数理解析研究所講究録
79巻 1969年 91-116

Part について

奈良高専　貴志　一男

§1. 序

二つの事を述べる. A を compact Hausdorff 空間 X 上の function algebra（または uniform algebra), M(A) を A の maximal ideal 空間とする. M(A) の任意の元 φ に対して, X 上の確率測度で $\varphi(f) = \int f\,dm$ ($\forall f \in A$) なる m (φ の表現測度という) が一意に決まるとする. A の $L^p(m)$ ($1 \leq p \leq \infty$) における closure ($p=\infty$ のときは w^*-closure) として, 抽象的 Hardy 空間 $H^p(m)$ を定義したとき, これらの空間と単位円上の古典的 Hardy 空間 $H^p(d\theta)$ との間にどのような関係がつくか, G. Lumer [12]（abstract のみ発表されているので略証をつけ), S. Merrill [13, 14] を中心にして考えてみる.

次いで, B を compact Hausdorff 空間 X 上の function space としたとき, H. S. Bear [1] は Harnack の不等式を使って, function algebra における Gleason part を拡張した形で,

part を定義し, part metric なる概念を導入したが，これらは更に線形(位相)空間の convex 集合に拡張し，研究されつゝある．ここではその一部 [1, 2, 3, 4] を紹介する．

§2 抽象的 Hardy 空間 $H^p(m)$ と複素平面の単位円上の古典的 Hardy 空間 $H^p(d\theta)$ との関係

1°) G. Lumer [12] を中心にして．

A を compact Hausdorff 空間 X 上の function algebra とする．すなわち $C(X)$ の uniformly closed subalgebra で定数関数を含み，X の点を分離し且つ sup norm を持つものとする．特に，$A_R = \{\mathrm{Re} f : f \in A\}$ は $C_R(X)$ で dense であるとき，A を dirichlet algebra という．また $\log|A^{-1}|$ ($A^{-1} = \{f : f \in A$ and $1/f \in A\}$ は $C_R(X)$ で dense であるとき，A を logmodular algebra という．A の maximal ideal 空間を $M(A)$，A の Gelfand 表現を $\hat{A}$ と書く．$\varphi \in M(A)$ に対して X 上の確率測度で $\varphi(f) = \int f\,dm$ $(\forall f \in A)$ なるものが存在するが，このような m を φ の表現測度と呼び，φ の表現測度の全体を M_φ と書く．すべての $\varphi \in M(A)$ に対して M_φ は唯一点からなるとき，A を URM (unique representing measure)

という。A は dirichlet algebra または logmodular algebra のとき URM である。このとき $\varphi \in M(A)$ とその表現測度とを同一視する事にする。$m \in M(A)$ を固定し、m に関する A の $L^p(m)$ closure ($p=\infty$ のときは w^*-closure) を $H^p(m)$ と書いて Hardy 空間という。$H^\infty(m)$ の Gelfand 表現 $\hat{H}^\infty$ の Šilov boundary は $M(L^\infty(m)) = \hat{X}$ であり、$\hat{H}^\infty$ を $\hat{X}$ 上で考えると、logmodular algebra である。すなわち $L_R^\infty = \log|(H^\infty)^{-1}|$ ならば、$C_R(\hat{X}) = \log|(\hat{H}^\infty)^{-1}|$ である。

定理 2.1 $\varphi \in M(H^\infty)$ とする。

$\varphi \in M(L^\infty) \iff |\varphi(J)| = 1$ for every inner function $J \in H^\infty(m)$.

($|J| = 1$ (a.e.$-dm$) なる $J \in H^\infty(m)$ を inner function という。)

証明. ($\Rightarrow$) $J\bar{J} = 1$ から $\varphi(J)\overline{\varphi(J)} = 1$

($\Leftarrow$) $L_R^\infty = \log|(H^\infty)^{-1}|$ を使って、[10] (pp. 177—180) と同様に出来る。//

系 2.2 $H^p(m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ はすべて定数関数のみからなるか、または $H^\infty(m)$ に属する定数でない inner function が存在する。

証明 $H^p(m) = \{\text{const.}\} \iff H^\infty(m) = \{\text{const.}\}$. $H^\infty(m) \neq \{\text{const.}\}$ とする。いま、$f = u + iv \in H^\infty(m)$ を定数でないとすると、u も v も定数でない ($\because$ $H^\infty(m) \cap H_R^\infty(m) = \{\text{const.}\}$)。$m \in M(H^\infty)$

であるが $m \notin M(L^\infty)$ (∵ もし $m \in M(L^\infty)$ ならば，$u=\frac{1}{2}(f+\bar{f})$ $\in L^\infty$ であるから，$\int u^2\,dm = \int u\,dm \int u\,dm = \left(\int u\,dm\right)^2$ になって，u は定数になる。) よって，$M(H^\infty) \supsetneq M(L^\infty)$. さて，$H^\infty(m)$ に属する inner function はすべて定数であるとすると，定理から，$M(H^\infty) = M(L^\infty)$ となり矛盾する。//

J を $H^\infty(m)$ の定数でない inner function とする。$\int J\,dm = \alpha$ とすると，$|\alpha| < 1$. (∵ $|\alpha| = 1$ とすると，$\int |J-\alpha|^2\,dm = 0$ より $J = \alpha$ a.e.$-dm$ 矛盾) そこで $J' = \dfrac{\alpha - J}{1-\bar{\alpha}J}$ とすると，$|J'| = 1$，$\int J'\,dm = 0$. したがって，$H^\infty(m)$ に属する inner function J で定数でなく $\int J\,dm = 0$ なるものがあると仮定してよい。

$d\theta$ を複素平面上の単位円上の normalized Lebesgue measure，$H^p(d\theta)$ $(1 \le p \le \infty)$ を Banach 空間 ($p=\infty$ のとき Banach algebra) と考えられるところの classical Hardy 空間とする。

定理 2.3 $H^\infty(m)$ に属する定数でない inner function J で，$\int J\,dm = 0$ となるものがあると仮定する。$1 \le p \le \infty$ とする。対応

$$(\#) \qquad \sum_{n=-k}^{k} a_n e^{in\theta} \longrightarrow \sum_{n=-k}^{k} a_n J^n$$

は，$L^p(d\theta)$ から $\mathrm{sp}\{J^n\}$ (n: 整数) の $L^p(m)$-closure $\mathcal{L}^p(m)$ ($p=\infty$ のときは w^*-closure) 上への isometric isomorphism T

に拡張出来る。

また、$\mathrm{sp}\{J^n\}$ $(n\geq 0)$ の $L^p(m)$-closure ($p=\infty$ のときは w^*-closure) を $\mathcal{H}^p(m)$ で表わすと、T は $H^p(d\theta)$ から $\mathcal{H}^p(m)$ 上への isometric isomorphism である。

$p=\infty$ のときは、T は algebra isomorphism である。

証明. $f\in L^p(d\theta)$ $(1\leq p\leq\infty)$ とする。f のフーリエ級数の Cesaro means は f に $L^p(d\theta)$-norm ($p=\infty$ のときは w^*-topology) で収束する。

さて、$p(\lambda)=\sum_{n=-k}^{k} a_n\lambda^n$ とする。

$$\int P^n(e^{i\theta})\,\overline{P}^n(e^{i\theta})\,d\theta=\int P^n(J)\,\overline{P}^n(J)\,dm$$

よって、$p=2n$ (偶数) のとき、(#) は求める isometric isomorphism T に拡張出来る。

$f\in L^\infty(d\theta)$ とする。Tf は $p=2n$ の n に無関係に決まる。

$\therefore\ \|Tf\|_\infty=\lim\|Tf\|_{2n}=\lim\|f\|_{2n}=\|f\|_\infty$.

よって、T は $L^\infty(d\theta)$ 上でも isometry である。

Riesz convexity theorem によって、$\|T\|_p\leq 1$ $(2\leq p\leq\infty)$.

同様にして、$\|T^{-1}\|_p\leq 1$. $\therefore\ \|Tf\|_p=\|f\|_p$, $\forall f\in L^p(d\theta)$, $2\leq p\leq\infty$.

次ぎに、$1\leq p<2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とする。任意の多項式 $p(e^{i\theta})$ について、$\|p(e^{i\theta})\|_p=\sup\left|\int p(e^{i\theta})\,\overline{Q}(e^{i\theta})\,d\theta\right|$

ただし sup は (1)… $\int|Q(e^{i\theta})|^q d\theta\leq 1$ なるすべての

多項式．　また，$\| P(\mathcal{T}) \|_p = \sup \left| \int P(\mathcal{T}) \bar{Q}(\mathcal{T})\, dm \right|$，ただし sup は　(2) --- $\int |Q(\mathcal{T})|^q dm \leq 1$　なるすべての多項式．（注意．$Q(\mathcal{T})$ は $L^q(m)$ で一般には dense でないが，$L^q(m)$ の単位球のすべての Q としても sup に影響ない）．$q > 2$ であるから，(1) と (2) とは同値である．よって，(#) は $1 \leq p \leq \infty$ なるすべての p について，isometric isomorphism T に拡張出来る．その他の部分については，容易に証明出来る．//

2°) S. Merrill [13, 14] を中心にして．

function algebra A の maximal ideal 空間 $M(A)$ の二元 φ_1, φ_2 に対して

$$\| \varphi_1 - \varphi_2 \| = \sup \{ |\varphi_1(f) - \varphi_2(f)| \;;\; f \in A,\ \|f\| \leq 1 \}$$

とおき，

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff \| \varphi_1 - \varphi_2 \| < 2$$

によって，$\sim$ を定義すると，$\sim$ は同値関係を満足する[8]．

$$\Sigma(\varphi) = \{ \varphi' \in M(A) \;;\; \varphi \sim \varphi' \}$$

を φ を通る (Gleason) part という．$\Sigma(\varphi) \neq \{\varphi\}$ のとき，$\Sigma(\varphi)$ を nontrivial part という．

定理 2・4　次の3つの条件は同等である．[7]

(1)　$\varphi_1 \sim \varphi_2$

(2)　$\sup\{|\varphi_1(f)| : f \in A,\ \|f\| \le 1,\ \varphi_2(f) = 0\} < 1$

(3)　$M_{\varphi_1} \ni {}^\exists\mu$, $M_{\varphi_2} \ni {}^\exists\nu$, $d\mu \le c\,d\nu$, $d\nu \le c\,d\mu$ となる定数 c が存在する．

A を URM，P を $M(A)$ の nontrivial part とする．$m, \rho \in P$ とすると，$dm \le c\,d\rho$，$d\rho \le c\,dm$ なる $c(\ge 1)$ が存在する．よって，$H^p(m)$ と $H^p(\rho)$ とは関数の集合としては同じで，(ゆえに，単に H^p と書くことがある) Banach 空間としては異なるが同値な norm をもつ．

$m \in P$ を固定する．不等式 $({}^\forall g \in A)$

$$|\hat{g}(\rho)| = |\rho(g)| = \left|\int g\,d\rho\right| \le \left(\int |g|^p d\rho\right)^{1/p} \le K\left(\int |g|^p dm\right)^{1/p}$$

(K は定数) を使って，ρ は $H^p(m)$ の有界な linear functional に一意的に拡張出来る．特に algebra $H^\infty(m)$ に拡張した全体 $\mathscr{P}$ は，$M(H^\infty)$ において nontrivial な part をなす．

Wermer の定理 [18, 1, 11].

ある inner function $Z \in H^\infty(m)$ が存在して，

$$ZH^2 = H^2_m\ , \quad H^2_m = \{f \in H^2,\ \int f\,dm = 0\}$$

となり，D を複素平面上の開単位円板とすると，

$\hat{Z} : P \to D$ は one-to-one，onto である．また

その逆 $\tau = \hat{Z}^{-1} : D \to P$ は one-to-one，onto かつ連続で

ある． $\forall f \in H^2(m)$ は $(\hat{f}\cdot\tau)(\lambda) = \sum_0^\infty a_n\lambda^n$ ， $a_n = \int \bar{Z}^n f\,dm$

と展開出来て，Dで正則な関数 $\hat{f}\cdot\tau$ を得る．

さて，Lumer の定理 2.3 を $J = Z$ として応用する．

$1 \leq p \leq \infty$ のとき，対応T は $H^p(d\theta)$ を $sp\{Z^n\}_{n\geq 0}$ の $L^p(dm)$ closure $\mathcal{H}^p(m)$ （$p = \infty$ のときは w^*-closure）に isometric isomorphic に移す．さて，これから

$$\underline{H^p(m) = \mathcal{H}^p(m) \text{ となる条件}}$$

を求めていく． $H^2(m) = \mathcal{H}^2(m) \oplus (\mathcal{H}^2(m))^\perp$ （直交分解）とする．

補題 2.5 次の3つの条件は同等である．

(1) $f \in (\mathcal{H}^2(m))^\perp$

(2) $a_n = \int \bar{Z}^n f\,dm = 0 \quad (\forall n \geq 0)$

(3) $\hat{f}(\rho) = 0, \quad \forall \rho \in P$

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) は明らか． (2) $\Rightarrow$ (3)： $\hat{f}(\rho) = \sum a_n\lambda^n$，
$a_n = \int \bar{Z}^n f\,dm$， $\lambda = \hat{Z}(\rho)$ より明らか． (3) $\Rightarrow$ (2)：
$\hat{f}(\rho) = \sum a_n\lambda^n = 0$， $\forall\lambda \in \{|z|<1\}$ $\therefore a_n = 0$ //

特に，

$$f \in H^\infty(m),\ \hat{f}(\rho) = 0,\ \forall\rho \in P \Rightarrow f \equiv 0 \ (dm) \quad \text{と}$$

$$f \in H^\infty(m),\ \int \bar{Z}^n f\,dm = 0\ (\forall n \geq 0) \Rightarrow f \equiv 0\ (dm)$$

とは同等である．これに関連して，次の事が成り立つ．

補題 2.6　次の (1), (2) は同等である

(1)　$f \in H^\infty(m)$, $a_n = \int \bar{Z}^n f\, dm = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \ (dm)$

(2)　$f \in H^1(m)$, $a_n = \int \bar{Z}^n f\, dm = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \ (dm)$

これから，$sp\{Z^n\}_{n \geq 0}$ は $H^p(dm)$ で $L^p(m)$ dense ($p = \infty$ のときは w^*-dense) である事は p に依存しない．よって，

$$\left[f \in H^\infty(m),\ \hat{f}(p) = 0\ (\forall p \in P) \Rightarrow f \equiv 0\ (dm)\right] \Leftrightarrow \mathcal{H}^p(m) = H^p(m),\ 1 \leq \forall p \leq \infty.$$

定理 2.7　次の (1), (2) は同等である．

(1)　$f \in H^\infty(m)$, $\hat{f}(p) = 0$, $\forall p \in P \Rightarrow f \equiv 0 \ (dm)$

(2)　$H^\infty(m)$ は L^∞ の w^*-closed subalgebra として maximal

証明　(1) $\Rightarrow$ (2)；　$T(H^\infty(d\theta)) = (sp\{Z^n\}_{n \geq 0}$ の w^* closure$)$ $= H^\infty(m)$，　$L^\infty(m) \supseteq T(L^\infty(d\theta)) = (sp\{Z^n\}$ (n: 整数) の w^* closure$) \supseteq H^\infty(m) + \overline{H^\infty(m)}$ で，$H^\infty(m) + \overline{H^\infty(m)}$ は $L^\infty(m)$ で w^*-dense であるから，$T(L^\infty(d\theta)) = L^\infty(m)$．一方，$H^\infty(d\theta)$ は $L^\infty(d\theta)$ で w^* closed subalgebra として maximal である ([10], p. 174)．

(2) $\Rightarrow$ (1)；　K を $H^\infty(m)$ と $\bar{Z}$ とによって生成される algebra の w^* closure とすると，$K = L^\infty(m)$．$f \in H^\infty(m)$, $\hat{f}(p) = 0$ ($\forall p \in P$) とする．補題 2.5 より $a_n = \int \bar{Z}^n f\, dm = 0$ ($\forall n \geq 0$)．$g \in H^\infty(m)$，$b_n = \int \bar{Z}^n g\, dm$ とすると

$$\int \bar{Z}^n g f\, dm = b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \cdots + b_n a_0 = 0$$

$\therefore \int k f\, dm = 0$, $\forall k \in L^\infty(m)$.　$\therefore f \equiv 0 \ (dm)$ //.

Example（定理 2.7 の条件を満足しない例）

T^2 を torus（二つの円 X, Y の cartesian product），

$dm = dx \times dy$ を T^2 上の normalized Haar measure，

$S = \{(m, n) ; n > 0\} \cup \{(m, 0) : m \geq 0\}$ （m, n 整数として），

$$A = A(T^2) = \{ f \in C(T^2) ; \ a_{mn} = \iint f(x,y)\, e^{-imx} e^{-inx}\, dx\, dy = 0 \ \text{for} \ \forall (m, n) \notin S \}$$

とすると，A は dirichlet algebra（[19]− p.69）である．

$$M(A) = \{(x, y) ; \ |x| = 1, \ |y| \leq 1\} \cup \{(x, 0) : |x| < 1\}$$

で，表現測度で書くと

$$M(A) = \{ \delta_x \times \delta_y : x \in X, y \in Y\} \cup \{ \delta_x \times P_r(\theta - y)\, dy : x \in X, re^{i\theta} \in D\}$$
$$\cup \{ P_r(\theta - x)\, dx \times dy ; re^{i\theta} \in D\}$$

ここで，δ_x は Dirac measure，$P_r(\theta - x)$ は Poisson Kernel，

D は複素平面上の open unit disk を表わす．

$dm = dx \times dy$ を通る Gleason part は $P(m) = \{(x, 0) ; |x| < 1\}$

である．さて，$f = e^{iy} \in H^\infty(m)$，$\hat{f}(p) = \iint e^{iy} P_r(\theta - x)\, dx\, dy$

$= 0$ （$\forall p \in P$）であるが，$f \not\equiv 0$．よって，定理の条件を満足しない．さらに，$\overline{P}(m) = \{(x, 0) : |x| \leq 1\}$ であるから，$\overline{P(m)} \cap T^2 =$ 空．これは（Gleason part の closure）$\cap$ Šilov boundary $=$ 空であることを示す．

補題 2.8 $\mathscr{S}\cap M(L^\infty)\neq$ 空 とする.（$\mathscr{S}$ については p.6 参照） $H^1(m)\ni f$, $\rho(f)=0$ $\forall\rho\in\mathscr{S}$ $\Rightarrow$ $\int\log|f|dm=-\infty$

証明 $\int\log|f|dm>-\infty$ とすると，$f=gh$（g は outer function，h は inner function）. Ag は $H^1(m)$ で dense であるから，$\alpha_n g\to 1$ $(L^1(m))$ なる列 $\{\alpha_n\}\subset A$ が存在する. よって，$\alpha_n gh\to h$ $(L^1(m))$. $\therefore$ $\rho(\alpha_n gh)\to\rho(h)$, $\forall\rho\in\mathscr{S}$. 一方 $\rho(\alpha_n gh)=\rho(\alpha_n f)=\rho(\alpha_n)\rho(f)=0$ $\therefore$ $\rho(h)=0$. $h\in H^\infty(m)$ であるから，$\rho(h)=0$ $\forall\rho\in\mathscr{S}$. よって，定理 2.1 から，$\mathscr{S}\cap M(L^\infty)=$ 空. 仮定に反する. //

上の例に帰ると，$f=e^{i\chi}\in H^\infty(m)\subset H^1(m)$, $\rho(e^{i\chi})=0$, $\forall\rho\in P(m)$. 一方 $\int\log|e^{i\chi}|dm=0>-\infty$. これは，$\mathscr{S}\cap M(L^\infty)=$ 空 であることを示す.

問題 $M(L^\infty)\supsetneqq\mathscr{S}\cap M(L^\infty)\neq$ 空 となる例があるだろうか.

§3 Part の拡張 ―特に part metric について―

B を compact Hausdorff 空間 X 上の function space，すなわち $C_R(X)$ の subspace で，定数関数をすべて含み，X の点を分

離し，かつ $B \ni u$ に norm $\|u\| = \sup|u(x)|$ が与えられているとする．

1°) X 上の part について

$x, y \in X$ とする．

$x \sim y\,(a)$ （あるいは $x \sim y$）$\Leftrightarrow$ $\exists\, a > 0$ such that $\frac{1}{a} < \frac{u(x)}{u(y)} < a$
for $\forall u \in B$, $u > 0$.

により，$\sim$ を定義すると，$\sim$ は同値関係を満足する．

$\Pi_X(x) = \{y \in X ; x \sim y\}$ を x を通る part と云う．特に，A を X 上の function algebra，$B = \mathrm{Re}\,A$ とすると，

$\|x - y\| = \sup\{|f(x) - f(y)| ; f \in A, \|f\| \leq 1\} < 2 \Leftrightarrow x \sim y\ (a)$

となり，A-parts と B-parts とは一致する．

$x \sim y$ のとき，

$d(x,y) = \inf \log\{a : x \sim y\,(a)\} = \sup\limits_{u > 0} |\log u(x) - \log u(y)|$

とすると，$d(x,y)$ は X の各 part 上で metric である．この metric を part metric という．

2°) state space T_B 上の part について．

B^* を B の dual space とし，B^* に topology $\sigma(B^*, B)$

を入れると，$B=(B^*)^*$ と考える事が出来る．また X を B^* の中に homeomorphic に埋め込む事が出来る．B^* における X の閉凸包を T_B とすると，

$$T_B = \{F \in B^* ; \|F\| = F(1) = 1\}$$

となる．T_B は B^* の compact 集合である．この T_B を B の state space（または carrier space）という．

$x, y \in T_B$ のとき，

$$(1) \quad x \sim y \iff \begin{cases} x = y \text{ または } x, y \text{ は } T_B \text{ 内のある開線分} \\ \text{に含まれる.} \end{cases}$$

により $\sim$ を定義すると，$\sim$ は同値関係を満足する．

$$\Pi_{T_B}(x) = \{y : x \sim y,\ y \in T_B\}$$

を，x を通る part という．この時，$x \in X$ ならば

$$X \cap \Pi_{T_B}(x) = \Pi_X(x)$$

となり，(1) を，X で定義した part の T_B への拡張と考える事が出来る．

Example. X を複素平面上の閉単位円板 $\{|z| \leq 1\}$，B を X 上で連続で，内部 $X^\circ = \{|z| < 1\}$ で調和な関数全体とする．$\Gamma = \{|z| = 1\}$ とする．X° は一つの part であり，また Γ 上の各点は一つの part である．$T_B \supsetneq X$ で，$\{|z| < 1\}$ と T_B との関係については，[2] を参照のこと．

注意. BをXを含むcompact集合K上のfunction spaceにisometric isomorphicに拡張出来るそのようなKのうちで最大なものは，T_Bである．この意味で，T_Bはfunction algebraのmaximal ideal空間と類似した性質をもつ．

3°) 実線形空間のconvex集合でのpartについて．

Lを実線形空間，CをLの直線を含まないconvex集合とする．$[x,y]=\{\lambda x+(1-\lambda)y\ ;\ 0\le\lambda\le 1\}$，$[x,y]$ extends (in C) by $r\ (>0)$ とは $x+r(x-y)\in C$ かつ $y+r(y-x)\in C$ の事を言う．

$$x\sim y \iff [x,y] \text{ extends by some } r\ (>0).$$

で$\sim$を定義すると，$\sim$は同値関係を満足する[3]．

$\Pi(x)=\{y\in C\ ;\ x\sim y\}$ を x を通るpartという．

i) $x\sim y$ のとき：

$d(x,x)=0$，$x\neq y$ ならば $d(x,y)=\inf\{\log(1+\frac{1}{r})\ ;$

$[x,y]$ extends by $r\}$

ii) $x\nsim y$ のとき；

$d(x,y)=\infty$

と $d(x,y)$ を定義したとき，dはC上で（∞の値をとる事を許した）metricである．これをpart metricという．

次に $\Pi(x)$, $d(x,y)$ の性質を列記する.

a) $\Pi(x)$ は convex である.

b) $\Pi(x)=\{y\in C:\ d(x,y)<\infty\}$, よって $\Pi(x)$ は open かつ closed である.

c) $x,y\in C$, $\phi(\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$ (λ: 実数) とすると, $\lambda_0\in(0,1)$, $\lambda\to\lambda_0$ ならば $d(\phi(\lambda),\phi(\lambda_0))\to 0$, 更に, $x\sim y$ のとき, $\lambda_0\in[0,1]$, $\lambda\to\lambda_0$ ならば $d(\phi(\lambda),\phi(\lambda_0))\to 0$

d) C の part は C の component である.

e) $\Psi(\lambda,x,y)=\lambda x+(1-\lambda)y$ ただし, $x,y\in C$, $0\le\lambda\le 1$. Π を C の任意の part とすると, 写像

$$\Psi:\ [0,1]\times\Pi\times\Pi\to\Pi$$

は連続である. 更に, $\Psi: (0,1)\times C\times C\to C$ は連続である.

f) ノルム線形空間 E における有界な開凸集合 C は一つの part であり, C 上では part metric による topology は norm topology と同等である.

補題 3.1 u を C 上で負でない concave 関数 (特に affine 関数) で, Π を C の一つの part とする.

$u(x)>0$, $\forall x\in\Pi$ or $u\equiv 0$ on Π.

証明 $x, y \in \Pi$ とすると, $[x, y]$ extends by r (>0).

$\therefore\ x_0 = x + r(x-y) \in C \quad \therefore\ x = \frac{1}{1+r} x_0 + \frac{r}{1+r} y$. よって,

$u(x) \geq \frac{1}{1+r} u(x_0) + \frac{r}{1+r} u(y) \geq \frac{r}{1+r} u(y)$. $u(x) = 0$ とすると, $u(y) \geq 0$ より $u(y) = 0$. //

4°) convex cone における part について

Example. B を compact Hausdorff 空間上の function space.
$P = \{F \in B^*: F \geq 0\}$ とすると, P は頂点 $0 \in P$ とする convex cone である. この例を常にその principal example として話を進める.

P を実線形空間 E における直線を含まない convex cone, 頂点 $0 \in P$ とする. 特に $P \cap (-P) = \{0\}$ すなわち 0 を通る直線を含まない. $x, y \in L$ のとき

$$x \leq y \iff y - x \in P$$

により L 上に partial order $\leq$ が入る.

$x, y \in P$ とれるとき次の事が成り立つ.

a) $[x,y]$ extends by $r \iff (1+\frac{1}{r})x \geq y,\ (1+\frac{1}{r})y \geq x$

b) $[x,y]$ extends by r, $z \in P \implies [x+z, y+z]$ extends by r.

c) $[x,y]$ extends by $r \iff [px, py]$ extends by r

(p は任意の正数)

d) $x \sim px \quad \forall p$: 正数

e) $x \sim y \Rightarrow x \sim x+y$

d), e) から

Pのすべての part は P の convex subcone である.

P の part metric については,

a) $x \sim y,\ x \neq 0 \Rightarrow d(x,y) = \inf\{\log a : ax \geq y \text{ and } ay \geq x\}$

b) $d(px, py) = d(x,y), \quad \forall p>0, \quad \forall x, y \in P.$

c) $d(x+z, y+z) \leq d(x,y), \quad \forall x, y, z \in P.$

d) $d(rx, sx) = |\log r - \log s| \quad x \in P, \quad x \neq 0, \quad r>0, \quad s>0.$

e) $d(\lambda x, \lambda_0 x_0) \leq d(x, x_0) + |\log \lambda - \log \lambda_0|$

$(x, x_0 \in P, \quad x_0 \neq 0, \quad \lambda>0, \quad \lambda_0>0)$

即ち, $(0, +\infty) \times P \xrightarrow{\text{into}} P$ の写像 $(\lambda, x) \to \lambda x$ は

P 上の part metric に関して連続

f) $d(x+y, x_0+y_0) \leq \max[d(x_0,x), d(y_0,y)] \quad (x, y, x_0, y_0 \in P)$

即ち, $P \times P \to$ into P の写像 $(x,y) \to x+y$ は P 上の part metric に関して連続である.

5°) part metric の completeness について.

線形空間 L を weak space とする. 即ちある線形空間 M があ

って

i) $L\times M$ 上の bilinear form $(x,y)\to \langle x,y\rangle$ が定義されている。

ii) すべての linear functional $x\to\langle x,y\rangle$, $y\in M$ を連続にするような weakest topology $\sigma(L,M)$ が与えられている。したがって、$\sigma(L,M)$ は L 上の locally convex topology である。更に

iii) $\langle x,y\rangle=0$, $\forall y\in M \Longleftrightarrow x=0$

を仮定する。よって、L は Hausdorff 空間である。

C を L 上の closed convex subset とする。C^+ を C 上で負でない、L 上の連続な affine 関数の全体とする。

$$x\in C \Longleftrightarrow F(x)\geq 0,\quad \forall F\in C^+.$$

定理 3.2 C を weak Hausdorff 空間 L の直線を含まない closed convex 集合とする。$\forall x,y\in C$ のとき

$$d(x,y)=\sup\{|\log F(x)-\log F(y)| : F\in C^+,\ F(y)>0\}$$

証明. i) $x\sim y$ とする。補題 3.1 から $F(y)>0 \Longleftrightarrow F(x)>0$, $\forall x\in\Pi(y)$.

$$x+r(x-y)=(1+r)x-ry\in C \Longleftrightarrow (1+\tfrac{1}{r})F(x)\geq F(y)\quad \forall F\in C^+$$

$$y+r(y-x)=(1+r)y-rx\in C \Longleftrightarrow (1+\tfrac{1}{r})F(y)\geq F(x),\quad \forall F\in C^+$$

よって、

$$[x,y] \text{ extends by } r \Longleftrightarrow (1+\tfrac{1}{r})^{-1}\leq F(x)/F(y)\leq 1+\tfrac{1}{r}$$

$\therefore\ |\log F(x) - \log F(y)| \leq \log(1+\frac{1}{r})$

$\therefore\ d(x,y) = \inf \log(1+\frac{1}{r}) = \sup |\log F(x) - \log F(y)|$.

ii) $x \neq y$ とする．$y + \varepsilon(y-x) \notin C$ ($\forall \varepsilon > 0$)．$\varepsilon > 0$ を固定すると，ある $F \in C^+$ が存在して，$F(y+\varepsilon(y-x)) < 0$．これから $\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} F(y) < F(x)$．$F(y) > 0$ のときは $|\log F(x) - \log F(y)|$ $= \log F(x) - \log F(y) > \log(1+\frac{1}{\varepsilon})$．$\varepsilon \to 0$ のとき $\log(1+\frac{1}{\varepsilon}) \to \infty$．$F(y) = 0$ のときは F を $F + \alpha$ ($\alpha > 0$, 十分小) で置き換える．

系 3.3　C を weak Hausdorff 空間 L の直線を含まない閉 convex 集合とする．$x_0 \in C$ の d-neighborhood の基本系は，

$$\{x \in C : |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon,\ \text{all } F \in C^+,\ F(x_0) = 1\}$$

$$= \{x \in C : |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon,\ \text{all } F \in C^+,\ 0 < F(x_0) \leq 1\}\ (\forall \varepsilon > 0)$$

によって与えられる．従って，d-topology は $\forall x_0 \in C$ に対して，$\{F \in C^+ ; F(x_0) = 1\}$ は同程度連続になる weakest topology である．

Choquet の定理　C が weak Hausdorff 空間 L の直線を含まない complete convex 集合ならば，L 上のすべての連続な affine 関数は C^+ の二つの関数の差である．[20].

この定理から次の事が従う．

定理 3.4 C を weak Hausdorff 空間 L の直線を含まない complete convex 集合とする。この時

i) part metric による topology は C の topology より強い。

ii) C は d-complete である。したがって、各 part も d-complete である。

次に、convex 集合 C は convex cone P（ただし頂点 $0\in P$）である特別の場合を考える事にする。このとき、定理 3.2 は次のようになる。

定理 3.5 L を weak Hausdorff 空間, P を直線を含まない L の closed convex cone で頂点 $0 \in P$ とする。また、P^+ を P 上で負にならない、L 上で連続な linear functional の全体とする。$\forall x, y \in P$ に対して、

$$d(x,y) = \sup\{\, |\log f(x) - \log f(y)| : f \in P^+,\ f(x)>0,\ f(y)>0 \,\}$$

注意. $x \sim y$ のとき, $f(x)>0$（または $f(y)>0$）と $f>0$ on $\Pi = \Pi(x)$ とは同値である。（補題 3.1）から,

$$\{\, x \in \Pi : |f(x) - f(y)| < \varepsilon,\ f \in P^+,\ 0 < f(x_0) \leq 1 \,\} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

は Π における x_0 の d-neighborhood の基本近傍系を作る。（系 3.3）

closed convex cone が直線を含むかどうかについては、次の判定法がある。

補題 3.6　Pを weak Hausdorff 空間の closed convex cone で、頂点 $0 \in P$ とする。

Pは直線を含まない $\Longleftrightarrow$ $P \cap (-P) = \{0\}$.

Pを頂点 $0 \in P$ である convex cone とする。KをPの convex な部分集合で、各 ray $\{rx : r > 0\}$, $x \in P$, $x \neq 0$ は Kとそれぞれ一点のみで必ず交わる時、KをPの section という。従って、

$P = \{rx : x \in K, r > 0\}$

定理 3.7　Pを weak Hausdorff 空間の convex cone で $P \cap (-P) = \{0\}$ とする。もしPは compact な section Kをもつならば、Pは d-complete である。

section Kをもつ、直線を含まない convex cone Pについては、Kの parts はPの parts とKとの交わりである。これは次の事から従う。

定理 3.8　$x, y \in K$ とする。

$[x,y]$ extends by r in K $\Longleftrightarrow$ $[x,y]$ extends by r in P

6°) Examples

1) $\mathbb{B}$ を compact Hausdorff 空間 X 上の function space とし、B の dual 空間を $B^* = L$ とする。L に topology $\sigma(L, B)$ を入れて $B = (B^*)^* = L^*$ と考える。

$P = \{F \in B^* : F \geq 0\}$ は convex cone であり、頂点 $0 \in P$ かつ $P \cap (-P) = \{0\}$ である。$K = \{F \in P : F(1) = 1\}$ は P の section で、weak topology $\sigma(L, L^*)$ で compact であるから、定理 7.7 から P, K は part metric d に関して complete である。

次に、$B = C_R(X)$ になった場合を考える。

2) compact Hausdorff 空間 X 上の実 Radon measures 全体からなる空間を $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}$ とする。

$B = C_R(X)$ とすると、$B^* = \mathcal{M}$。また $P = \mathcal{M}_+ = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu \geq 0\}$ で、$K = \{\mu \in P : \mu(X) = 1\}$。次に $\mathcal{M}_+$ との part と part metric を調べる。4) から、$\mathcal{M}_+ \ni \mu, \nu$ とすると

(i)…… $\mu \sim \nu \iff \exists \alpha > 0,\ \alpha\mu \geq \nu,\ \alpha\nu \geq \mu$

(但し、$\mu \neq 0$ または $\nu \neq 0$ ならば $\alpha \geq 1$)

(P によって入れた order $\mu \geq \nu$ は、すべての measurable 集合 E に対して $\mu(E) \geq \nu(E)$ を意味する。) 特に、zero measure はそれ自身で一つの part である。(i) から

$\mu \sim \nu \iff \mu \ll \nu,\ \ \nu \ll \mu,$ かつ $0 < L \leq \frac{d\mu}{d\nu}, \frac{d\nu}{d\mu} \leq M < \infty$
なる定数 K, M がある.

今 $\mathcal{M}_+ \ni \mu$ を一つ固定する.

$$P(\mu) = \{ g \in L^\infty(\mu) : g \text{ positive, bounded away from zero} \}$$

とすると, μ を通る part $\Pi(\mu)$ は

$$\Pi(\mu) = \{ g\mu : g \in P(\mu) \}$$

となる. 対応

$$P(\mu) \ni g \longrightarrow g\mu \in \Pi(\mu)$$

は, $P(\mu)$ から $\Pi(\mu)$ 上への one-one 対応である. g と $g\mu$ とを同一視する事によって, $L^\infty(\mu)$ metric を $\Pi(\mu)$ に移す事が出来る. この時, 次の事が成り立つ.

定理 3.9 $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ とする. $\mathcal{M}_+(X)$ の各 part における part metric d は P_μ の対応する関数上の $L^\infty(\mu)$-metric と同等な位相である. 即ち, $g_0, g_1, g_2, \cdots$ を P_μ の列とすると,

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g_0\| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} d(g_n\mu, g_0\mu) = 0$$

文献

[1] H.S. Bear: A geometric characterization of Gleason parts. Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 407–412.

[2] ——— : Continuous subparts for functions spaces. Fuction algebra (Proc. International symposium) (1965), 292 — 299.

[3] H. S. Bear and M. L. Weiss : An intrinsic metric for parts. Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 812 — 817.

[4] H. Bauer and H. S. Bear : the part metric in convex sets. Pacif. J. Math., 30 (1969), 15 — 33.

[5] H. S. Bear and B. Walsh ; Integral kernel for one-part function spaces, Pacif. J. Math., vol. 23 (1967), 209 — 215.

[6] E. Bishop ; Representing measures for points in a uniform algebra, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 121—122.

[7] A. Browder : Introduction to function algebras. Benjamin, New York, (1969).

[8] A. M. Gleason : Function algebras, Seminars on Analytic Functions II, Princeton, 1957

[9] K. Hoffman : Analytic functions and logmodular Banach algebras. Acta Math. 108 (1962).

[10] ——— Banach spaces of Analytic functions. Prentice Hall, 1962.

[11] G. Lumer: Analytic functions and Dirichlet problem, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964)

[12] ———: H^∞ and the imbedding of the classical H^p spaces in arbitrary ones. Function algebra (Proc. International symposium). (1965), 285—286.

[13] S. Merrill: H^p spaces derived from function algebras, Dissertation, Yale Univ., (1966).

[14] ———: Maximality of certain Algebras $H^\infty(m)$. Math. Zeitschr. 106 (1968), 261—266.

[15] N. Mochizuki: Function algebras の Gleason parts. 第五回, Functional analysis symposium, (1967) 東北大理.

[16] ———: Gleason parts の characterization. 第一回, Function algebras 共同研究会 (1967) 京都大数理解析研究所.

[17] 和田淳蔵: Abstract harmonic function と integral representation: 第二回, Function algebras 共同研究会 (1968), 京都大数理解析研究所.

[18] J. Wermer: Dirichlet algebras. Duke Math. J. 27 (1960), 273—282.

[19] ——— : Banach algebras and analytic functions. Advances in Math. I (1961), 51—102.

[20] G. Choquet: Ensembles et cônes convexes faiblement complets, C. R. Académie Science 254 (1962), 1908—1910; 2123—2125.