らかに $\mathrm{Hom}_k(A, F)$ の元である。以下記号を簡単にするため a_L の L, $D(a)_R$ の R は省く。次の命題は high derivation の理論において基本的である。

Proposition 2 D を $\mathrm{Hom}_k(A, F)$ の元とするとき、D が階数 q の $A/k \to F$ の derivation であるための必要十分条件は A の任意の q 個の元 $x_1, \cdots, x_q$ に対して

$$[\cdots[[D, x_1], x_2], \cdots, x_q] = 0$$

が成立することである。

此の命題の応用として次のようなことが直ちにわかる

(5) 階数 q の derivation は階数 $q'(\geqq q)$ の derivation である。

(6) D が階数 q の derivation であれば、$[D, a]$ $(a \in A)$ は階数 $q-1$ の derivation であり、逆に $[D, a]$ が任意の $a \in A$ について つねに階数 $q-1$ の derivation ならば、D は階数 q の derivation である。

(7) $(D_0, D_1, \cdots, D_m, \cdots)$ を F. K. Schmidt の意味での higher derivation とすると D_m $(m>0)$ は階数 m の derivation である。

(8) D, Δ を夫々階数 q, r の derivation $A \to A$ とすると $D\Delta$

ΔD は何れも階数 $q+r$ の derivation であり，$D\Delta-\Delta D$ は階数が $q+r-1$ の derivation である．

§3. Calculus of high derivations

high derivations に関する公式は通常の derivation の場合と異なり，その形が複雑であり証明も煩わしい。本節ではその中の主なもの二三あげるにとどめる．

Proposition 3．k, A, F は前と同様とし，D を $A/k \to F$ の階数 q の derivation とすると次の関係式が成立つ

$$D(x^n)=\sum_{s=0}^{q-1}(-1)^s\binom{n}{q-s}\binom{n-q+s-1}{s}x^{n-q+s}D(x^{q-s})\quad(x\in A).$$

Corollary．A の標数を $p\,(>0)$ とすると，D は $A_i=kA^{p^i}$ の上に階数 $[\frac{q}{p^i}]$ の derivation をひきおこす．とくに $q=p^i$ のとき，$x\in A$，$y\in A_i$ に対して $D(xy)=xD(y)+yD(x)$ が成立つ

上の系は high derivation の概念が，J. Dieudonné によって導入された semi-derivation と深い関係にあることを示唆している．

Proposition 4．S を乗法的に閉じた A の部分集合，F を

A_S-加群とすると，$A/k \to F$ の階数 q の derivation D は $A_S/k \to F$ の階数 q の derivation $\bar{D}$ に只一通りに延長され，その延長は次の式で与えられる.

$$\bar{D}\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{(-1)^q}{s^{q+1}} \sum_{r=0}^{q} (-1)^r \binom{q+1}{r} s^r D(s^{q-r}x) \quad (x \in A,\ s \in S)$$

いま簡単のために

$$[\cdots[[D, x_1], x_2], \cdots, x_n] = [D, x_1 * \cdots * x_n]$$

とかくことにすると.

Proposition 5.

$$[D, x_1 \cdots x_n] = \sum_{s=0}^{(n-1)} \sum_{i_1 < \cdots < i_s} x_{i_1} \cdots x_{i_s} [D, x_1 * \cdots * \hat{x}_{i_1} * \cdots * \hat{x}_{i_s} * \cdots * x_n]$$

Corollary. (i) $[D, x^n] = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n}{s} a^s [D, x^{*\,n-s}]$

(ii) とくに A の標数が $p\,(>0)$ なら

$$[D, a^{p^f}] = [D, a^{*p^f}]$$

§4 Derivation Algebra.

前と同様に A を k-代数とする. $\mathcal{D}_0^{(q)}(A/k)$ でもって階数 q の $A/k \to A$ の derivations の集合を表わす. 之は自然に A-加群になる. また.

$$\mathcal{D}_0(A/k) = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathcal{D}_0^{(q)}(A/k)$$

$$\mathcal{D}(A/k) = A \oplus \mathcal{D}_0(A/k)$$

とおく．こゝに A は前と同様 $\mathrm{Hom}_k(A, A)$ の部分環と同一視している．$\mathcal{D}(A/k)$ は左 A-加群であるが一方

$$Da = D(a) + aD + [D, a]$$

によって右 A-加群ともみることができる．また(7)によって二つの high derivations の積はまた high derivation になるから $\mathcal{D}(A/k)$ は積に関して閉じている．これらの結果を総合すると $\mathcal{D}(A/k)$ は associative ring（$\mathrm{Hom}_k(A, A)$ の部分環）になる．明らかに k の元は $f: k \longrightarrow A$ によって $\mathcal{D}(A/k)$ の中心に写される．従って $\mathcal{D}(A/k)$ は(非可換)k-代数である．之を A/k の derivation algebra とよぶ．また $\mathcal{D}(A/k)$ の部分 k-代数で A を含むものを $\mathcal{D}(A/k)$ の derivation subalgebra とよぶ．一般な k-代数についてその derivation algebra の構造を決定することは一般に難しい．次の命題は尤も基本的なものであろう．

Proposition 6. k-代数 A が有限 k-加群なら左加群として $\mathcal{D}(A/k)$ もまた有限 A-加群である．

§5 延長

A を k-代数, B を可換な A-代数とする. F を B-加群とし D を階数 q の $A/k \longrightarrow F$ の derivation とする. そのとき D を $B/k \longrightarrow F$ の derivation に延長する問題は一般に難かしく, まだ一般論は存在しない. こゝでは次の命題をあげておく.

Proposition 7　K, L を標数 $p (>0)$ の二つの体, L は K の単拡大 $L = K(\alpha)$ であつて, exponent f の純非分離拡大体であるとする. D を階数 $\overbrace{q}^{(q=p^f)}$ の $K \longrightarrow M$ (M は L-加群) の derivation とする. そのときもし $[D, \alpha^q] = 0$ なら 任意に与えられた M の元 $m_1, \cdots, m_{q-1}$ に対して, 次の条件をみたす $L \longrightarrow M$ の high derivation Δ が只一つ存在する.

(1)　$\Delta | K = D$

(2)　$\Delta(\alpha^i) = m_i \quad (1 \leq i \leq q-1)$

(3)　$\Delta(c\alpha^i) = c\Delta(\alpha^i) + \alpha^i\Delta(c) \quad (c \in K, i \in \mathbb{Z})$.

更に e を, $m < p^e$ なる整数とすると Δ の階数は高々 p^e である.

体 L が K の純非分離単拡大体の K 上のテンソル積と同型であるとき, L は K の modular 拡大であるとよぶ. 上の命題より直ちに次の系を得る

Corollary.　L が K の有限次 modular 拡大体, α を K に

属さない L の元とすると，$\Delta(x)\neq 0$ なる $L/K\to L$ の high derivation Δ が常に存在する．

定理 8 体 L を体 K の有限次数の純非分離拡大体とし x を L の元で K に属さない元とすると，$\Delta(x)\neq 0$ なる $L/K\to L$ の high derivation がつねに存在する．

証明 L を K の有限次数の純非分離拡大体とすると，Sweedler([2])によって，L を含む K の modular 拡大 L' が存在する．すぐ上の系より L'/K の high derivation Δ' で $\Delta'(x)\neq 0$ なる Δ' は存在する．Δ' の L への制限は $D_0^{(q)}(L/K, L')$ の元であって $\Delta'(x)\neq 0$．いま L より $\Omega_K^{(q)}(L)$ への標準的 high derivation を $\delta^{(q)}$ とすると 22 より $\delta^{(q)}(x)\neq 0$ よって $D_0^{(q)}(L/K)$ の元 Δ で $\Delta(x)\neq 0$ なるものは存在する．

§6 一つの応用－純非分離拡大体のガロア理論

この § では L, K は共に標数 p の体とする．

定理 9 L を K の有限次純非分離拡大体とすると，その derivation algebra $D(L/K)$ は normal simple K－代数である．かつ次の関係式が成立つ

$$[D(L/K):L]=[L:K]$$

証明 $\mathcal{D}(L/K)$の中心をEとすると Jacobson-Bourbakiの定理より $[\mathcal{D}(L/K):L]=[L:E]$. よって$\mathcal{D}(L/K)$の中心が丁度Kであることを示せばよい. aをLの元とするとき, aが$\mathcal{D}(L/K)$の中心元であるための必要十分条件は, 任意の$L/K\to L$のhigh derivation Dに対して (i) $D(a)=0$, (ii) $[D,a]=0$ の二つが成立することである. 従ってKに属さない元は定理8より$\mathcal{D}(L/K)$の中心元であり得ない. 一方$\mathcal{D}(L/K)\subseteq Hom_K(L,L)$でいずれもK上同じ次元のベクトル空間である. 従って$\mathcal{D}(L/K)=Hom_K(L,L)$.

定理10. L, Kを前定理と同様とする. そのときLとKの中間体Eと$\mathcal{D}(L/K)$のderivation subalgebraの間に包含関係を逆にする1対1の対応が存在する. 中間体Eに対応するderivation subalgebraを$\mathfrak{a}$とすると $E=Z(\mathfrak{a})$ ($\mathfrak{a}$の中心), $\mathfrak{a}=\mathcal{D}(L/E)$ なる関係がある. このとき$[\mathfrak{a}:L]=[L:E]$が成り立つ.

定理11. L, Kを前定理と同様とし, $E_i\ (i=1,2)$をLとKの二つの中間体とすると

(1) $\mathcal{D}(L/E_1\cup E_2)=\mathcal{D}(L/E_1)\cap\mathcal{D}(L/E_2)$

(2) $\mathcal{D}(L/E_1\cap E_2)=\mathcal{D}(L/E_1)\cup\mathcal{D}(L/E_2)$.

逆に $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を二つの $\mathcal{D}(L/K)$ の derivation subalgebra とすると

$$(3) \qquad Z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b})$$

$$(4) \qquad Z(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a}) \cap Z(\mathfrak{b})$$

が成り立つ

純非分離拡大体 L/K の構造と、$\mathcal{D}(L/K)$ の K-代数としての構造の間にある関係については、ある程度のことは明らかにされているが、十分ではない。今後の一つの研究課題であろう。

参考文献

(1) H. Osborn : Modules of differentials I, Math. Ann. 170 (1967), 221-244.

(2) M. E. Sweedler : Structure of inseparable extensions. Ann. Math. 87 (1968), 401-410.