数理解析研究所講究録
78巻 1969年 1-15

Analytic scheme 上の定理A.Bについて.

斎藤恭司

§1. はじめに

本稿では、[1] 等で与へられた、analytic scheme 上の sheaf cohomology の話し等をし、特に countable analytic space 上の countable analytic sheaf (定義等は後出.) について Cartan の定理A.B. の類似を示します。

これ等の話は多くの点で未完成であり、これからも変わると思います。多くの批判意見をお願いします。

なお §2, §3, は convex topology についての一般論及び、analytic scheme の構成の復習等なので、既知の方はとばしてお読み下さい。なお、analytic scheme についての解説記事が「数学の歩み　」に載っています。

§2. convex ring, convex module

以下考える環はすべて、可換、結合的で、1を持ち、module への作用は、1が identity と作用するもののみを考え、ring homomorphism は1を1に写すもののみを考える。

- 環 A 上の、semi-norm とは、A から非負実数 $\mathbb{R}^+$ への写像 φ で

  i) $\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ $\quad {}^\forall a, b \in A$

  ii) $\varphi(a \cdot b) \leq \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ $\quad {}^\forall a, b \in A$

  iii) $\varphi(0) = 0$

  を満すものの事です。

- A 上の semi-norm の族 T が、$\varphi_1, \varphi_2 \in T \Rightarrow {}^\exists \varphi_3 \in T$, s.t $\sup(\varphi_1, \varphi_2) \leq \varphi_3$ なる時、A の convex topology と呼び、その組 (A, T) を convex ring と言う。

- 同様に、加群 M 上の semi-norm とは、M から $\mathbb{R}^+$ への写像で、上記 i), iii) を満すものとする。同様に、M の convex topology T', 及び、convex 加群 (M, T') が定義される。

- もち論、convex topology が与えられた時、その semi-norm の族より自動的に、A や M に位相が入り、それぞれ位相環，位相加群となっている。

- convex 加群 (M, T') が (A, T)-module であるとは

  i) M は代数的に A-module

  ii) ${}^\forall \varphi \in T'$ に対し、${}^\exists \psi \in T$, s.t. $\varphi(am) \leq \psi(a)\,\varphi(m)$ $\quad {}^\forall a \in A, {}^\forall m \in M$

  となる事である。

  2番目の条件は、φ に対し、

$$\tilde{\varphi}(a) \underset{def}{=} \sup_{m \in M} \varphi(am) / \varphi(m)$$

とおいて、$\tilde{\varphi} \leq \psi$ と言う事もできる。

- 2つの convex 加群(又は環) (M,T), (N,T') 間の homomorphism $\lambda : (M,T) \longrightarrow (N,T')$ とは
  i) $\lambda : M \longrightarrow N$ は代数的な homomorphism
  ii) $\forall \varphi \in T'$ に対し $\exists \psi \in T$ s.t. $\varphi \circ \lambda \leq \psi$ (連続条件)

2番目の条件は連続性の条件で、$T' | \mathrm{Im}(\lambda) \leq T/\ker\lambda$ と書ける。更に $T' | \mathrm{Im}(\lambda) = T/\ker\lambda$ (i.e. $\forall \psi \in T$, $\exists \varphi \in T'$. $\psi/\ker\lambda \leq \varphi$) なる時、$\lambda$ を h-homomorphism と言う。h-hom によって convex 加群は abelian category を作る。又、自動的に topological 加群(又は環)として連続になる。

- (M,T_1), (N,T_2) は (A,T)-module とする。
  $(M,T_1) \underset{(A,T)}{\otimes} (N,T_2)$ とは $(M \underset{A}{\otimes} N,\ T_1 \underset{A}{\otimes} T_2)$ の事である。
  ここで $T_1 \otimes T_2 = \{ \varphi_1 \otimes \varphi_2 : \varphi_i \in T_i \}$
  $$\varphi_1 \otimes \varphi_2 (x) = \inf_{x = \sum_i m_i \otimes n_i} \sum_i \varphi_1(m_i) \cdot \varphi_2(n_i)$$

- Prop. $(M,T_1) \hat{\otimes} (N,T_2) \cong (\hat{M},T_1) \hat{\otimes} (N,T_2) \cong (\hat{M},T_1) \hat{\otimes} (\hat{N},T_2)$.
  ただし、$\hat{}$ は completion を意味する。上の事は、complete tensor をする前に、各項を completion しても結果は変らない事を示している。

- A や M, に対して、その convex topology は一意に定まっているわけではないが、前後の事状により、位相がはっきりして

i

いる時は (A,T), (M,T') を A, M 等と略記する。

- convex加群の列

$$M_1 \xrightarrow{\lambda_1} M_2 \xrightarrow{\lambda_2} \cdots \longrightarrow M_n$$

が exact とは

i) 代数的に exact, ii) 各 λ_i は h-hom. の事

quasi-exact とは

i) $\mathrm{Im}\,\lambda_i \subset \ker \lambda_{i+1}$ dense ii) 各 λ_i は h-hom. の事とする。

- 例1. convex加群 M にその completion $\hat{M}$ を対応させる functor は quasi-exact functor である。

例2. functor $M \longmapsto M\hat{\otimes}P$ は右-quasi-exact.

- 上例の様に、不都合な事情は、以下の countable condition によってさけられます。

定義. convex topology T が countable とは、或る T の可算部分集合 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ で、「$\forall \varphi \in T$, $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $\varphi \leq \varphi_n$」なるものが存在する事である。

この時、convex ring (又は加群) は位相空間として metrizable.

(M,T) が countable かつ complete の時 Fréchét と呼ぶ。

- Prop. $\lambda : M \longrightarrow N$ は Fréchet空間の homomorphism とする。

λ が h-hom ならば、$\mathrm{Im}(\lambda) = \lambda(M)$ は N の中で closed.

Cor. Countable module の category で考える時、functor $M \longmapsto \hat{M}$, $M \longmapsto M\hat{\otimes}P$ は、それぞれ、exact

右-exact となる。

さて、(A,T) が次の条件を満している時、はがらぶると言う。

$*$ $\exists a \in A$. s.t. a は invertible

$$\begin{cases} \forall \varphi, \varphi' \in T & \{\varphi(a^n)\varphi'(a^{-n}) ; n \in \mathbb{N}\} \text{ は有界} \\ \exists \chi \in T & \chi(a) < 1 \end{cases}$$

例へば、A が nontrivial な付値体を係数に持っていれば、はがらぶるである。さてこの事状の下に先の Prop. の逆が言える。

Prop. $\lambda : M \longrightarrow N$ は はがらぶる (AT)-Fréchet-module 間の homomorphism とする。$\lambda(M)$ が N の中で closed ならば、λ は h-hom である。

Cor. 上の時、λ が onto ならば、λ は open map である。

§3. analytic spaces

(A,T) を convex ring とする時、p が (A,T) 上の prime-semi-norm とは、次の2条件が満たされる事とする。

i) p は A 上 multiplicative な semi-norm (ie $p(a \cdot b) = p(a) \cdot p(b)$)

ii) $\exists \varphi \in T$ s.t. $p \leq \varphi$

$\mathrm{Spec}(A,T) = \{ p : (AT) \text{ 上の prime semi norm} \}$ と置く。

これは、(AT) のスペクトルとして、重要な性質を多く持っているが、ここではすべて省略する。

有限個の $f_1, \cdots, f_k \in A$ に対して、

$$D(f_1, \cdots, f_k) = \{ p \in \mathrm{Spec}(A,T) ; \ p(f_i) \underset{i=1,\cdots k}{<} 1 \}$$

と置いて、これを基本近傍系として $\mathrm{Spec}(A,T)$ に位相を入れる。

1方 semi-norm φ に対し、

$\mathrm{supp}(\varphi) \underset{\mathrm{def}}{=} \{p : \text{prime semi-norm } p \leq \varphi\}$ と置く。

さて、$D = D(f_1, \ldots, f_k) \subset \mathrm{Spec}(A,T)$ に対して、

$T_D = \{\varphi \in T : \mathrm{supp}(\varphi) \subset D\}$ とおいて

$(A_D\, T_D) \underset{\mathrm{def}}{=} (\widehat{A, T_D})$ とする。

こうして presheaf. $\widetilde{A} : D \longmapsto A_D$ が定まった。

1方 (M, T') を (A,T)-module とする時、

$T'_D = \{\varphi \in T' : \mathrm{supp}(\widetilde{\varphi}) \subset D\}$ (ここで $\widetilde{\varphi}$ とは §2 で定義されたもの) として、$(M_D, T'_D) = (\widehat{M, T'_D})$ と置くと、再び、$\mathrm{Spec}(AT)$ 上の pre-sheaf $\widetilde{M} : D \longmapsto M_D$ が定まる。明かに、$\widetilde{M}$ は $\widetilde{A}$-module である。

$\lambda : (AT) \longrightarrow (BT')$ が与へられると、対応して、

${}^a\lambda : \mathrm{Spec}(B,T') \ni p \longmapsto p \circ \lambda \in \mathrm{Spec}(AT)$

が定まり、連続である。

1方 $D \subset \mathrm{Spec}(AT)$ に対し $(AT) \longrightarrow (BT) \rightarrow (B_{{}^a\lambda^{-1}D}, T_{{}^a\lambda^{-1}D})$ は、$(AT) \rightarrow (A_D, T_D) \longrightarrow (B_{\lambda^{-1}D}, T_{\lambda^{-1}D})$ と分解し(証明には spectral radius theorem を要する。[J] 参照) 従って

$\widetilde{\lambda} : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B}$ を得る。 従って λ に対し、

$({}^a\lambda, \widetilde{\lambda}) : (\mathrm{Spec}(BT'), \widetilde{B}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(AT), \widetilde{A})$

が定まった。

1般に $\widetilde{A}$ が sheaf になるか、あるいは、$\mathrm{Spec}(A_D, T_D)$ と D とが homeo か分らない。そこで、この様な付帯条件を満した時、(A,T)を representable algebra と言い、対応して定まった空間 $(\mathrm{Spec}(A,T), \widetilde{A})$ を affine analytic space と呼ぶ。もし (A,T) が countable ならば、$(\mathrm{Spec}(A,T), \widetilde{A})$ を countable と言う。

affine analytic space は重要な特徴ずけを持っている。少し準備をする。

定義 i) convex ring R が、L-ring であるとは、

$\exists\, p_R \in \mathrm{Spec}(R)$ s.t. $\forall q \in \mathrm{Spec}(R)$, $p \geq q$

ii) $\mu : R_1 \to R_2$ L-ring 間の homomorphism λ が L-morphism とは、${}^a\mu : \mathrm{Spec}(R_2) \to \mathrm{Spec}(R_1)$ が、p_{R_2} を p_{R_1} に写す事

iii) $(X, \mathcal{O}_X)$ が L-ringed space とは、convex ring に value を持つ sheaf $\mathcal{O}_X$ 付の空間 X で、

イ) 各 stalk $\mathcal{O}_{X_x}$ は L-ring になる。

ロ) $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \ni f$ に対し、$X_f = \{x \in X : p_x(f) < I\}$ は open.

ハ) $\forall p \in \mathrm{Spec}(\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X))$ について $p(f) < I$

とするものとする。

又、L-ringed space 間の morphism が L-morphism とは、各 stalk に於て、L-morphism になる事とする。

Prop. 1) affine analytic space は L-ringed space である。
2) affine analytic space 間の morphism

$\Phi : (\mathrm{Spec}(BT'), \widetilde{B}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(AT), \widetilde{A})$

が L-morphism になる必要充分条件は $\exists \lambda \in \mathrm{Hom}((AT),(BT'))$ によって $\Phi = ({}^a\lambda, \widetilde{\lambda})$ と書ける事である。

定義. convex ring に値を持つ sheaf 付空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ が analytic space であるとは. local に affine analytic space に同型となる事である。(i.e. 或る open covering. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ があって. 各. $(U_i, \mathcal{O}_X|U_i)$ は affine analytic space に同型.) 上の Prop. 1) により. analytic space は L-ringed space である事がすぐ分る。もし $\#\{U_i\}$ を高々可算個にとれ. 各 $(U_i, \mathcal{O}_X|U_i)$ が countable の時. $(X, \mathcal{O}_X)$ を countable (analytic space) と言う。countable なら位相空間として X は σ-compact である。

Prop. $(S, \mathcal{O}_S)$ を affine analytic space, $(X, \mathcal{O}_X)$ を任意の L-ringed space とする時.

$$\Gamma : \mathrm{Hom}(X, S) \cong \mathrm{Hom}(\Gamma(S, \mathcal{O}_S), \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

ここで、左辺は L-morphism 全体, 右辺は global section 間の cont. hom. 全体。$\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ を representable と名付ける由来は、この等式から来ています。

さて、analytic space $(X, \mathcal{O}_X)$ 上 convex module に

値を持つ sheaf $\mathcal{F}$ で次の様なものを考えます。

Xの或る affine covering $\{U_i\}$ に対し、$A_i = \Gamma(U_i, O_X)$ -module M_i が存在して、$\mathcal{F}|U_i \cong \widetilde{M_i}$ と書ける。

更に M_i が A_i-finite-module に取れる時 $\mathcal{F}$ の事を locally finite と呼びます。又 M_i が countable に選べる時 $\mathcal{F}$ を countable と言う。

sheaf $\mathcal{F}$ に更に次の付帯条件を付けます。これ等は、或る特別の場合には、自動的に成立して居、将来は、直接証明される、あるいは、もっと自然な条件に帰着される(top; flat ?)と思います。

1) $X = \bigcup U_i$ を affine covering とする時、定まる chain complex の morphism

$$d : C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

は h-morphism である。

2) Xの affine open set U 及び、その analytic polyhedron D に対し $\Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(D, \mathcal{F})$ の image は dense.

§4. cohomology

(X, O_X) を countable analytic space, $\mathcal{F}$ をその countable sheaf とする。

X は countable だから、任意の open covering に対し、その細分となる countable affine covering をとれる。そこで今 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in N}$ を X の countable affine covering とする。

この時、次の4つを示す。

① $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$

が countable sheaf の short exact sequence とする。

この時 long exact sequence が定まる。

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G}) \to \Gamma(X,\mathcal{H})$$
$$\to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H})$$
$$\to H^2(X,\mathcal{F}) \to H^2(X,\mathcal{G}) \to H^2(X,\mathcal{H})$$
$$\to \cdots$$

② X が affine の時

$$H^i(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0 \qquad i > 0$$

③ X が affine の時 D が hol. convex dom. とする時 $\Gamma(D,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F}) \hat{\otimes} \Gamma(D,\mathcal{O}_X)$

④ 更に $\mathcal{O}_X$ が次に述べる意味で locally closed かつ $\mathcal{F}$ が locally finite ならば

$$\Gamma(X,\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{X p} \to \mathcal{F}_p \to 0.$$

定義. $\mathcal{O}_X$ は点 p で closed とは. p の任意に小さい近傍 D に対し.

$$[\mathcal{O}_X(D)]^k \to [\mathcal{O}_{X p}]^k$$

なる写像を考える。$\mathcal{O}_{X p}{}^k$ の任意の $\mathcal{O}_{X p}$-submodule の inverse image が closed となる事である。

証明の概略.

まず, ① は②の簡単な系である。

何者、与へられた sheaf の short exact seq. に対し作られた chain complex 間の写像

$$0 \longrightarrow C^*(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^*(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow C^*(\mathcal{U},\mathcal{H})$$

が exact である事は一般に知れているが. 最後の morphism が surjective か一般には分らない。

しかるに open set $U_{i_0\cdots i_k} = U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}$ は affine だから $\Gamma(U_{i_0\cdots i_k},\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(U_{i_0\cdots i_k},\mathcal{H}) \longrightarrow 0$ は surjective。従って

$$\prod_{i_0\cdots i_k} \Gamma(U_{i_0\cdots i_k}, \mathcal{G}) \longrightarrow \prod_{i_0\cdots i_k} \Gamma(U_{i_0\cdots i_k}, \mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

従って その symetric な部分について.

$$C^*(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow C^*(\mathcal{U},\mathcal{H}) \longrightarrow 0$$

次に. ②, ③ の証明は次の2段階に分ける。

Lemma 1 もし. $\mathcal{F} = \tilde{M}$ なる M が存在するなら.

イ) $H^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0 \qquad i>0$

ロ) $\mathcal{F}(D) = \mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{O}_X(D)$

Lemma 2. X を affine analytic space とする時. $\mathcal{O}(X)$-module M が存在して. $\mathcal{F} = \tilde{M}$.

Lemma 1 の証明の大略.

イ) Sheaf $\tilde{M}$ に対して. $M' : D \rightsquigarrow (M, T_D)$ なる "constant sheaf" を考える。M' を completion したものは. $\tilde{M}$ となる。

chain complex

$$0 \longrightarrow \tilde{M} \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, M') \rightarrow C^2(\mathfrak{U}, M') \rightarrow \cdots$$

は exact である。($\because$ const. sheaf より)

この列を completion すると.

$$0 \longrightarrow M \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \tilde{M}) \rightarrow C^2(\mathfrak{U}, \tilde{M}) \rightarrow \cdots$$

を得る。§2 の Prop. により. この列も. exact になる。

ロ). $M_D = M \hat{\otimes} A_D$ を言えばよい。

$M = (M, T')$, $A = (A, T)$ と置く.

$$M \hat{\otimes} A_D = (M T') \hat{\otimes} (A_D, T_D)$$
$$= (M T') \hat{\otimes} (A, T_D)$$
$$= (M, T' \otimes T_D)^{\wedge}$$

従って $T'_D = T' \otimes T_D$ を言う。

$T'_D \ni \varphi$ について $\varphi = \tilde{\varphi} \otimes \varphi$

$T' \otimes T_D \ni \varphi_1 \otimes \varphi_2$ について. $\widetilde{\varphi_1 \otimes \varphi_2} \leq \varphi_2$

Lemma 2. の証明の大略

$\Gamma(X\mathcal{F}) = M$ とおく。

$\mathcal{F}$ は countable analytic sheaf. だから $X=\bigcup_{\mu} D_\mu$ に
よって. $\mathcal{F}|D_\mu=\widetilde{M}_\mu$ とする。
証明すべき事は. $M_{D_\mu}=M_\mu$ $\forall\mu$ となる事である。
canonical に $M_{D_\mu}\longrightarrow M_\mu$ なる homorphism があって
image が dense だから、この写像が h-morphism かつ.
injective である事を言う。
その為 D_{μ_0} を fix し. M 上の seminorm φ で.
$\mathrm{supp}(\tilde{\varphi})\subset D_{\mu_0}$ なるものに対し. M_{μ_0} 上の semi-norm
ψ で. $\varphi\leq\psi$ を言えばよい。

$0\longrightarrow M\longrightarrow \prod M_\mu$ が exact より.

$$\varphi\leq\sup_{i=1,\cdots n}\varphi_{\mu_i}$$ なる M_{μ_i} 上の semi-norm

φ_{μ_i} が存在する。
A が plat な事より.

$\varphi=\tilde{\varphi}\otimes\varphi\leq\sup_{i=1,\cdots n}\tilde{\varphi}\otimes\varphi_{\mu_i}$。 従って改めて $\tilde{\varphi}\otimes\varphi_{\mu_i}$
を φ_i と置けば

i) $\varphi\leq\sup_{i=1,\cdots n}\varphi_i$ ii) $D_{\mu_0}\supset\mathrm{supp}\,\varphi\supset\mathrm{supp}\,\varphi_i$

φ_i は M_{μ_i} の上の semi-norm だから.

$$\mathrm{supp}\,\varphi_i\subset D_{\mu_0}\cap D_{\mu_i}=D_{\mu_0\mu_i}$$

従って.

$$\begin{tikzcd} & M_{\mu_i} \arrow[dr] & \\ M \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{\mu_i\mu_0} \\ & M_{\mu_0} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

において.

φ_iは. $M_{\mu_i \mu_0}$上のsemi-norm φ_i'の M_{μ_i}への inverse imageとみなせ. φ_i'の M_{μ_0}への inverse imageを φ_i''とする。$\psi = \sup_{i=1..n} \varphi_i''$ は M_{μ_0}上の semi-normで求めるものとする。

q.e.d.

最後に④を示す。これは例へば. topological manifold 等. 1般には成立しないと思われる。

$\mathcal{F} = \widetilde{M}$ とする。Dをpの近傍とする。Mの imageで $\widetilde{M}_p$の中で生成される $\mathcal{O}_p$-sub module $\mathcal{M}$ の M_Dへ の inverse image を $\mathcal{N}$ とする。$\mathcal{N}$ は Mの像をすべて含むから M_Dの中で dense。もし. $\mathcal{N}$の closedness が言えれば. $\mathcal{N} = M_D$ となり. $\mathcal{M}$ は M_D の像を含む. Dは任意だから $\mathcal{M} = \widetilde{M}_p$ となる。

従って次の事が言えればよい。

* $\mathcal{O}_X$ が locally closed, $\mathcal{F}$が locally finite の時. $X \ni p$の任意の小さい近傍 Dに対し.

$$\mathcal{F}(D) \longrightarrow \mathcal{F}_p$$

による. $\mathcal{F}_p$の $\mathcal{O}_{X_p}$-submoduleの inverse imageは closed.

∵ Dが充分小ならば. locally finite より.

$$\mathcal{O}_X(D)^k \longrightarrow \mathcal{F}(D) \longrightarrow 0$$

従って この写像は open mapである。

次の図式は可換

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(D)^k & \longrightarrow & \mathcal{F}(D) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{X_p}^k & \longrightarrow & \mathcal{F}_p \end{array}$$

q.e.d.

注. $\mathcal{O}(X)$ は Stein algebra ならば locally closed である。
locally closed の時

$$\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_p}$$

によって各 stalk の prime ideal は global な closed prime ideal に対応する。

[1] K. Saito : Schematic theory of analytic space
Proceedings of international confference on Functonal analysis and related topics.

[2] K. Saito : Convex rings and Analytic spaces
is appear in Sūgaka.