数理解析研究所講究録
78巻 1969年 37-52



# Ruled surface について

京大理　永田雅宜
京大理　丸山正樹

## §1　序

$k$ を任意標数の代数的閉体とし、$X$ を $k$ 上定義された非特異代数曲線とする。完備代数曲面 $S$ が $X$ 上の線織面であるとは、morphism: $\pi$ $S \longrightarrow X$ があって、$\pi^{-1}(x) = \mathbb{P}^1$, ${}^{\forall}x \in X$ が成立する場合をいう。Grothendieck の定理 (Th. 8.2 of [2]) により、$S$ は $X$ 上の étale topology で $\mathbb{P}^1$-bundle になるが、$X$ が閉体上の曲線であることに注意すれば、$S$ は Zariski topology で $\mathbb{P}^1$-bundle になる。$X$ の genus が 2 の時、$\mathbb{P}^1$-bundle $P, P'$ が代数曲面として biregular であることと、$X$ の自己同型 $\varphi$ があって、$P$ と $\varphi^*(P')$ が $\mathbb{P}^1$-bundle として同型である事は同じである。従って genus が 2 以上であれば、$\mathbb{P}^1$-bundle の分類と線織面の分類はほとんど同じである。genus が 1 の時はかなり大きな違いがある。ところで $X$ 上の $\mathbb{P}^1$-bundle の分類は $X$ 上の rank 2 の vector bundle を modulo tensor products で分類することと同じことである。これ

らのことを考慮しながら線織面について考えてみよう。

## §2 $\mathbb{P}_X$ の分類.

$P(E)$ を $X$ 上の rank 2 の vector bundle $E$ から作られる $\mathbb{P}^1$-bundle としよう。$\pi$ を $P(E)$ の $X$ への projection とする。

$$N(P(E)) = \inf_{\substack{s\,:\,\text{sections}\\ \text{of } P(E)}} (s, s)$$ とおくと、

$N(P(E))$ は有限の整数になる。$(s, s) = N(P(E))$ となる section $s$ を $P(E)$ の minimal section とよぶ。$s, s'$ を $P(E)$ の2本の異った sections とすると、$s - s'$ は fibres の和に linearly equivalent だから $(s-s')\cdot(s-s') = 0$. よって

$$\pi(s\cdot s) + \pi(s'\cdot s') = \pi(s\cdot s') \qquad (\text{等号は divisor class として})$$

$N(P(E)) < 0$ とする。上の式で $s$ として minimal section をとると $(s', s') = (s, s') - (s, s) > 0$ 従って他の任意の section は minimal でない。すなわち minimal section は1本だけである。

$N(P(E)) = 0$ とする。minimal section が2本 $s, s'$ あったとする。$(s, s') = (s, s) + (s', s') = 0$ すなわち $s$ と $s'$ は交わらない。$\mathbb{P}^1$-bundle が互に交わらない section を2本もてば $G_m$-bundle である(交わらない sections を $0$ と $\infty$ に採用すればよい)、逆に $G_m$ bundle は $0$-section と $\infty$-section の、互に交わら

ない2本のsectionsをもつ。又3本以上互に交わらないsectionsをもてば trivial bundleになる。ところで

補題 1　Eのsubbundlesの集合と，P(E)のsectionsの集合は自然に1:1対応がつく。

補題 2　上の対応でEのsubbundle $L_s$が，P(E)のsection $s$に対応したとすれば　$\pi(s \cdot s) \in |(\det E) \otimes L_s^{-1}|$

証明は直接計算すればでる。

上の2つの補題と，上に述べたことを使えば次の命題をうる。

命題 3　X上のrank 2のvector bundle Eについて，Eのsubbundleでdegreeが極大なもの（maximal subbundleという）を考える。この時，

(i)　$N(P(E)) < 0$ならばmaximal subbundleは唯一つ。

(ii)　$N(P(E)) = 0$でP(E)が$G_m$-bundleでなければmaximal subbundleは唯一つ

(iii)　$N(P(E)) = 0$でP(E)がtrivial bundleでない$G_m$-bundleならmaximal subbundleは2つ，それらを$L_1, L_2$とすれば

$$(\det E) \otimes L_1^{-2} \cong ((\det E) \otimes L_2^{-2})^{-1}$$

$$E \cong L_1 \oplus L_2$$

vector bundle Eがtrivial line bundleをsubbundleにもつ時Eを標準型という。MがEのmaximal subbundleであることと$L \otimes M$が$E \otimes L$のmaximal subbundleであることは同じである

る。このことに注意すれば，任意の $P(E)$ について標準型の vector bundle $E'$ があって $P(E)=P(E')$ となる。さらに命題3の(i)か(ii)が充される時には上の標準型 $E'$ は一意にきまる。(iii)の場合には標準型は $I\oplus(L_1\otimes L_2^{-1})$ と $I\oplus(L_2\otimes L_1^{-1})$ の2つである。

$C^0_X=\{(D,\xi)\mid \deg D\leqq 0,\ \xi\in \mathbb{P}(H^1(X,L(-D)))\cup\{0\}\}$ とおく。ここで $D$ は $X$ 上の divisor class $L(-D)$ は $-D$ できまる line bundle とする。$C^0_X$ に次のような同値関係 $\sim$ を入れる。

$(D,\xi)\sim(D',\xi') \iff$ (i) $D=D'$ $\xi=\xi'$ 又は (ii) $D=-D'$ $\xi=\xi'=0$

さて $C_X=C^0_X/\sim$ , $\mathcal{P}^-_X=\{P(E)\mid N(P(E))\leqq 0\}$ としよう。すると次の定理が成立する。

定理4　$C_X$ と $\mathcal{P}^-_X$ には1:1対応がつく。(対応のしかたは下の証明を見よ。)

証明　$\mathcal{P}^-_X\ni P(E)$ とする。$E$ を標準型としよう。$E$ は次の extension である。

$$0\longrightarrow I\longrightarrow E\longrightarrow \det E\longrightarrow 0.$$

ここで $\det E$ がきめる divisor class は $\Delta\cdot\Delta$ ($\Delta$ は $P(E)$ の minimal section) である。上が non trivial extension ならば，extension は $P(E)$ だけできまる（命題3と上にのべた注意による）それは $\xi\in\mathbb{P}(H^1(X\ L(\det E^{-1})))$ をきめる。trivial extension については $0$ を対応さす。これで $\mathcal{P}^+_X\longrightarrow C_X$ ができる。逆に $C_X$ の元 $(D,\xi)$ を与えれば次の extension をとる。

$$0 \to I \to E(D,\xi) \to L(D) \to 0$$

ところで，$0 \to L_1 \to E' \to L_2 \to 0$ (exact) について $\deg L_1 \geqq \deg L_2$ の時，$L_1$ は $E'$ の maximal subbundle になるから，$I$ は $E(D,\xi)$ の maximal subbundle になり，$E(D,\xi)$ は canonical type となり，$N(P(E(D,\xi))) = \deg L(D) = \deg D \leqq 0$ より $P(E(D,\xi)) \in \mathcal{P}_X^-$.

よって $C_X \to \mathcal{P}_X^-$ を得る．これら２つの map が互に可逆は明らか。 (証終)

<u>系５</u>　$X$ 上の $G_m$-bundles の全体は $J_n$ ($n<0$ integer) と $\tilde{J}_0$ の和集合と１：１対応がつく。ここで $X$ の genus は１以上とする。$X$ が rational の時は詳しい結果は後で述べる。$J_n$ は $X$ の Jacobian。

証明　$P(E)$ が $G_m$-bundle の時，$E \cong L_1 \oplus L_2$ となる。これに注意すれば $P(E) \in \mathcal{P}_X^-$ がわかる。又 $L_1, L_2$ のうち degree の高い方が maximal subbundle になるから，$P(E)$ が $G_m$-bundle になることと $C_X$ で対応する点が $(D,0)$ となることは同値．従って $J_n = \{D \mid \deg D = n < 0\}$ と $\tilde{J}_0 = \{(D,0) \mid \deg D = 0\}/\equiv$ ($\equiv$ は $J_0$ を Jacobian variety として $a \equiv -a$ の relation) と $G_m$-bundles の集合は１：１対応がつく。

§３　Elementary transformations.

この§では断わらない限り，$X$ を irrational としておく．定理11と定理14は rational の場合も成立する (cf [3])．

$S$ を $X$ 上の線織面とする．$P \in S$ として，$l_P$ と $P$ を通る有

理曲線(一本しかない)とする。$(l_p, l_p)=0$ だから、$\mathrm{dil}_p[l_p]$ ($\mathrm{dil}_p$ による $l_p$ の proper transform, $\mathrm{dil}_p$ は $P$ における quadratic dilatation.) は $(\mathrm{dil}_p[l_p], \mathrm{dil}_p[l_p])=-1$ となって、第一種の例外曲線になる。そこで $\mathrm{elm}_p=\mathrm{cont}_{\mathrm{dil}_p[l_p]}\cdot\mathrm{dil}_p$ ($\mathrm{cont}_l$ は第一種の例外曲線 $l$ の contraction) とおき $\mathrm{elm}_p$ を $P$ における elementary transformation と呼ぶ。$\mathrm{elm}_{P_1\cdots P_n}=\mathrm{elm}_{P_n}\cdot\mathrm{elm}_{P_1\cdots P_{n-1}}$ と定義する。もちろん $\mathrm{elm}_{P_1\cdots P_n}$ は $P_n$ が $\mathrm{elm}_{P_1\cdots P_{n-1}}S$ の ordinary point である時のみ定義できる。従って $P_1, P_2$ が同じ fibre の上にのっている時、$\mathrm{elm}_{P_1P_2}$ は定義できない。大切なことは、すべての線織面が直積 $\mathbb{P}^1\times X$ から適当な elementary transformations を施すことによって得られるということである。以下 $S_0$ を直積 $\mathbb{P}^1\times X$ とし、$\pi$ を $S_0$ から $X$ への Projection とする。

<u>補題 6</u>　$P_1,\cdots,P_s$ を $S_0$ の section $p\times X$ 上の点とし、$\dim|\sum_{i=1}^{s} P_i|=d$ とする。この時、

$$\dim|r(p\times X)+\sum_{i=1}^{s} l_{P_i}|=(r+1)d+r$$

ここで $r\geq 0$.

証明は $r$ についての帰納法を使えば容易である。

<u>補題 7</u>　$D$ を $S_0$ の正因子とすると、$D\sim r(p\times X)+\sum_{i=1}^{s} l_i$. ここで $l_i$ は fibre, $r=(l_i, D)$, $s=(p\times X, D)$ $p\in\mathbb{P}^1$.

証明は $D$ を curve (既約) として、$t$ が十分大の時、$\dim|r(p\times X)+\sum_{i=1}^{t} l_i|>(D, r(p\times X)+\sum_{i=1}^{t} l_i)$ となることを使えばよい。

補題 8　$Q_i, R_j, S_\ell, T_m$ を $X$ 上の点とする。これらが次の条件をみたすとしよう。

(i) $\sum_{i=1}^{q} Q_i + \sum_{j=1}^{r} R_j \sim \sum_{\ell=1}^{s} S_\ell + \sum_{m=1}^{q+r-s} T_m$

(ii) $s \geqq g$ , $r+s \geqq 2g$ 　($g = X$ の genus)

(iii) $R_1, \cdots, R_r$ を $X$ の $k$ 上独立な一般点とする。又 $Q_i, T_m$ を $k$-有理点とする。

この時 $\sum_{\ell=1}^{s} S_\ell$ は Riemann-Roch の定理の意味で non special である。

証明　$r > g$ の時, $k$ のかわりに $k(R_1, \cdots, R_{r-g})$ を, $q$ のかわりに $q+r-g$ をとってよいから, 我々は $r \leqq g$ としてよい。さらに $\sum_{\ell=1}^{s} S_\ell$ を $|\sum_{\ell=1}^{s} S_\ell|$ の generic member としてよい。$r \leqq g$ で $|\sum R_j|$ は non special だから $\dim|\sum R_j| = 0$。さらに $Q_i$ が $k$-有理点であることと $|\sum Q_i + \sum R_j| = |\sum S_\ell + \sum T_m|$ が $k(S_1, \cdots, S_s)$ 上定義されていることを用いれば, $R_1 \cdots R_r$ は $k(S_1, \cdots, S_s)$ 上代数的であることがわかる。故に $\text{trans.deg}_k\, k(S_1, \cdots, S_s) = \text{trans.deg}_k\, k(S_1 \cdots S_s, R_1, \cdots, R_r)$
$= \text{trans.deg}_k\, k(R_1, \cdots, R_r) + \text{trans.deg}_{k(R_1, \cdots R_r)}\, k(R_1 \cdots R_r\, S_1 \cdots S_s) \geqq r + \dim|\sum S_\ell|$
$\geqq r + s - g \geqq g$. 従って $S_1 \cdots S_s$ の中には少なくとも $g$ 個の $k$ 上独立な $X$ の一般点がある。よって $\sum S_\ell$ は non-special（証終）

次の補題は基本的である。補題を示すために少し用意をする。$\Delta_1, \Delta_2$ を $S_0$ の互に異る sections とする。$\Delta_1 \cap \Delta_2$ を infinitely near point も含めた $\Delta_1$ と $\Delta_2$ の共通点の集合とする。$m_i, n_j$ を自然数とし, $Q_i, R_j$ を $X$ の点で $Q_i \neq R_j\ \forall i,j$ とする。$D_1 = \Delta_1 + \sum m_i \pi^{-1}(Q_i)$

が $D_2 = \Delta_2 + \sum_j n_j \pi^{-1}(R_j)$ に linearly equivalent であるとしよう。
$Q_i^* = (\pi^{-1}(Q_i))\cdot\Delta_2$ , $R_j^* = (\pi^{-1}(R_j))\cdot\Delta_1$ とおく。$Q_i^*, R_j^*$ に対して次の様な点の集合を考える。(1) $Q_i^* \in \Delta_1\cap\Delta_2$ (又は $R_j^* \in \Delta_1\cap\Delta_2$) の時, $Q_i^{**}$ ($R_j^{**}$) を $\Delta_1\cap\Delta_2$ の中で $Q_i^*$ ($R_j^*$) の最も高い order の infinitely near point とする。そして $M_i$ ($N_j$) を $Q_i^{**}$ ($R_j^{**}$) の order が $1, 2, \dots, m_i$ ($1, 2, \dots, n_j$) になる infinitely near points の集合とする。(2) $Q_i^* \notin \Delta_1\cap\Delta_2$ (又は $R_j^* \notin \Delta_1\cap\Delta_2$) の時, $M_i$ ($N_j$) を $\Delta_2$ ($\Delta_1$) にのっている, order $0, 1, 2, \dots, m_i$ ($0, 1, \dots, n_j$) である $Q_i^*$ ($R_j^*$) の infinitely near point の集合とする。さて $(S_1\cap S_2)\cup(\cup M_i)\cup(\cup N_j)$ の点を elementary transformation が定義できる様にならべかえ, それを $P_1, \dots, P_u$ とする。この時次の補題が成立する。

補題 9. 上の $P_1 \cdots P_u$ について, $\mathrm{elm}_{P_1\cdots P_u} S_0$ は $\mathbb{P}^1$-bundle として $S_0$ と同型である。

証明. $|D_1| - \sum_{i=1}^{u} P_i$ を考えよう。この中には $D_1$ と $D_2$ が含まれているから, $\dim(|D_1| - \sum P_i) \geqq 1$ となる。ところで $|D_1| - \sum P_i$ の member の $\mathrm{elm}_{P_1\cdots P_u}$ による proper transform は互に交わらない。従って $\mathrm{elm}_{P_1\cdots P_u} S_0$ は互に交わらない section を無限個もつことになり, $S_0$ と同型になる。 (証終)

系 10 $\sum_{i=1}^{r} P_i$ と $\sum_{j=1}^{r} P_j'$ をそれぞれ $p\times X$, $p'\times X$ ($p, p' \in \mathbb{P}^1$, $p \neq p'$) の上の因子とする。$\sum\pi(P_i) \sim \sum\pi(P_j')$ , $\pi(P_i) \neq \pi(P_j')$ $\forall i, j$ としよう。この時 $\mathrm{elm}_{P_1\cdots P_r P_1'\cdots P_r'} S_0$ は $\mathbb{P}^1$-bundle とし

て $S_0$と同型になる。

証明. $D_1 = p\times X + \sum_{j=1}^{r} l_{P_j}$ , $D_2 = p'\times X + \sum_{i=1}^{r} l_{P_i}$ とおけば上の補題が適用できる。 (証終)

次の定理は線織面の構造を調べるのに重要である。

<u>定理 11</u>　$S$を線織面とする。次の条件をみたす点$P_1\cdots P_n$が$S_0$上にあって, $S$は$\mathbb{P}^1$-bundleとして $elm_{P_1\cdots P_n}S_0$に同型。

(1) すべての$P_1\cdots P_n$は$p\times X$ $(p\in\mathbb{P}^1)$の上にのっている

又は (2) $n \leqq 2g+1$

証明　$P_1\cdots P_n$を$elm_{P_1\cdots P_n}S_0 \cong S$となるような点で$n$が最小になるものとする。これらの点について定理の条件をみたさないとして矛盾を導びこう.

(a) $R_1\cdots R_t\in X$として, $L_t = |p\times X + \sum_{i=1}^{t}\pi^{-1}(R_i)|$とおこう。$D_1, D_2 \in L_t - \sum_{i=1}^{t+1} P_{\alpha_i}$ $(\alpha_1<\cdots<\alpha_{t+1})$ ならば, $D_1$と$D_2$は$S_0$のsectionを共有する.

∵ $P_i, P_j$は$i,j$が異れば同じfibreにのっていないから, もし$D_1$と$D_2$が共通のfibreをもてば, それをとりさって, $t$がもっと少ない場合に帰着する。従って$D_1$と$D_2$はfibreを共有しないとしてよい。補題9より$((D_1, D_2)=2t$に注意すれば) 点$Q_1\cdots Q_{t-1}$があって $elm_{P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_{t+1}}Q_1\cdots Q_{t-1}}S_0 \cong S_0$ よって $elm_{P_{\alpha_1}\cdots P_{\alpha_{t+1}}}S_0 \cong elm_{Q_1^*\cdots Q_{t-1}^*}S_0$となり$n$が最小ということに反す。

(b) $R_1\cdots R_{n-1}\in X$に対して $L_{n-1} = |p\times X + \sum_{i=1}^{n-1}\pi^{-1}(R_i)|$を考

えよう。$n \geqq 2g+2$ だから $\dim|\sum R_i| = n-1-g$ となり，補題6より $\dim L_{n-1} = 2n-2g-1$。従って

$$\dim(L_{n-1} - \sum_{i=1}^{n} P_i) \geqq n-2g-1 \geqq 1 \quad \forall R_1 \cdots R_{n-1} \in X.$$

(c) $p \in \mathbb{P}^1$ を $P_1$ が $p \times X$ にのっているような点としよう。$Q_1 \cdots Q_n \in X$ を $\pi^{-1}(Q_i)$ が $P_i$ を通っているような点とする。$P_1 \cdots P_s$ が $p \times X$ の上にあり $P_{s+1} \cdots P_n$ は $p \times X$ 上にないと仮定してよい。仮定により $s \geqq n-1$。さて $R_1 \cdots R_{s-1}$ を $X$ 上の独立な一般点とする。そして $R_{s+i} = Q_{s+i+1}$ $i \geqq 0$ とする。その時 $L_{n-1} - \sum_{i=1}^{n} P_i$ は $D_1 = p \times X + \sum \pi^{-1}(R_i)$ を含んでいるから，(a) により $L_{n-1} - \sum_{i=1}^{n} P_i$ のすべての member は $p \times X$ を含む。故に

$$L_{n-1} - \sum P_i = \{ p \times X + \sum_{i=s+1}^{n} \pi^{-1}(Q_i) + \sum_{i=1}^{s-1} \pi^{-1}(S_i) \mid \sum_{i=1}^{s-1} S_i \in |\sum_{i=1}^{s-1} R_i| \}$$

ところで $\dim(L_{n-1} - \sum P_i) \geqq 1$ ((b)より) だから $\dim|\sum R_i| \geqq 1$。$R_1 \cdots R_{s-1}$ は独立な一般点だったから

$$s \geqq g+2$$

(d) $P_1 \cdots P_n$ は $k$-rational points としてよい。次の linear system を考えよう。$R_1, \ldots, R_{n-s-1}$ は $X$ 上の独立な一般点とする。

$$L = |p \times X + \sum_{i=1}^{s} \pi^{-1}(Q_i) + \sum_{i=1}^{n-s-1} \pi^{-1}(R_i)|$$

(c) により $\dim|\sum_{i=1}^{s} Q_i + \sum_{i=1}^{n-s-1} R_i| = n-1-g > n-s$，従って $S_1, \ldots, S_{s-1} \in X$ が存在して $\sum_{i=1}^{s} Q_i + \sum_{i=1}^{n-s-1} R_i \sim \sum_{i=s+1}^{n} Q_i + \sum_{i=1}^{s-1} S_i$

よって $L - \sum_{i=1}^{n} P_i$ は $p \times X + \sum_{i=s+1}^{n} \pi^{-1}(Q_i) + \sum_{i=1}^{s-1} \pi^{-1}(S_i)$ を含んでいる。(a) により $L - \sum_{i=1}^{n} P_i$ の member はすべて $p \times X$ を含む。

一方 補題8を $\sum_{i=1}^{s} Q_i + \sum_{i=1}^{n-s-1} R_i \sim \sum_{i=s+1}^{n} Q_i + \sum_{i=1}^{s-1} S_i$ に適用すると，$\sum S_i$ は non-special divisor になる。さて $L_\alpha^* = L - \sum_{i=1}^{\alpha} P_i$ $(\alpha = 0, 1, \cdots, n)$ とおこう。$\alpha \leqq s$ ならば $P_\alpha$ が $L_{\alpha-1}^*$ の固定点ということと $Q_\alpha$ が $|\sum_{i=\alpha}^{s} Q_i + \sum_{j=1}^{n-s-1} R_j|$ の固定点であることは同じことである。従って $\dim L - \dim L_s^* = \dim|\sum_{i=1}^{s} Q_i + \sum_{j=1}^{n-s-1} R_j| - \dim|\sum R_j|$

一方 $\dim L_\alpha^* = \dim(\mathrm{Tr}_{p\times X} L_\alpha^*) + \dim(L_\alpha^* - p\times X) + 1$. $(*)$

であり，前の注意により $L_s^* - p\times X = L - p\times X$ となるから，

$$\dim(\mathrm{Tr}_{p\times X} L_s^*) = \dim|\sum R_i| \geqq 0$$

$\alpha > s$ となると $\sum S_i$ が non-special ということより，$\dim|L_\alpha^* - p\times X| > \dim|L_{\alpha+1}^* - p\times X|$，$(*)$ において $\alpha$ が1つふえるごとに左辺は高々1さがるから，$\dim(\mathrm{Tr}_{p\times X} L_n^*) = \dim(\mathrm{Tr}_{p\times X} L_s^*) \geqq 0$

故に $\dim L_n^* > \dim(L_n^* - p\times X)$ となる。これは $L_n^*$ の member がすべて $p\times X$ を含むことに反す。 （証明終り）

次の命題は $P^1$-bundle が $G_m$-bundle であるためには，互に交わらない section を2本もつことが必要十分であることに注意すれば用意に証明できる。

<u>命題12</u>　$P(E)$ が $G_m$-bundle になるためには $P(E)$ が次のようにして得られることが必要十分条件である（$X$ は rational でもよい）：$P(E)$ の minimal section を $\Delta$ とする。$\pi(\Delta\cdot\Delta) = D_0 - D_\infty$ とする。$D_0$ を $S_0$ の $(0)\times X$ 上にとり，$D_\infty$ を $(\infty)\times X$ 上にとる。そしてそれらの点で elementary transformation を施すと，それが

$P(E)$ である。

次の補題は重要である。(証明は次の定理の証明ととくにはぶく [4] を見られたい)

<u>補題 13</u> $\sum_{i=1}^{g+d} P_i$ ($g$ = genus of $X$) を $p\times X$ 上の non special 完備一次系の $k$上の generic member とする。$D^*$ を $|p\times X+\sum_{i=1}^{g+d} l_{P_i}|$ の generic member ($k(P_1\cdots P_{g+d})$ 上の) としよう。この時 $\dim_k k(D^*)=g+2d+1$.

<u>定理 14</u> $N(\varphi(E))$ の上限は $g$ である。

## §4 $\mathcal{P}_X^+$ の分類について。

$\mathcal{P}_X^+=\{P(E)\mid N(\varphi(E))>0\}$ の分類について考えよう。

$P(E)\in\mathcal{P}_X^+$ をとる。$P(E)$に対して標準型の vector bundle をとると定理4の場合と同様にして $V_n$ (*) ($n=N(\varphi(E))$) の点ができる。$\mathcal{P}_X^n=\{P(E)\mid N(\varphi(E))=n\}$ とすると、$\mathcal{P}_X^n$ に対応する $J\times P^{n+g-2}$ の点の集合は Zariski open set を含む dense set である。ところで $\mathcal{P}_X^n$ の $P(E)$ に対応する $J\times P^{n+g-2}$ の点はどのくらいあるだろうか。これは $P(E)$ に対する標準型の vector bundle の数をしらべることと、さらには $E$ の maximal subbundle, $P(E)$ の minimal section の数を調べることと同じである。

$n=g$ の時、$P(E)\in\mathcal{P}_X^g$ としよう $P(E)=elm_{P_1\cdots P_r}S_0$ とする。$r$を十分大にとって、$r=g+2d$ $P_1\cdots P_r$ はすべて ordinary points

(*) $V_n$ は $X$ の Jacobian variety の上の $P^{n+g-2}$-bundle.

であると仮定してよい（定理11と系10による）。さて $R_1 \cdots R_{g+d}$ をX上の独立な一般点として，これについて補題13の $D^*$ をとる。$D^*$ 上に $Q_1 \cdots Q_{g+d}$ を独立な一般点（$k(D^*)$上）をとる。$(D^*, Q_1 \cdots Q_{g+d})$ の $k$ 上の軌跡をTとする。容易にわかるのは，Tから $F = S_0 \times \cdots \times S_0$（$g+d$個の積）へのprojection $Pr$ をとると，$Pr^{-1}(P_1 \cdots P_{g+d}) \ni (D, P_1 \cdots P_{g+d})$ となるDの $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_{g+d}}$ によるproper transformが $P(E)$ のminimal sectionである。ところで $\dim T = 2g+4d+1$, $\dim F = 2g+4d$ となり[4]のTheorem A1を使えば $Pr$ はsurjectiveであることがわかる。よって $\dim Pr^{-1}(P_1 \cdots P_{g+d}) \geqq 1$。又 $\dim Pr^{-1}(P_1 \cdots P_{g+d}) \geqq 2$ の時は再び[4]のTheorem A1を使って $P(E) \notin \mathcal{P}^g_X$ が示される。

<u>命題15</u>　$P(E) \in \mathcal{P}^g_X$ の時　minimal sectionの集合は1次元である。

Atiyahが[1]で行った考察を使えば次のことが証明される。

<u>命題16</u>　$P(E) \in \mathcal{P}^g_X$ の時，$P(E)$ のminimal sectionの数は高々 $2g$ である。しかも $V_1$ の $g$ 次元のclosed setを除けばそこに対応する $P(E)$ は1つ，すなわちそこに対応する $P(E)$ のminimal sectionは唯一本。（ただし $g \geqq 2$）

その他 $g \leqq 3$ の時 $\mathcal{P}^n_X$ $(n<g)$ の元はminimal sectionを有限本しかもたないことが示される。

<u>予想</u>　$N(P(E)) < g$ で $P(E)$ がtrivial bundleでなければ $P(E)$ のminimal sectionの数は有限である。

## §5 特殊な場合.

(I) $g=0$ この時 $\bar{\mathcal{P}}_X = \mathcal{P}_X = \{P^1\text{-bundle}$全体$\}$ $H^1(X, L(D))=0$ $\forall D>0$, よって $C_X = \{(D,0)\}$ ところで $D$ は負か0の整数できまるから, $C_X$ は正でない整数と1:1対応がつく. さらに命題12を用いれば $P(E)$ が $n$ に対応すれば, それは永田の $F_{-n}$ になることがわかる. 又 $n$ は birregular invariant であるから,

<u>定理17</u> 有理曲線の上の線織面は正でない整数の全体と1:1対応がつく。ここで $P(E)$ が $n$ に対応したとすれば, $P(E)$ は永田の $F_n$ である。

(II) $g=1$ 次の定理は Atiyah による。

<u>定理18</u> 楕円曲線上の $P^1$-bundle は $J_n$ $(n<0)$ $\hat{J}_0$ と2点 $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ の和集合に1:1対応がつく, ここで $J_n$ は $X$ の Jacobian variety $\hat{J}_0$ は Jacobian を $a\equiv -a$ の同値関係で割ったもの。

証明 $J_n$, $\hat{J}_0$, $\mathcal{P}_0$ についてはすべて $\bar{\mathcal{P}}_X$ の元である。$C_X$ を調べてみればよい。$\mathcal{P}'_X$ から $J$ への対応が§4のように作れるが, 命題15により $\mathcal{P}'_X$ の元 $P(E)$ に対応する $J$ の元は1次元あるから, $\mathcal{P}'_X$ がただ1つの元からなることがわかる。それが $\mathcal{P}_1$ である。 (証終)

ところで, $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ だけが $G_m$-bundle でないのであるが, $\mathcal{P}_0$ $\mathcal{P}_1$ は次の様な elementary transformation で得られる.

- $\mathcal{P}_0 = \mathrm{elm}_{P_1,P_2} S_0$, ここで $P_2$ は $P_1$ を通る $p\times X$ の形の section

の上にない，$P_1$ の infinitely near point.

$P_1 = \mathrm{elm}_{P_1, P_2, P_3} S_0$　ここで $P_1, P_2, P_3$ はみな ordinary points で同じ fibre にも $p \times X$ という形の同じ section にものっていない．

(III) $g=2$　同様にして次の定理をうる

定理 19 (1) $\mathcal{P}_X$ の moduli は次の通りである。$\bigcup_{n<0} J_n \cup \hat{J}_0 \cup J_0 \cup X \cup P_2$，ここで $P_2$ は点，$\hat{J}_0$ は Jacobian variety を単位元の所で blow up したもの。

(2) $V_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{P}_X^1$　$f_1$ surjective map．しかも $\# f_1^{-1}(P(E)) \leq 4$　$\forall P(E) \in \mathcal{P}_X^1$

(3) $V \xrightarrow{f_2} \mathcal{P}_X^2$　$f_2$ surjective map．ここで $V$ は $V_2$ の Zariski open set．　さらに $\dim f_2^{-1}(P(E)) = 1$　$\forall P(E) \in \mathcal{P}_X^2$．

## 参考文献


[1] M. F. Atiyah, Complex fibre bundles and ruled surface. Proc. London Math. Soc. (3) 5 (1955) 407–434.

[2] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer III. Mimeograph note of I. H. E. S.

[3] M. Nagata, On rational surfaces I. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. 32 (1960) 351–370

[4] M. Nagata, On self-intersection number of a section on a

ruled surface, to appear.

[5] M. Nagata and M. Maruyama, Note on the structure of a ruled surface, to appear,