

|             |   |
|-------------|---|
| Title       | Locally-A Functions (関数論と関連する関数解析研究会報告集)  |
| Author(s)   | 鶴見, 和之  |
| Citation    | 数理解析研究所講究録 (1969), 79: 76-90  |
| Issue Date  | 1969-12   |
| URL         | <a href="http://hdl.handle.net/2433/108002">http://hdl.handle.net/2433/108002</a> |
| Right       |   |
| Type        | Departmental Bulletin Paper   |
| Textversion | publisher   |

## Locally- $A$ functions

東京電機大 鶴見 和之

### § 1. 序

単位元を持つ commutative Banach algebra  $A$  の spectrum  $\text{Spec}(A)$  上で定義された locally- $A$  function が globally- $A$  であるための条件を求めることがここでの目的である。

一般に, locally- $A$  function が globally- $A$  ではない (E. Kallin の例)。先ず combinatorially semiregular なる条件を与え, 最後に, Cartan の定理 B に基づく  $\text{Spec}(A)$  の cohomology groups  $H^q(\text{Spec}(A), \mathcal{H}(\text{Spec}(A))) = 0$  ( $q \geq 1$ ) を示し, これより locally- $A$  が globally- $A$  である条件を示す。

### § 2. Combinatorially semiregularity.

$A$  を単位元を持つ commutative Banach algebra とし,  $\text{Spec}(A)$  を  $A$  の spectrum とする。  $\forall a \in A, \xi \in \text{Spec}(A)$  に対して,  $\hat{a}$  を

$\hat{a}(\xi) := \xi(a)$  により定義する,  $\forall a \in A$  に対し,  $S(a) :=$

$\overline{\{\xi \in \text{Spec}(A) \mid \hat{a}(\xi) \neq 0\}}$  と定義する,

$\forall E \subset \text{Spec}(A)$  に対し, hull-kernel topology の closure を regular closure とする.  $E: \text{regular closed} \iff E = E$  の regular closure.  $A$  が regular  $\iff \forall$  closed set in  $\text{Spec}(A)$  が regular closed.

Banach algebra  $B$  が almost regular

$\iff$  (1)  $B$ : commutative で単位元  $E$  持つ,

(2)  $\forall a \in B$  に対し, closed set  $S(a)$  が regular closed.

明らかに,  $A: \text{regular} \Rightarrow A: \text{almost regular}$ .

$\text{Spec}(A)$  上の複素数値関数  $f$  が locally -A

$\iff \forall \xi \in \text{Spec}(A)$  に対し, 次の様な  $a \in A$  が存在する, 即ち

$\hat{a} = f$  in nbd of  $\xi$ .

$A$ : sectionally complete

$\iff \forall$  locally -A function が globally -A である.

locally -A function は連続関数で Rossi の maximum modulus principle により Šilov 境界上で最大値  $\Sigma$  とる.

sectionally complete で  $\bar{A}$  commutative Banach algebra が存在する (E. Kallin の例).

$$Z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4.$$

$$X_1 := \{z \in \mathbb{C}^4 \mid z_1 z_2 = 2, 1 \leq |z_1| \leq 2, z_3 = z_4 = 0\}$$

$$X_2 := \{z \in \mathbb{C}^+ \mid z_1 z_2 = 2, |z_1| = 1, |z_3| \leq 1, z_4 = 0\},$$

$$X_3 := \{z \in \mathbb{C}^+ \mid z_1 z_2 = 2, |z_1| = 2, |z_3| \leq 1, z_4 = z_3^2\}.$$

$X := X_1 \cup X_2 \cup X_3$  とし,  $A$  を  $X$  上で多項式により生成された uniform algebra とする.  $z_1 = t, z_2 = 2/t, z_3 = w,$   
 $z_4 = \begin{cases} 0 & : X_1 \cup X_2 \\ w^2 & : X_3 \end{cases}$  と書くと,  $A$  は  $t, 1/t, w, \{w^2\}$  により生成された algebra と考へることが出来る.

$X$  は polynomially convex であり, 更に

$$g := \begin{cases} 0 & : X_1 \cup X_2 \\ w & : X_3 \end{cases}$$

とおくと  $g$  は locally- $A$  であるが  $g \notin A$ . よって  $A$  は sectionally complete ではない.

Banach algebra  $B$  が combinatorially semiregular

$\iff$  (1)  $B$ : 単位元  $\neq$  持つ commutative Banach algebra

(2)  $a_1, \dots, a_n \in A, f: \text{locally-}A \text{ function}$  が与えられ

$\{f = \hat{a}_i\}$  の内点から  $\text{Spec}(A)$  を cover するならば, 次の様な

$\text{Spec}(A)$  を cover する regular closed sets  $F_1, \dots, F_n$  と

regular open sets  $W_1, \dots, W_n$  が存在する, 即ち

$$F_i \subset W_i \subset \{f = \hat{a}_i\},$$

但し,  $\{f = \hat{a}_i\} := \{z \in \text{Spec}(A) \mid f(z) = \hat{a}_i(z)\}.$

明らかに, regular algebra は combinatorially semiregular.

### 定理 1.

$A$ : combinatorially semiregular  $\Rightarrow A$ : sectionally complete.

証明.  $f: \text{Spec}(A)$  上で定義された locally- $A$  function とする.  
 $\text{Spec}(A)$  は compact であるから, 次の様な  $a_1, \dots, a_n \in A$  が存在する, 即ち  $\{f = \hat{a}_i\}$  の内点  $\hat{a}_i$  が  $\text{Spec}(A)$  を cover する. 又  $A$  が combinatorially semiregular であるから, 定義の条件を満足する  $F_1, \dots, F_n$  及び  $W_1, \dots, W_n$  が存在する. 今  $E_i := C(W_i)$  ( $W_i$  の complement) とすると  $E_i, F_i$  は regularly closed である.  
 $J := \hat{a} = 0$  on  $E_i \cup F_i$  なる  $a$  の closed ideal ( $= \cap (E_i \cap F_i = \emptyset)$ )

$Q := A/J$  : Banach algebra であり,  $E_i \cup F_i$  に応ずる  $\text{Spec}(Q)$  が存在する.

$\check{S}ilov$  の定理により, 次の様な  $g \in Q$  が存在する, 即ち  $\hat{g} = 1$  on  $F_i, \hat{g} = 0$  on  $E_i$ .  $u_i$  を  $A$  にもとめて, 次の様な  $u_i \in A$  がとれる, 即ち  $\hat{u}_i = 1$  on  $F_i, \hat{u}_i = 0$  on  $E_i$ .  $v_i := 1 - u_i$  とおくと

$$1 = u_1 + v_1 = u_1 + v_1(u_2 + v_2) = u_1 + v_1 u_2 + v_1 v_2 = \dots \\ = u_1 + v_1 u_2 + \dots + v_1 \dots v_{n-1} u_n + v_1 v_2 \dots v_n,$$

$v_1 \dots v_n = 0$  on  $\text{Spec}(A)$  である. 今

$$a := u_1 a_1 + v_1 u_2 a_2 + \dots + v_1 \dots v_{n-1} u_n a_n \quad \text{とおくと,}$$

$$\hat{a} = f \quad \text{である.}$$

次に almost regular についてはこの  $\hat{a}$  が成り立つ.

定理 2.

$A$ : almost regular,  $a_1, a_2 \in A$ ,  $f$  は次の様なものとする, 即ち  $\{f = \hat{a}_1\}, \{f = \hat{a}_2\}$  の内点から  $\text{Spec}(A)$  を cover する.  
 $\Rightarrow$  或る  $a \in A$  に対して,  $f = \hat{a}$ .

証明.  $d := a_1 - a_2$  とする.  $S(d)$  は regularly closed である. 前定理と同様に,  $J \in \mathcal{I}$  とし,  $Q = A/J$  に対して  $\text{Spec}(Q)$  をとる.  $\mathcal{I} = \mathcal{I}$  とし  $S(d) = S(f - a_1) \cup S(f - a_2)$  である.  $S(f - a_1), S(f - a_2)$  は各々 compact で交わらない, 故に次の様な  $g \in Q$  を見つかることが出来る, 即ち  $\hat{g} = 1$  on  $S(f - a_1)$ ,  $\hat{g} = 0$  on  $S(f - a_2)$ .  $u \in A$  にもとめて次の様な  $u \in A$  を見つかることが出来る, 即ち  $\hat{u} = 1$  on  $S(f - a_1)$ ,  $\hat{u} = 0$  on  $S(f - a_2)$ .  $\therefore a := (1 - u)a_1 + ua_2$  とおけば  $\hat{a} = f$ .

$\text{loc } A$ : algebra of locally  $A$  functions on  $\text{Spec}(A)$ .  $u \in A$  の pull とする

$\text{loc } A$  が regular ならば,  $A$  は combinatorially semiregular である. よって次の事が成り立つ:

$A$  の pull が regular function algebra on  $\text{Spec}(A)$  ならば,  $A$  と  $A$  の pull とは一致する.

次に, 定理 1 は  $A$  の ideal に対しても成り立つ.

$J$ :  $A$  の ideal

$\text{Spec}(A)$  上の函数  $f$  が 実  $\mathcal{X} \in \text{Spec}(A)$  で 局所的に  $J$  に属する

$\Leftrightarrow$  次の様だ  $b \in J$  が存在する, 即ち,  $f = \hat{b}$  in nbd of  $\mathcal{X}$ .

$f$  が  $\text{Spec}(A)$  上で局所的に  $J$  に属する  $\Leftrightarrow f$  が 各 実  $\mathcal{X} \in$

$\text{Spec}(A)$  で局所的に  $J$  に属する.

定理 3.

$A$ : combinatorially semiregular,  $\text{Spec}(A)$  上の函数  $f$  が局所的に  $J$  に属する

$\Rightarrow$  或る  $a \in J$  に対して,  $f = \hat{a}$ .

証明は定理 1 と同様

§ 3. A sheaf of germs of holomorphic functions on a linear topological space.

$E$ : topological linear space.

$\phi: E \longrightarrow \mathbb{C}^n$ : linear continuous mapping.

$\tilde{f}: \mathbb{C}^n$  の 或る open set 上で正則な函数.

$\tilde{f} \circ \phi$  を  $E$  上で正則な函数 とし, これらの函数の族を  $H(E)$  と書く.

$\forall f \in H(E)$  は次の様に考へる ことが出来る

$E = E_0 + E_1$  と直和で表す,  $E_1$  は  $E$  の有限次元部分空間.  $E_1$  の 或る open set  $W$  上で正則な函数  $f_0$  をとり

$$f(x_0 + x_1) = f_0(x_1), \quad x_0 \in E_0, \quad x_1 \in W.$$

函数論に於ては次の事が成り立つ:  $E = \mathbb{C}^n$ ,  $f, g \in H(E)$   
 $f = g$  on some open set, ならば,  $f$  と  $g$  とは共通の extension  
 $h \in H(E)$  を持つ. この事により次の事が成り立つ

命題 4.

$f, g \in H(E)$ ,  $U, V$ : open subsets of  $E$ ,  $U \cap V \neq \emptyset$ .

$$f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$$

$$\Rightarrow \exists h \in H(E), \text{ 但し } h|_U = f|_U, \quad h|_V = g|_V.$$

$f, g \in H(E)$ ,  $x \in E$  が 2 つの函数の定義域に属するとす  
 $f \equiv g \Leftrightarrow f - g = 0$  in nbd of  $x$  と定義すると,  $\equiv$  は  $x \in E$   
 を含む定義域を持つ  $H(E)$  の向の同値関係になる.  $f$  を含む類を  
 $[f]_x$  と書き,  $\mathcal{H}(x) := \cup [f]_x$  とおくと,  $\mathcal{H}(x)$  は algebra であ  
 る.  $\mathcal{H}(E) := \cup_{x \in E} \mathcal{H}(x)$  とおくと,  $\forall f \in H(E)$ ,  $x \in E$  に対して  
 $[f]_x$  は  $x$  の近傍  $U$  で定義された函数  $f \in H(E)$  により定義さ  
 れる,  $\cup_{y \in U} [f]_y$  を  $[f]_x$  の近傍と定義すると  $\mathcal{H}(E)$  は位相空間に  
 なる.  $\forall f \in H(E)$ ,  $V \subset E$  に対して  $[f]_V$  を次の様に定義す  
 る

$$[f]_V: V \cap \text{domain}(f) \longrightarrow \mathcal{H}(E).$$

これは  $x$  を  $[f]_x$  に写す.

mapping  $\pi: \mathcal{H}(E) \longrightarrow E$  を  $\pi([f]_x) = x$  と定義すると  $\pi$   
 は local homeomorphism である. よって  $\mathcal{H}(E)$  は sheaf



of algebras  $\pi$  is projection.  $[f]_V$  is section of  $V$  above  $V$ .

compact set 上の sections に対して次の事が成り立つ。

定理 5.

$K$  を  $E$  の compact set とし,  $\sigma: K \rightarrow H(E)$  を 次の連続写像とする ( $K$  上の section) 即ち,  $\pi(\sigma(x)) = x$ , for  $x \in K$ .

$\Rightarrow$  次の様な  $h \in H(E)$  と nbd  $W$  of  $K$  とが存在する, 即ち  $\sigma$  は  $[h]_W$  と一致する。

証明.  $x \in K$  とすると, 次の様な  $f_x \in H(E)$  が存在する, 即ち  $\sigma$  が  $[f_x]_{V \cap K}$  for nbd  $V_x$  of  $x$  in  $E$  とする。  $K$  は compact であるから, 有限個の  $x_1, \dots, x_n$  がこれ ( $f_i := f_{x_i}$ ,  $V_i := V_{x_i}$  とおく)  $V_1, \dots, V_n$  が  $K$  を cover する。今  $x \in \overline{V_i} \cap \overline{V_j} \cap K$  とすると,  $\sigma(x) = [f_i]_x = [f_j]_x$ . しかば  $f_i$  と  $f_j$  とが  $x$  の或る近傍  $W_i$  で一致する事がある。 次の様な closed set  $T_{ij}$  が存在する, 即ち  $\{y \in E \mid [f_i]_y \neq [f_j]_y\} \subset T_{ij}$ ,  $T_{ij} \cap K = \emptyset$ . 今  $T := \cup T_{ij}$ ,  $W_i = V_i - T_{ij}$  とおくと  $\cup W_i \supset K$ . 更に  $f_i|_{W_i \cap W_j} = f_j|_{W_i \cap W_j}$ , よって前命題 4 により, 次の様な  $h \in H(E)$  が得られる, 即ち  $h|_{W_i} = f_i|_{W_i}$ , 故に  $W := W_1 \cup \dots \cup W_n$  とすれば, この  $h$ ,  $W \ni$  とればよい。

## § 4. Cohomology groups and locally-A functions

$B$ : Banach space,  $B'$ : dual space of  $B$  (weak topology  $\varepsilon$  入れておく). 前節の  $E$  の役割を  $B'$  が演ずる.  $f \in H(B)$  は次のものである,

$$f(x) = \tilde{f}(x(a_1), \dots, x(a_n)) \quad x \in B,$$

ここで  $\tilde{f}$  は  $\mathbb{C}^m$  の 或る open set 上で正則な函数,  $a_i \in B$ .

commutative Banach algebra with unit  $A$  に対して,  $\text{Spec}(A)$  は  $A'$  の compact subset であり,  $\mathcal{H}(\text{Spec}(A))$  を sheaf induced on  $\text{Spec}(A)$  by  $\mathcal{H}(A')$  とする. この sheaf の元は同値類  $[f]_x$   $x \in \text{Spec}(A)$  である. 先ず次の定理を示す.

定理 6.

cohomology groups  $H^q(\text{Spec}(A), \mathcal{H}(\text{Spec}(A))) = 0$  for  $q \geq 1$ .

証明.

Cartan の定理 B に基づいてこれを示す.

$H^q(\text{Spec}(A), \mathcal{H}(\text{Spec}(A))) \neq 0$  とする, そうすると  $\text{Spec}(A)$  の finite covering  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$  がとれ, 次の homomorphism で 0 に写らぬ  $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{H}(\text{Spec}(A)))$  の non-trivial な元  $\sigma$  が存在する, 即ち homomorphism

$$(1) \quad H^q(\mathcal{U}, \mathcal{H}(\text{Spec}(A))) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}, \mathcal{H}(\text{Spec}(A))).$$

は  $\mathcal{U}$  の 細分  $\mathcal{V}$  により induce されたもので, この元  $\sigma$  は  $\mathcal{U}$  の  $q+1$  個の intersection  $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}$  上の  $\mathcal{H}(\text{Spec}(A))$  の section  $\sigma_{\mathcal{U}}$ .

$\mathcal{U}$  を covering  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ ,  $\overline{V_i} \subset U_i$  により細分する。

すなわち, section  $\sigma_{\mathcal{U}}$  の  $\overline{V_{i_0}} \cap \dots \cap \overline{V_{i_g}}$  の制限は, 定理5により  $A'$  の open set  $D_{i_0 \dots i_g}$  で正則な函数  $f_{i_0 \dots i_g}$  によって表わされる。

但し  $D_{i_0 \dots i_g} \cap \text{Spec}(A) \subset U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_g}$ .

$D_{i_1 \dots i_{g+1}} \cap D_{i_0 i_2 \dots i_{g+1}} \cap \dots \cap D_{i_0 \dots i_g} \cap \Delta$  上で次の関係が成り立つ

$$(2) \quad f_{i_1 i_2 \dots i_{g+1}} - f_{i_0 i_2 \dots i_{g+1}} + \dots + (-1)^{g+1} f_{i_0 \dots i_g} = 0$$

集合  $D_{i_0 \dots i_g}$  は (2) の形の集合上で成り立つ様に選べる, 即ち

$$D_{i_1 \dots i_{g+1}} \cap \dots \cap D_{i_0 \dots i_g}$$

次の形が成り立つ

$$\overline{V_{i_0}} \cap \dots \cap \overline{V_{i_g}} \subset D_{i_0 \dots i_g}$$

次の様な  $A'$  における 0 の近傍  $V$  がとれる

$$(\overline{V_{i_0}} + V) \cap \dots \cap (\overline{V_{i_g}} + V) \subset D_{i_0 \dots i_g}$$

集合  $(\overline{V_i} + V)$  は open in  $A'$  で, その union は  $\text{Spec}(A)$  を含む。

次の形の集合を考える

$$(3) \quad \{x \mid |x(a_i) - \lambda| < \varepsilon, a_i \in A, i=1, \dots, r\}.$$

weak topology で, (3) の形の近傍基が存在して,  $\text{Spec}(A)$  は

compact であるから, 次の性質を持つ open sets  $W_1, \dots, W_n$  が

存在する。

(4) 各  $W_i$  は (3) の形の集合の有限個の union

(5)  $W_{i_0} \cap \dots \cap W_{i_g} \subset \text{domain}(f_{i_0 \dots i_g})$  for  $\forall (g+1)$ -tuple  $(i_0, \dots, i_g)$

$$(1 \leq i_j \leq n)$$

(6)  $W_{i_1, \dots, i_{g+1}} \cap \dots \cap W_{i_0, \dots, i_g}$  上 (2) の関係式が成り立つ.

(7)  $\text{Spec}(A) \subset W_1 \cup \dots \cup W_n$ .

今次の様な linearly independent な元の組  $\{a_1, \dots, a_m\}$  をとる, 即ち, これらの元は (4) に含まれる全ての元を linearly に generate する十分な数の元であり,  $h_{i_0, \dots, i_g}$  はこれらの元と有限次元の空間の正則函数により表わされる.

$$\phi_m(x) := (x(a_1), \dots, x(a_m)) \quad \text{とおく, } x \in A'$$

から  $\mathbb{C}^m$  の線形連続写像がある. 更に

$$(8) \quad \Omega_i := \phi_m(W_i) \quad (i=1, \dots, n)$$

は open で,

$$(9) \quad h_{i_0, \dots, i_g} = \tilde{h}_{i_0, \dots, i_g} \circ \phi_m$$

==  $\tilde{h}_{i_0, \dots, i_g}$  は  $\Omega_{i_0} \cap \dots \cap \Omega_{i_g}$  で正則な函数で

$$(10) \quad \tilde{h}_{i_1, \dots, i_{g+1}} - \tilde{h}_{i_0, i_2, \dots, i_{g+1}} + \dots = 0 \quad \text{on } \Omega_{i_0} \cap \dots \cap \Omega_{i_{g+1}}$$

$$(11) \quad \phi_m(\text{Spec}(A)) \subset \Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n,$$

で  $\phi_m(\text{Spec}(A))$  は joint spectrum  $\sigma(a_1, \dots, a_m; A)$  である. 故

に  $\Omega$  は  $\sigma(a_1, \dots, a_m; A)$  の直像である. よって次の様な元

$a_{m+1}, \dots, a_n$  を見つければ, 即ち  $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_m)$  を  $a_1, \dots, a_n$

による生成された algebra とし, projection  $p: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  を

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad \text{とすると}$$

$$\sigma' := \sigma(a_1, \dots, a_n; \mathbb{C}(a_1, \dots, a_n)) \subset p^{-1}(\Omega)$$

$\phi_n: A' \rightarrow \mathbb{C}^n$  を  $\phi_n(x) := (x(a_1), \dots, x(a_n))$  と定義すると

$$\phi_n(\text{Spec}(A)) \subset \sigma'$$

$\tilde{g}_{i_0 \dots i_g} := \tilde{r}_{i_0 \dots i_g} \circ \rho$ ,  $\Delta_{i_j} := \rho^{-1}(\Omega_{i_j})$  とおくと, 性質 (9), (10) は  $\tilde{r}, \Omega, m, \in \tilde{g}, \Lambda, n$ , におまかえても成り立つ. 又

$$\sigma' \subset \Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n.$$

$\sigma'$  は polynomially convex であるから, 次の様な  $\sigma'$  の近傍  $S$  がとれる, 即ち,

$$S = \{ |p_1| < 1, \dots, |p_n| < 1 \}, \quad p_i: \text{多項式}$$

と  $S \subset \Lambda$ .  $S$  は Stein manifold であるから, Cartan の定理

B が適用出来て  $H^q(S, \mathcal{H}(S)) = 0$  ( $q \geq 1$ ). 函数  $\tilde{g}_{i_0 \dots i_g}$  は  $\Lambda_1, \dots$

$\dots \Lambda_n$  により induce された  $g$ -cochain  $\varepsilon$  を定義する.  $m, \Lambda,$

$g$  に (10) を適用して, この cochain は cocycle である. covering

$\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$  の或る細分  $\{M_\beta\}$  に対して,  $\forall \{\beta_1, \dots, \beta_g\}$  に対

して, 次の様な正則函数  $w_{\beta_1 \dots \beta_g}$  on  $M_{\beta_1 \dots \beta_g} := M_{\beta_1} \cap \dots \cap M_{\beta_g}$

がとれる, 即ち,  $M_{\beta_j} \subset \Delta_{i_j}$  ( $j=0, \dots, g+1$ ) ならば

$$\tilde{g}_{i_0 \dots i_g} = w_{\beta_1 \dots \beta_g} - w_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_g} + \dots \quad \text{on } M_{\beta_0 \dots \beta_{g+1}}$$

これより  $\phi_n$  を用いて,  $A'$  における正則函数  $w \circ \phi_n$  と covering

$\phi_n^{-1}(M_\beta)$  がとれ,  $\phi_n^{-1}(M_\beta)$  は  $\sigma'$  の細分で,  $w$  と  $g$  との関係に

より,  $\sigma$  は cohomology class 0 に入る.

$Z$ :  $x \in \text{Spec}(A)$  の近傍で 0 に値する関数の germ からなる  $\mathcal{H}(\text{Spec}(A))$  の subsheaf.

次の exact sequence を得る

$$(A) \quad 0 \longrightarrow Z \longrightarrow \mathcal{H}(\text{Spec}(A)) \longrightarrow \mathcal{H}(\text{Spec}(A))/Z \longrightarrow 0$$

これより exact sequence が得られる.

$$(B) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\text{Spec}(A), Z) & \xrightarrow{i} & H^0(\text{Spec}(A), \mathcal{H}(\text{Spec}(A))) & & \\ & & \downarrow q & & \downarrow \gamma & & \\ & & H^0(\text{Spec}(A), \mathcal{H}(\text{Spec}(A))/Z) & \xrightarrow{\gamma} & H^1(\text{Spec}(A), Z) & & \\ & & & & \longrightarrow & 0 & \end{array}$$

次の命題を得る

### 命題 7

locally- $A$  function は本質的には次のものの元である,

$$H^0(\text{Spec}(A), \mathcal{H}(\text{Spec}(A))/Z).$$

(証明)  $f \in$  locally- $A$  function とすると, 次の様な元  $a_1, \dots, a_n \in A$  と open sets  $U_1, \dots, U_n$  が存在する, 即ち  $f(x) = \hat{a}_i(x)$   $x \in U_i \cap \text{Spec}(A)$  かつ  $\hat{a}_i = \hat{a}_j$  on  $U_i \cap U_j \cap \text{Spec}(A)$ . 故に  $[a_i]_x - [a_j]_x \in Z$   $x \in U_i \cap U_j \cap \text{Spec}(A)$ .

又  $H^1(\text{Spec}(A), Z) = 0$  ならば, (B) により  $q$  は onto である.

かくして, 次の様な  $\text{Spec}(A)$  の近傍で定義された正則函数  $g$  が存在する, 即ち  $[g]_x - [\hat{a}_i]_x \in Z$  for  $x \in U_i \cap \text{Spec}(A)$ .

よって  $g(x) = f(x)$  for  $x \in \text{Spec}(A)$ .

よって次の定理を得る.

定理 8.

$$H^1(\text{Spec}(A), \mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow A: \text{sectionally complete}$$

又次の事は明らか.

定理 9.

$H^0(\text{Spec}(A), \mathcal{K}(\text{Spec}(A))/\mathbb{Z})$  は次の様に  $\text{Spec}(A)$  上で定義された関数  $f$  の族と  $1-1$  の対応がつかう, 即ち  $\forall x_0 \in \text{Spec}(A)$  に対して, 元  $a_1, \dots, a_n \in A$  と  $\mathbb{C}^m$  上の正則な函数  $\tilde{f}$  がとれて,  $x_0$  の近傍で

$$f(x) = \tilde{f}(x(a_1), \dots, x(a_n)).$$

## 文 献

- [1] R. Arens : The problem of locally- $A$  functions in a commutative Banach algebra  $A$ , *Trans. A.M.S.*, 104(1962) 24 — 36
- [2] — : A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disk, *Trans. A.M.S.* 81(1956) 501—513,
- [3] R. Arens and A. P. Calderon : Analytic functions of several Banach algebra elements, *Ann. of Math.*, 62 (1955) 204—216.
- [4] *Seminaire H. Cartan (1967) Benjamin.*
- [5] A. Guichardet : *Special topics in topological algebras*, Gordon and Breach (1968).
- [6] R. C. Gunning and H. Rossi : *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall (1965).
- [7] 一松信 : 多変数解析函数論
- [8] C. E. Rickart : *General theory of Banach algebras*, Van Nostrand (1960)
- [9] A. Browder : *Introduction to function algebras*, Benjamin (1969).
- [10] E. Kallin : A nonlocal function algebra, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 49 (1963) 821 — 824.