数理解析研究所講究録
78巻 1969年 22-36

2次元正規偏極アーベル多様体の族の第一種特異ファイバーについて

東大 理　上野 健爾

§.

Vを3次元コンパクト複素多様体，Cをコンパクトリーマン面，$\varpi : V \longrightarrow C$ をVからCの上への固有正則写像とする。ここでCの一般の点uに対して，$\varpi^{-1}(u) = A_u$ が2次元複素トーラスになっているとしよう。$a \in C$ の近傍の局所座標を τ_a，$\varpi^{-1}(a) \ni z$ の近傍の局所座標を (z_1, z_2, z_3) とする。

$$\left|\frac{\partial \tau_a(\varpi(z))}{\partial z_1}\right| + \left|\frac{\partial \tau_a(\varpi(z))}{\partial z_2}\right| + \left|\frac{\partial \tau_a(\varpi(z))}{\partial z_3}\right| > 0 \qquad (1)$$

が成立つ時，$\varpi(z) = u$　$\varpi^{-1}(u) = A_u$ をVの正則ファイバーと云う。この時明らかに，A_uは2次元複素トーラスになっている。(1)が成立しないCの点は有限個であり，それを$\{a_1, \cdots, a_m\}$としよう。τ_{a_ρ} をa_ρの近傍の局所座標とする時

$$\tau_{a_\rho}(\varpi(z)) = 0$$

で定まるVの因子のことを，Vのa_p上の特異ファイバーと云い，A_{a_p}で表すことにする。

問題1.

(V, C, ϖ)に現われる，すべての特異ファイバーを決定せよ。

問題2.

コンパクトリーマン面Cとその上の有限個の点$a_1, \cdots, a_m$を与えて，$a_1, \cdots a_m$上で特異ファイバーを持ち，他では正則ファイバーを持つ(V, C, ϖ)を構成し，その性質を調べること。

Vが2次元コンパクト複素多様体で，一般のファイバーが楕円曲線の時はKodaira [4] によって，問題1，2は解かれている。とりわけ問題1に関しては，intersection number と genus formula を使って，特異ファイバーとなり得る可能性のあるものを数えあげることは容易である。またその様な特異ファイバーがすべて現われることは，問題2に関連して，実際にVを構成することによって示される。しかしながら，3次元では最早その様な議論ができないので，特異ファイバーを直接構成してゆくことにする。その際A_uを一般の複素トーラスにすると，困難であるので，ここではA_uが正規偏極アーベル多様体である場合に，第一種特異ファイバ

一を構成してみる。

§.

(V, C, ϖ) $\{a_1, \cdots, a_m\}$ を上の通りとする。$C' = C - \{a_1, \cdots, a_m\}$ とし，C の開集合 U への V の制限を $V|U$ と書くことにする。容易に分かるように，$V' = V|C'$ は C' 上 differentiable に locally trivial であり，それによって

$$\mathcal{H}' = \bigcup_{u \in C'} H_1(A_u, \mathbb{Z})$$

を locally constant sheaf と見ることができる。a_p の小近傍 U を取り，$\Gamma(U, \mathcal{H}')$ を a_p 上の stalk とすることによって，C 上の sheaf $\mathcal{H}(V)$ が得られる。これは又，次の様に見ることもできる。$U' = U - a_p$ として

$$\beta : t \longmapsto u(t) \in U' \quad 0 \leq t \leq 1$$

を a_p のまわりを一周する連続閉曲線とする。この曲線に沿って $H_1(A_{u(t)}, \mathbb{Z})$ の底 $\gamma_i(t)$ $1 \leq i \leq 4$ を t に連続に depend する様にとる。すると

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(1) \\ \gamma_2(1) \\ \gamma_3(1) \\ \gamma_4(1) \end{pmatrix} = M_\beta \begin{pmatrix} \gamma_1(0) \\ \gamma_2(0) \\ \gamma_3(0) \\ \gamma_4(0) \end{pmatrix} \qquad M_\beta \in SL(4, \mathbb{Z})$$

となる。M_β は曲線 β の C' 内での homotopy class に

のみ depend している。かくして C'の　　基本群の表現

$$\Phi : \pi_1(C') \longrightarrow SL(4,\mathbb{Z})$$

が得られ，この表現によって $\mathcal{H}'$ は locally constant sheaf と見ることができる。

Prop. C'の各点 u に対して，小近傍Uが存在し $V'|U$ 上の holomorphic 1-form ω_1, ω_2 が存在して，$i_v^*(\omega_1)$ $i_v^*(\omega_2)$ は Uの任意の点v上の正則ファイバー A_v 上の holomorphic 1-form の底を与える。但し i_v は

$$i_v : A_v \hookrightarrow V'|U$$

なる，自然な inclusion map とする。

証明)

$\Omega = \Omega^1_{V/C'}$ とすると $\dim H^0(A_u, \Omega_u) = 2$ $\forall u \in C'$

従って Grauert [2] により，$\varpi_*(\Omega)$は C' 上の locally free sheaf。かつ

$$\varpi_*(\Omega) \underset{\mathcal{O}_u}{\otimes} k(u) \xrightarrow{\sim} H^0(A_u, \Omega_u)$$

従って uの近傍で $\varpi_*(\Omega)$ の２個の独立な section ω_1, ω_2 をとれば，求めるものである。　q.e.d.

さて $V' = V|C'$ は 今後，偏極構造が一定の アーベル多様体とする。即ち V' をC' 上 differentiable に locally trivial な fibre space とみることができるから，$H_1(A_u, \mathbb{R})$ $H_1(A_u, \mathbb{Z})$ は u の近傍で同型となっており，アーベル多様体 A_u の偏極構造を $H_1(A_u, \mathbb{R})$ 上の歪対称双一次形式 B で定めた時，それが u の近傍で一定となっているのである。Iitaka [3] の用語を使えば，C' 上の偏極バンドルと云う。この節の議論は一般の偏極構造をもつ場合に適用されるのであるが，後に正規偏極アーベル多様体の場合しか考えないので，その様に仮定しておく。偏極構造 B を入れたので，$H_1(A_u, \mathbb{Z})$ の底 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ を

$$B(\alpha_i, \alpha_i) = 0 \qquad B(\beta_i, \beta_j) = 0 \qquad 1 \leq i, j \leq 2$$
$$B(\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij}$$

となる様に定めることができる。すると上で定めた M_β は，この様な底に対しては

$$M_\beta \in Sp(2, \mathbb{Z})$$

となり，Φ は基本群の Symplectic 表現

$$\Phi : \pi_1(C') \longrightarrow Sp(2, \mathbb{Z})$$

を与える。また Prop. の ω_1, ω_2 を使って

$$\left(U(u), V(u) \right) = \begin{pmatrix} \int_{\alpha_1} i_u^* \omega_1 & \int_{\alpha_2} i_u^* \omega_1 & \int_{\beta_1} i_u^* \omega_1 & \int_{\beta_2} i_u^* \omega_1 \\ \int_{\alpha_1} i_u^* \omega_2, & \int_{\alpha_2} i_u^* \omega_2, & \int_{\beta_1} i_u^* \omega_2 & \int_{\beta_2} i_u^* \omega_2 \end{pmatrix}$$

を作ると，

$$\det (U(u)) \neq 0 .$$

従って

$$T(u) = U(u)^{-1} V(u)$$

と定義すると, A_u が正規偏極アーベル多様体であることより, T は C' より Siegel 上半平面 $\mathfrak{S}_2$ への multivalued holomorphic map を定める。また a_ρ のまわりを一周する曲線 β に沿って $T(u)$ を解析接続すると $T(u)$ は

$$M_\beta \cdot T(u) = (A\, T(u) + B)(C T(u) + D)^{-1}$$

$$M_\beta = \begin{array}{cc} 2 & 2 & \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right) & \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \end{array} \in Sp(2, \mathbb{Z})$$

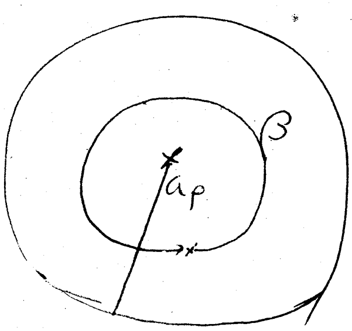
になる。$(V\ C\ \varpi)$ は sheaf $\mathcal{H}(V)$, 又は同じことであるが表現 $\Phi : \pi_1(C') \longrightarrow Sp(2, \mathbb{Z})$, と C' 上の multivalued holomorphic mapping $T(u)$ によって charactarize されている。

§.

特異ファイバーを特別な場合に構成してゆくわけだが, その構成は与えられた sheaf $\mathcal{H}$ 及び C' から $\mathfrak{S}_2$ への multi-valued holom. map. $T(u)$ を持つ様な (V, C, ϖ) を構成する問題2と密接に関係している。しかし特異ファイバーのみを問題としているので, 実は $T(u)$ が constant map の時を考えれば十分なのである。

Iitaka [3] によって偏極バンドルの構成法は定められている。それによると，U上の任意の偏極バンドルは，U上0-section をもつ偏極バンドル V から $H^1(U, \mathcal{O}(V))$ の元による貼りかえによって，すべて得られる。ここで $\mathcal{O}(V)$ は U上の V への section の germ の作る sheaf である。従って 0-section を持つ偏極バンドルを考え，その特異ファイバーを考察することにする。

local な問題であるので，上述の点 a_p の小近傍 U で考察し，$U' = U - a_p$，$V \mid U'$ は U' 上 section をもつとする。U の局所座標を τ とし $U = \{\tau \mid |\tau| < \varepsilon\}$ とする。a_p から出た半直線を U から除いた単連結領域を U'' とすると，$T(\tau)$ は U'' 上では single-valued holom. map になっている。$\lim_{\tau \to 0} T(\tau) = T(0)$ が U'' 上で考えた時，存在して $\mathfrak{S}_2$ の元になる時，A_{a_p} を第一種特異ファイバーと云うことにする。β を前と同様に a_p を一周する閉曲線とすると，$T(0)$ は M_β の固定点でなければならない。従って第一種特異ファイバーは，M_β と $T(0)$ によって characterize されている。この時 M_β は位数有限である。逆に $Sp(2, \mathbb{Z})$ の位数有限の元は $\mathfrak{S}_2$ 上に固定点を有している。また M_β は $Sp(2, \mathbb{Z})$ 共役を modulo として



考えてよい。以上のことより，第一種特異ファイバーは $Sp(2,\mathbb{Z})$ の位数有限の元 M の $Sp(2,\mathbb{Z})$ 共役類と，M の固定点 Z_0 の Pair と対応している。

さて U 上 0-section をもつ偏極バンドルは次の様に与えられる。(Iitaka [3])． $M_\rho = M$ の位数を n としておく。

$$\mathfrak{V} = \{\sigma \mid |\sigma|^n < \varepsilon\}$$
$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{V} - \{0\}$$

とすると，

$$\sigma \longmapsto \sigma^n = \tau$$

によって，$\mathfrak{V}'$ は U' 上の n 次不分岐被覆，$\mathfrak{V}$ は U の原点で分岐した被覆となる。$T(\tau)$ は自然に $\mathfrak{V}'$ 上の single valued holom. mapping $T(\sigma)$ に持ちあげられる。

$\mathbb{Z}^4 \ni \nu$ に対して

$$g_\nu : \mathfrak{V}' \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathfrak{V}' \times \mathbb{C}^2 \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\Psi}{}$$
$$(\sigma, (\zeta_1, \zeta_2)) \longmapsto \left(\sigma, \ (\zeta_1, \zeta_2) + \nu \begin{pmatrix} I_2 \\ T(\sigma) \end{pmatrix}\right)$$

と作用を定めると，$\mathcal{G} = \{g_\nu\} \cong \mathbb{Z}^4$ は $\mathfrak{V}' \times \mathbb{C}^2$ に，properly discontinuous fixed point free に作用して

$$\mathcal{V}' = \mathfrak{V}' \times \mathbb{C}^2 / \mathcal{G}$$

は，$\mathfrak{V}'$ 上の偏極バンドルとなっている。$\mathcal{G}$ の作用は自然

に $\tilde{U}\times\mathbb{C}^2$ の作用に拡張できて

$$\tilde{V} = \tilde{U}\times\mathbb{C}^2/\mathcal{G}$$

は，$\tilde{U}$ 上の偏極バンドルになっている。$(\sigma,(\xi_1,\xi_2))$ の $\tilde{V}'$ 又は $\tilde{V}$ への像を $[\sigma,(\xi_1,\xi_2)]$ と書くことにする。

$$M^k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$$

と 2×2 次行列のブロックに分割して，

$$g^k : \tilde{V}' \longrightarrow \tilde{V}'$$

なる作用を $\qquad e_n = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$

$$g^k : [\sigma,(\xi_1,\xi_2)] \longmapsto [e_n^k\sigma,(\xi_1,\xi_2)(C_kT(\sigma)+D_k)^{-1}]$$

と定めると，有限群 $\{1,g,g^2,\cdots\cdots,g^{n-1}\}$ は $\tilde{V}'$ 上に properly discontinuous, fixed point free に作用し，

$$V' = \tilde{V}'/\{1,g,\cdots g^{n-1}\}$$

は U'上の 0-section をもつ偏極バンドルを与えている。これが第一種特異ファイバーの近傍の形状を与えている。さて $\mathcal{G}$の場合と同様に $\{1,g,\cdots\cdots,g^{n-1}\}$ の作用は自然に $\tilde{V}$の作用に

$$g^k : [\sigma,(\xi_1,\xi_2)] \longmapsto [e_n^k\sigma,(\xi_1,\xi_2)(C_kT(\sigma)+D_k)^{-1}]$$

と拡張される。しかしながら g^k は $\sigma=0$ 上のファイバー上に固定点を有しているから，

$$\tilde{V}/\{1, g, \cdots g^{n-1}\}$$

には，今度は特異点が現われる。この特異点を除去したものをVとすると，Vの原点上のファイバーが求める第一種特異ファイバーである。特異点の除去の際は第一種例外部分多様体 を含まない様にすべきである。第一種例外部分多様体の判定法は Moišezon[5] によって得られている。（3次元の場合）。従ってそれを適用すればよいのであるが，今の所，作った第一種特異ファイバーが例外部分多様体を含むかどうか，　判定できない場合が多い。しかしながら，下の記号でⒽが例外部分多様体でなければ，特異ファイバーは例外部分多様体を含んでいないことが云える。また第一種特異ファイバーが上の様にしてすべて構成できるかどうかも，今の所分からない。

第一種特異ファイバーは$Sp(2, \mathbb{Z})$の位数有限な元の$Sp(2,\mathbb{Z})$共役類と，その固定点によって定まる。$Sp(2, \mathbb{Z})$による$\mathfrak{S}_2$の固定点と，その固定点を固定する$Sp(2, \mathbb{Z})$の部分群とは，Gottschling[1]によって決定されているので，それを使うことができるが，$Sp(2, \mathbb{Z})$を$Sp(2, \mathbb{R})$共役で分類した Iitaka[8] の結果を使うことにする。位数有限の元の固有多項式によって分類の目安とする。（Iitaka の分類では，固有多項式が

$(X^2+1)(X^2+X+1)$, $(X^2+1)(X^2-X+1)$ の場合が落ちていたので，共役類は44ではなく52である。)

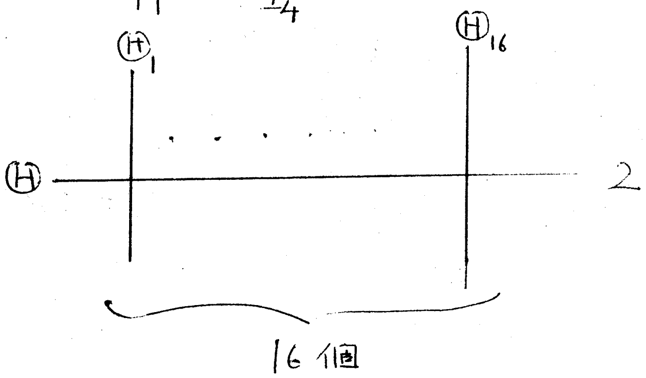
以下得られた結果の一部を記しておく。

I ① 固有多項式 $(X-1)^4$

$M = I_4$ 正則ファイバー

I ② $(X+1)^4$

$M = -I_4$



Ⓗ K3 surface
(Kummer surface)

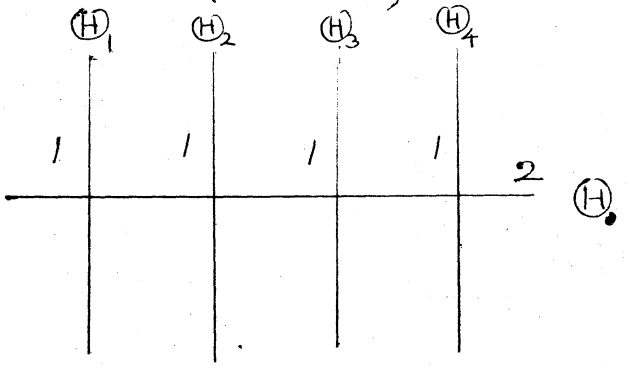
$Ⓗ_i = \mathbb{P}^2$
$1 \leq i \leq 16$

特異ファイバー $= 2Ⓗ + Ⓗ_1 + \cdots + Ⓗ_{16}$

第一種例外部分多様体は含まない。

II ①　　$(X^2-1)^2$

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & -1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right)$$



$\mathrm{Im}\,\omega > 0$ なる ω を modulus としてもつ楕円曲線を E_ω とすると $Ⓗ_i$ Ⓗ はすべて $E_\omega \times \mathbb{P}^1$ なる elliptic ruled surface

特異ファイバー

$$E_\omega \times \mathrm{Kod}(I_0^*) = 2Ⓗ + Ⓗ_1 + \cdots + Ⓗ_4$$

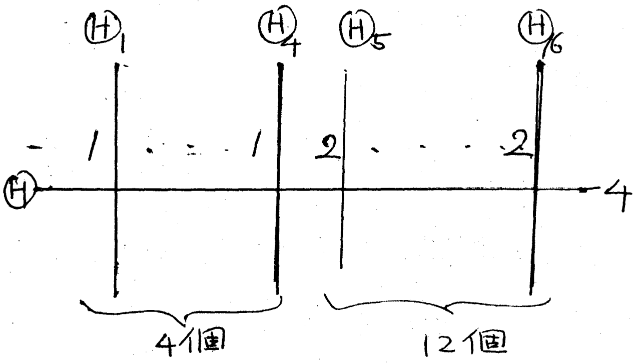
第一種例外部分多様体は含まない。

II ②　　$(X^2+1)^2$

り　$M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_2 \\ \hline -I_2 & 0 \end{array}\right)$

Ⓗ rational surface

$Ⓗ_1 \sim Ⓗ_{16}$　$\mathbb{P}^2$



特異ファイバー

$$4Ⓗ + Ⓗ_1 + \cdots + Ⓗ_4 + 2(Ⓗ_5 + \cdots + Ⓗ_{16})$$

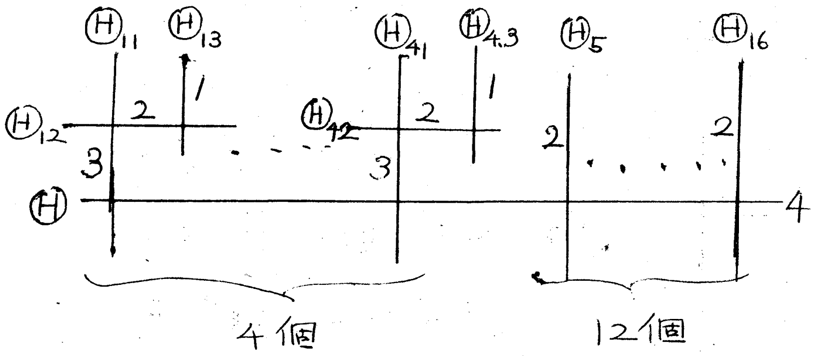
2) $M = \left(\begin{array}{c|c} O & -I_2 \\ I_2 & O \end{array}\right)$

$\textcircled{H}$ rational

$\textcircled{H}_{i1} = \Sigma_3$ Hirzebuch manifold $1 \leq i \leq 4$

$\textcircled{H}_{i2} = \Sigma_2$

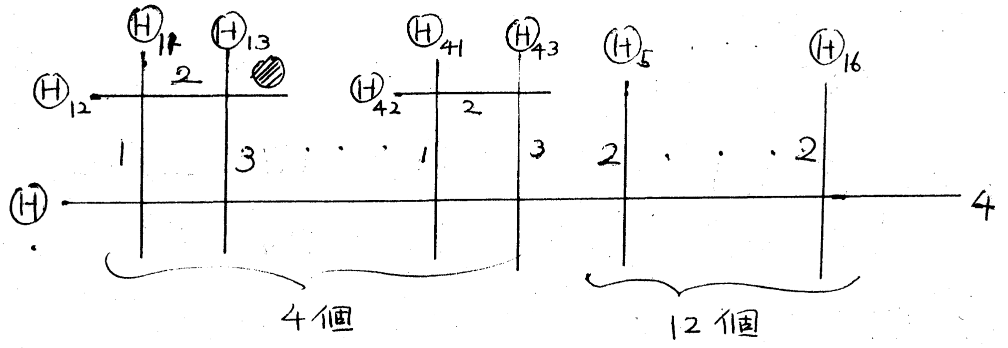
$\textcircled{H}_{i3}$, $\textcircled{H}_5 \sim \textcircled{H}_{16} = \mathbb{P}^2$



特異ファイバー

$$4\textcircled{H} + (3\textcircled{H}_{11} + 2\textcircled{H}_{12} + \textcircled{H}_{13}) + \cdots + (3\textcircled{H}_{41} + 2\textcircled{H}_{42} + \textcircled{H}_{43}) + \textcircled{H}_5 + \cdots + \textcircled{H}_{16}$$

3) $M = \left(\begin{array}{c|c} O & \begin{smallmatrix} -1 & \\ & 1 \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} 1 & \\ & -1 \end{smallmatrix} & O \end{array}\right)$



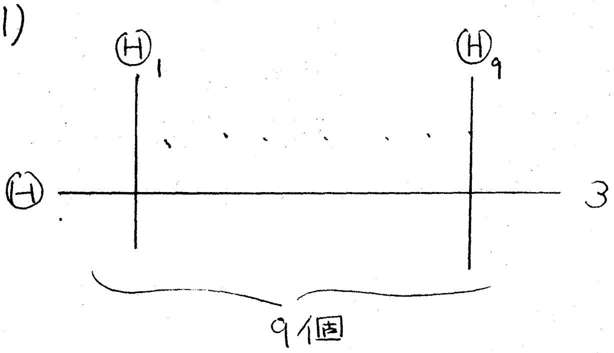
$\textcircled{H}$, $\textcircled{H}_{ij}$, $\textcircled{H}_k$ は 2) と同じ

特異ファイバー

$$4\textcircled{H} + (\textcircled{H}_{11} + 2\textcircled{H}_{12} + 3\textcircled{H}_{13}) + \cdots + (\textcircled{H}_{41} + 2\textcircled{H}_{42} + 3\textcircled{H}_{43}) + $$
$$+ 2(\textcircled{H}_5 + \cdots + \textcircled{H}_{16})$$

II ③ $(X^2+X+1)^2$

1)



Ⓗ rational

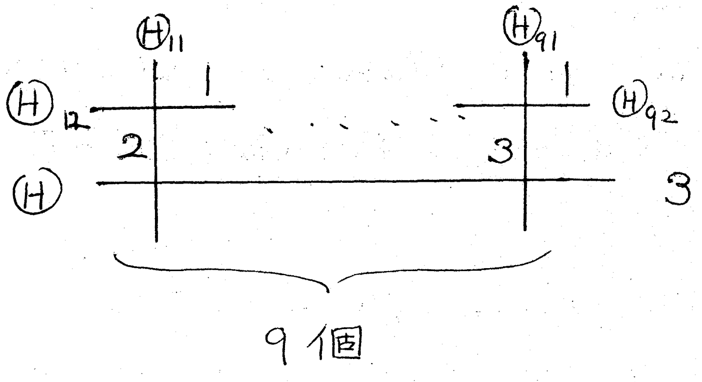
Ⓗ$_1$ 〜 Ⓗ$_9$ $= \mathbb{P}^2$

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_2 \\ \hline -I_2 & -I_2 \end{array}\right)$$

特異ファイバー　3Ⓗ + Ⓗ$_1$ + ・・・・・ + Ⓗ$_9$

2)

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_2 \\ \hline I_2 & -I_2 \end{array}\right)$$



Ⓗ rational

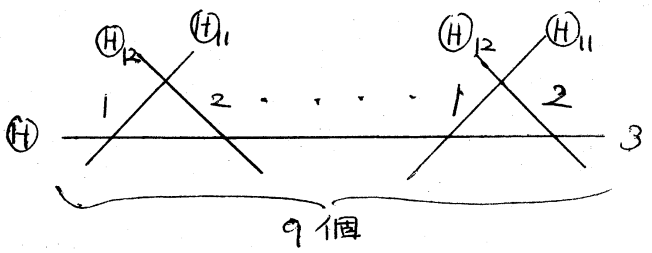
Ⓗ$_{11}$ 〜 Ⓗ$_{91}$ $= \Sigma_2$

Ⓗ$_{12}$ 〜 Ⓗ$_{92}$ $= \mathbb{P}^2$

特異ファイバー

3Ⓗ + (2Ⓗ$_{11}$ + Ⓗ$_{12}$) + ・・・・ + (2Ⓗ$_{91}$ + Ⓗ$_{92}$)

3) $M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} -1 & \\ & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & \\ & -1 \end{matrix} & I_2 \end{array}\right)$ $\textcircled{H}$ $\textcircled{H}_{ij}$ は 2) と同じ



特異ファイバー

$3\textcircled{H} + (\textcircled{H}_{11} + 2\textcircled{H}_{12})$

$+ \cdots\cdots + (\textcircled{H}_{91} + 2\textcircled{H}_{92})$

参考文献

[1] E. Gottschling ; Über die Fixpunkte der Siegelschen Modulgruppe, Math. Ann. 143 (1961) P111～149

——— ; Über die Fixpunktergruppe der Siegelschen Modulgruppe, ibid. P399～430

[2] H. Grauert ; Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modularäume Komplexer Struktur, Pbl. Math de IHES (1960)

[3] S. Iitaka ; アーベル曲面と超楕円曲線の極限図形 修士論文 (1966)

[4] K. Kodaira. ; On compact analytic surfaces II, III Ann. of Math. vol 77 P563～626, vol 78 (1963) P1～40

[5] B. Moišezon ; On n-dim compact complex manifold with n algebraically independent meromorphic functions I, II, III. Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser Math. (1966) P133～174, P345～386, P621～656, AMS Translation 63 P51～177.