数理解析研究所講究録
79巻 1969年 76-90

Locally-A functions

東京電機大　　鶴見和之

§1. 序

単位元を持つ commutative Banach algebra A の spectrum Spec(A)上で定義された locally-A function が globally-A であるための条件を求めることがここでの目的である。

一般に, locally-A function が globally-A ではない（E. Kallin の例）. 先ず combinatorially semiregular なる条件を与え, 最後に, Cartan の定理Bに基づく Spec(A) の cohomology groups $H^q(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A))) = 0$ $(q \geqq 1)$ を示し, これより locally-A が globally-A である条件を示す。

§2. Combinatorially semiregularity.

A を単位元を持つ commutative Banach algebra とし, Spec(A) を A の spectrum とする. $\forall a \in A$, $\xi \in \mathrm{Spec}(A)$ に対して, $\hat{a}$ を

$\hat{a}(\xi) := \xi(a)$ により定義する。$\forall a \in A$ に対して、$S(a) :=$
$\overline{\{\xi \in \mathrm{Spec}(A) \mid \hat{a}(\xi) \neq 0\}}$ と定義する。

$\forall E \subset \mathrm{Spec}(A)$ に対して、hull-kernel topology での closure を
<u>regular closure</u> という。E : <u>regular closed</u> $\Longleftrightarrow$ $E = E$ の regular closure. A が <u>regular</u> $\Longleftrightarrow$ $\forall$ closed set in $\mathrm{Spec}(A)$ が regular closed.

Banach algebra B が <u>almost regular</u>
$\Longleftrightarrow$ (1) B : commutative で単位元を持つ,

(2) $\forall a \in B$ に対して, closed set $S(a)$ が regular closed.

明らかに, A : regular $\Rightarrow$ A : almost regular.

$\mathrm{Spec}(A)$ 上の複素数値函数 f が <u>locally-A</u>
$\Longleftrightarrow$ $\forall \zeta \in \mathrm{Spec}(A)$ に対して, 次の様な $a \in A$ が存在する, 即ち
$\hat{a} = f$ in nbd of ζ.

A : <u>sectionally complete</u>
$\Longleftrightarrow$ $\forall$locally-A function が globally-A である.

locally-A function は連続函数で Rossi の maximum modulus principle により Šilov 境界上で最大値をとる.

sectionally complete でない commutative Banach algebra が存在する (E. Kallin の例).

$z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$.

$X_1 := \{ z \in \mathbb{C}^4 \mid z_1 z_2 = 2,\ 1 \le |z_1| \le 2,\ z_3 = z_4 = 0 \}$

$X_2 := \{ z \in \mathbb{C}^4 \mid z_1 z_2 = 2,\ |z_1| = 1,\ |z_3| \leq 1,\ z_4 = 0 \}$,

$X_3 := \{ z \in \mathbb{C}^4 \mid z_1 z_2 = 2,\ |z_1| = 2,\ |z_3| \leq 1,\ z_4 = z_3^2 \}$.

$X := X_1 \cup X_2 \cup X_3$ とし，A を X 上で多項式により生成された uniform algebra とする。$z_1 = t$, $z_2 = 2/t$, $z_3 = w$,
$z_4 = \begin{cases} 0 & : X_1 \cup X_2 \\ w^2 & : X_3 \end{cases}$ と書くと，A は t, $1/t$, w, $\begin{cases} 0 \\ w^2 \end{cases}$ によって生成された algebra と考えることが出来る。

X は polynomially convex であり，更に

$$g := \begin{cases} 0 & : X_1 \cup X_2 \\ w & : X_3 \end{cases}$$

とおくと g は locally-A であるが $g \notin A$. よって A は sectionally complete ではない。

Banach algebra B が <u>combinatorially semiregular</u>

$\Longleftrightarrow$ (1) B：単位元を持つ commutative Banach algebra

(2) $a_1, \cdots a_n \in A$, f : locally-A function が与えられ $\{f = \hat{a}_i\}$ の内点が Spec(A) を cover するならば，次の様な Spec(A) を cover する regular closed sets $F_1, \cdots, F_n$ と regular open sets $W_1, \cdots, W_n$ が存在する，即ち

$$F_i \subset W_i \subset \{ f = \hat{a}_i \},$$

但し，$\{f = \hat{a}_i\} := \{ \zeta \in \mathrm{Spec}(A) \mid f(\zeta) = \hat{a}_i(\zeta) \}$.

明らかに，regular algebra は combinatorially semiregular.

<u>定理 1.</u>

A : combinatorially semiregular $\Rightarrow$ A : sectionally complete.

証明. f : Spec(A) 上で定義された locally-A function とする。Spec(A) は compact であるから, 次の様な $a_1, \cdots a_n \in A$ が存在する, 即ち $\{f = \hat{a}_i\}$ の内点が Spec(A) を cover する. 又 A が combinatorially semiregular であるから, 定義の条件を満す $F_1, \cdots, F_n$ 及び $W_1, \cdots, W_n$ が存在する. 今 $E_i := C(W_i)$ (W_i の complement) とすると E_i, F_i は regularly closed である.

J : $\hat{a} = 0$ on $E_i \cup F_i$ なる a の closed ideal (ここで $E_i \cap F_i = \phi$)

$Q := A/J$: Banach algebra で, $E_i \cup F_i$ に応ずる Spec(Q) が存在する.

Šilov の定理により, 次の様な $q \in Q$ が存在する, 即ち $\hat{q} = 1$ on F_i, $\hat{q} = 0$ on E_i. これを A にもどして次の様な $u_i \in A$ がとれる, 即ち $\hat{u}_i = 1$ on F_i, $\hat{u}_i = 0$ on E_i. そこで $v_i := 1 - u_i$ とおくと

$$1 = u_1 + v_1 = u_1 + v_1(u_2 + v_2) = u_1 + v_1 u_2 + v_1 v_2 = \cdots$$
$$= u_1 + v_1 u_2 + \cdots + v_1 \cdots v_{n-1} u_n + v_1 v_2 \cdots v_n .$$

ここで $\widehat{v_1 \cdots v_n} = 0$ on Spec(A) である. 今

$a := u_1 a_1 + v_1 u_2 a_2 + \cdots + v_1 \cdots v_{n-1} u_n a_n$ とおくと,

$\hat{a} = f$ である.

次に almost regular については次の事が成り立つ.

定理 2.

A: almost regular, $a_1, a_2 \in A$, fは次の様なものとする,即ち $\{f = \hat{a}_1\}$, $\{f = \hat{a}_2\}$の内点が $Spec(A)$ を coverする.
$\Rightarrow$ 或る $a \in A$ に対して, $f = \hat{a}$.

証明. $d := a_1 - a_2$ とする. $S(d)$ は regularly closed である. 前定理と同様に, J をとり, $Q = A/J$ に対して $Spec(Q)$ をとる. ところで $S(d) = S(f - a_1) \cup S(f - a_2)$ で $S(f-a_1)$, $S(f-a_2)$ は各々 compact で交わらない, 故に次の様な $q \in Q$ をみつけることが出来る, 即ち $\hat{q} = 1$ on $S(f-a_1)$, $\hat{q} = 0$ on $S(f-a_2)$. これを A にもどして次の様な $u \in A$ を見つけることが出来る, 即ち $\hat{u} = 1$ on $S(f - a_1)$, $\hat{u} = 0$ on $S(f - a_2)$. ここで $a := (1-u)a_1 + u a_2$ とおけば $\hat{a} = f$.

loc A: algebra of locally-A functions on $Spec(A)$. これを A の hull という

loc A が regular ならば, A は combinatorially semiregular である. よって次の事が成り立つ:

A の hull が regular function algebra on $Spec(A)$ ならば, A と A の hull とは一致する.

次に, 定理 1 は A の ideal に対しても成り立つ.

J： Aの ideal

Spec(A) 上の函数 f が点 $x \in$ Spec(A) で局所的に J に属する

$\Longleftrightarrow$ 次の様な $b \in J$ が存在する，即ち，$f = \hat{b}$ in nbd of x.

f が Spec(A) 上で局所的に J に属する $\Longleftrightarrow$ f が各点 $x \in$ Spec(A) で局所的に J に属する.

定理 3.

A： combinatorially semiregular，Spec(A) 上の函数 f が局所的に J に属する

$\Rightarrow$ 或る $a \in J$ に対して，　$f = \hat{a}$.

証明は定理 1 と同様

§ 3.　A sheaf of germs of holomorphic functions on a linear topological space.

E： topological linear space.

ϕ： $E \longrightarrow \mathbb{C}^n$ ： linear continuous mapping.

$\tilde{f}$ ： $\mathbb{C}^n$ の或る open set 上で正則な函数.

$\tilde{f} \circ \phi$ を E 上で正則な函数といい，これらの函数の族を H(E) と書く.

${}^{\forall} f \in H(E)$ は次の様に考えることが出来る

$E = E_0 + E_1$ と直和で表す，ここで E_1 は E の有限次元部分空間．そして E_1 の或る open set W で正則な函数 f_0 をとり

$$f(x_0 + x_1) = f_0(x_1), \quad x_0 \in E_0, \quad x_1 \in W.$$

函数論に於ては次の事が成り立つ： $E = \mathbb{C}^n$, $^\forall f, g \in H(E)$ $f = g$ on some open set, ならば, f と g とは共通の extension $h \in H(E)$ を持つ. この事により次の事が成り立つ

命題 4.

$f, g \in H(E)$, U, V : open subsets of E, $U \cap V \neq \phi$.

$f|_{U\cap V} = g|_{U \cap V}$

$\Rightarrow \exists h \in H(E)$, 但し $h|_U = f|_U$, $h|_V = g|_V$.

$f, g \in H(E)$, $x \in E$ が2つの函数の定義域に属するとす $f \equiv g \Leftrightarrow f - g = 0$ in nbd of x と定義すると, $\equiv$ は x を含む定義域を持つ $H(E)$ の間の同値関係になる. f を含む類を $[f]_x$ と書き, $\mathcal{H}(x) := \bigcup [f]_x$ とおく, $\mathcal{H}(x)$ は algebra である. $\mathcal{H}(E) := \bigcup_{x \in E} \mathcal{H}(x)$ とおく. $\forall f \in H(E)$, $x \in E$ に対して $[f]_x$ は x の近傍 U で定義された函数 $f \in H(E)$ により定義される, $\bigcup_{y \in U} [f]_y$ を $[f]_x$ の近傍と定義すると $\mathcal{H}(E)$ は位相空間になる. $\forall f \in H(E)$, $V < E$ に対して $[f]_V$ を次の様に定義する

$$[f]_V : V \cap \mathrm{domain}(f) \longrightarrow \mathcal{H}(E).$$

これは x を $[f]_x$ に写す.

mapping $\pi : \mathcal{H}(E) \longrightarrow E$ を $\pi([f]_x) = x$ と定義すると π は local homeomorphism である. よって $\mathcal{H}(E)$ は <u>sheaf</u>

of algebras で π は projection である. $[f]_V$ は V 上の section である.

compact set 上の sections に対して次の事が成り立つ.

<u>定理5.</u>

K を E の compact set とし, $\sigma: K \longrightarrow \mathcal{H}(E)$ を次の連続写像とする (K 上の section) 即ち, $\pi(\sigma(x)) = x$, for $x \in K$.

$\Rightarrow$ 次の様な $h \in H(E)$ と nbd W of K とが存在する, 即ち σ は $[h]_W$ と一致する.

<u>証明.</u> $x \in K$ とすると, 次の様な $f_x \in H(E)$ が存在する, 即ち σ が $[f_x]_{V \cap K}$ for nbd V_x of x in E となる. K は compact であるから, 有限個の $x_1, \cdots, x_n$ がとれ ($f_i := f_{x_i}$, $V_i := V_{x_i}$ とおく) $V_1, \cdots, V_n$ が K を cover する. 今 $x \in \overline{V_i} \cap \overline{V_j} \cap K$ とすると, $\sigma(x) = [f_i]_x = [f_j]_x$. これは f_i と f_j とが x の或る近傍 W_i で一致する事である. 次の様な closed set T_{ij} が存在する, 即ち $\{y \in E \mid [f_i]_y \neq [f_j]_y\} \subset T_{ij}$, $T_{ij} \cap K = \phi$. 今 $T := \cup T_{ij}$, $W_i = V_i - T_{ij}$ とおくと $\cup W_i \supset K$. 更に $f_i|W_i \cap W_j = f_j|W_i \cap W_j$, よって前命題4により, 次の様な $h \in H(E)$ が得られる, 即ち $h|W_i = f_i|W_i$, 故に $W := W_1 \cup \cdots \cup W_n$ とすれば, この h, W をとればよい.

§4. Cohomology groups and locally-A functions

B : Banach space, B′: dual space of B (weak topologyを入れておく). 前節のEの役割をB′が演ずる. $f \in H(B')$ は次のものである,

$$f(x) = \tilde{f}(x(a_1), \dots, x(a_n)) \qquad x \in B',$$

ここで $\tilde{f}$ は $\mathbb{C}^n$ の或る open set 上で正則な函数, $a_i \in B$.

commutative Banach algebra with unit A に対して, Spec(A) は A′ の compact subset であり, $\mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A))$ を sheaf induced on Spec(A) by $\mathcal{H}(A')$ とする. この sheaf の元は同値類 $[f]_x$ $x \in \mathrm{Spec}(A)$ である. 先ず次の定理を示す.

定理 6.

cohomology groups $H^q(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A))) = 0$ for $q \geqq 1$.

証明.

Cartanの定理Bに基づいてこれを示す。

$H^q(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A))) \neq 0$ とする, そうすると Spec(A) の finite covering $\mathfrak{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ がとれ, 次の homomorphism で0に写らない $H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A)))$ の non-trivial な元 σ が存在する, 即ち homomorphism

(1) $\quad H^q(\mathfrak{U}, \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A))) \longrightarrow H^q(\mathfrak{V}, \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A)))$.

は $\mathfrak{U}$ の細分 $\mathfrak{V}$ により induce されたもので, この元 σ は $\mathfrak{U}$ の $q+1$ 個の intersection $U_{i_0} \cap \cdots U_{i_q}$ 上の $\mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A))$ の section $\sigma_{\mathfrak{U}}$.

$\mathfrak{U}$ を covering $\mathfrak{V}=\{V_1, \cdots, V_n\}$, $\overline{V_i} \subset U_i$ により細分する。

さて, section $\sigma_{\mathfrak{U}}$ の $\overline{V_{i_0}} \cap \cdots \cap \overline{V_{i_q}}$ への制限は, 定理5により A' の open set $D_{i_0 \cdots i_q}$ で正則な函数 $h_{i_0 \cdots i_q}$ によって表わされる.

但し $D_{i_0 \cdots i_q} \cap \mathrm{Spec}(A) \subset U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}$.

$D_{i_1 \cdots i_{q+1}} \cap D_{i_0 i_2 \cdots i_{q+1}} \cap \cdots \cap D_{i_0 \cdots i_q} \cap \Delta$ 上で次の関係をみたす

(2) $\qquad h_{i_1 i_2 \cdots i_{q+1}} - h_{i_0 i_2 \cdots i_{q+1}} + \cdots + (-1)^{q+1} h_{i_0 \cdots i_q} = 0$

集合 $D_{i_0 \cdots i_q}$ は (2) が次の集合上で成り立つ様に選べる, 即ち

$$D_{i_1 \cdots i_{q+1}} \cap \cdots \cap D_{i_0 \cdots i_q}$$

次の事が成り立つ

$$\overline{V_{i_0}} \cap \cdots \cap \overline{V_{i_q}} \subset D_{i_0 \cdots i_q}$$

次の様な A' における 0 の近傍 V がとれる

$$(\overline{V_{i_0}} + V) \cap \cdots \cap (\overline{V_{i_q}} + V) \subset D_{i_0 \cdots i_q}$$

集合 $(\overline{V_i} + V)$ は open in A' で, その union は $\mathrm{Spec}(A)$ を含む.

次の形の集合を考える

(3) $\qquad \{ x \mid |x(a_i) - \lambda| < \varepsilon,\ a_i \in A,\ i = 1, \cdots, r \}$.

weak topology で, (3) の形の近傍基が存在して, $\mathrm{Spec}(A)$ は compact であるから, 次の性質を持つ open sets $W_1, \cdots W_u$ が存在する.

(4) 各 W_i は (3) の形の集合の有限個の union

(5) $\quad W_{i_0} \cap \cdots \cap W_{i_q} \subset \mathrm{domain}(h_{i_0 \cdots i_q})$ for $^\forall (q+1)$-tuple $(i_0, \cdots i_q)$

$$(1 \leq i_j \leq u)$$

(6) $W_{i_1\cdots i_{q+1}} \cap \cdots \cap W_{i_0\cdots i_q}$ 上で(2)の関係式が成り立つ.

(7) $\mathrm{Spec}(A) \subset W_1 \cup \cdots \cup W_n$.

今次の様な linearly independent な元の組 $\{a_1, \cdots, a_m\}$ をとる, 即ち, これらの元は(4)に含まれる全ての元を linearly に generate する十分多くの元であり, $h_{i_0\cdots i_q}$ はこれらの元と有限次元の空間の正則函数により表わされる.

$\phi_m(x) := (x(a_1), \cdots, x(a_m))$ とおくと, これは A' から $\mathbb{C}^m$ への線形で連続な写像である. 更に

(8) $\Omega_i := \phi_m(W_i) \quad (i = 1, \cdots n)$

は open で,

(9) $h_{i_0\cdots i_q} = \tilde{h}_{i_0\cdots i_q} \circ \phi_m$

ここで $\tilde{h}_{i_0\cdots i_q}$ は $\Omega_{i_0} \cap \cdots \cap \Omega_{i_q}$ で正則な函数で

(10) $\tilde{h}_{i_1\cdots i_{q+1}} - \tilde{h}_{i_0 i_2\cdots i_{q+1}} + \cdots = 0$ on $\Omega_{i_0} \cap \cdots \cap \Omega_{i_{q+1}}$

(11) $\phi_m(\mathrm{Spec}(A)) \subset \Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n$,

で $\phi_m(\mathrm{Spec}(A)$ は joint spectrum $\sigma(a_1, \cdots, a_m; A)$ である. 故に Ω は $\sigma(a_1, \cdots, a_m; A)$ の近傍である. よって次の様な元 $a_{m+1}, \cdots, a_n$ が見つけられる, 即ち $C(a_1, \cdots, a_n)$ を $a_1, \cdots a_n$ によって生成された algebra とし, projection $p : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ を $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$ とすると

$$\sigma' := \sigma(a_1, \cdots, a_n; C(a_1, \cdots a_n)) \subset p^{-1}(\Omega)$$

$\phi_n : A' \longrightarrow \mathbb{C}^n$ を $\phi_n(x) := (x(a_1), \cdots, x(a_n))$ と定義すると

$$\phi_n(Spec(A)) \subset \sigma'.$$

$\tilde{g}_{i_0 \cdots i_q} := \tilde{h}_{i_0 \cdots i_q} \circ p$, $\Lambda_i := p^{-1}(\Omega_i)$ とおくと，性質(9),(10)は $\tilde{h}$, Ω, m, を $\tilde{g}$, Λ, n, におきかえても成り立つ．又

$$\sigma' \subset \Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_n.$$

σ'は polynomially convex であるから，次の様なσ'の近傍Sがとれる，即ち，

$$S = \{|p_1| < 1, \cdots, |p_N| < 1\}, \quad p_i : 多項式,$$

で$S \subset \Lambda$．Sは Stein manifold であるから，Cartan の定理Bが適用出来て $H^q(S, \mathcal{H}(S)) = 0$ $(q \geq 1)$．函数$\tilde{g}_{i_0 \cdots i_q}$は$\Lambda_1, \cdots \Lambda_n$により induce された q-cochain を定義する．n, Λ, g に(10)を適用して，この cochain は cocycle である．covering $\{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n\}$の或る細分$\{M_\beta\}$に対して，$\forall\{\beta_1, \cdots \beta_q\}$に対して，次の様な正則函数 $w_{\beta_1 \cdots \beta_q}$ on $M_{\beta_1 \cdots \beta_q} = M_{\beta_1} \cap \cdots \cap M_{\beta_q}$ がとれる，即ち，$M_{\beta_j} \subset \Lambda_{i_j}$ $(j = 0, \cdots, q+1)$ ならば

$$\tilde{g}_{i_0 \cdots i_q} = w_{\beta_1 \cdots \beta_q} - w_{\beta_0 \beta_2 \cdots \beta_q} + \cdots \qquad \text{on } M_{\beta_0 \cdots \beta_{q+1}}$$

これよりϕ_nを用いて，A'における正則函数 $w \circ \phi_n$ と covering $\phi_n^{-1}(M_\beta)$ がとれ，$\phi_n^{-1}(M_\beta)$は$\mathfrak{U}$の細分で，wとgとの関係により，σは cohomology class 0 に入る．

$\mathcal{Z}$： $x\in \mathrm{Spec}(A)$の近傍で０になる函数のgermからなる
$\mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A))$のsubsheaf.

次のexact sequenceを得る

$$\text{(A)}\qquad 0 \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A)) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A))/\mathcal{Z} \longrightarrow 0$$

これよりexact sequenceが得られる.

$$0 \longrightarrow H^0(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{Z}) \xrightarrow{i} H^0(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A)))$$
$$\text{(B)}\qquad \xrightarrow{g} H^0(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A))/\mathcal{Z}) \xrightarrow{\gamma} H^1(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{Z})$$
$$\longrightarrow 0$$

次の命題を得る

命題７

locally-A functionは本質的には次のものの元である,

$$H^0(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{H}(\mathrm{Spec}(A))/\mathcal{Z}).$$

(証明) fをlocally-A functionとすると, 次の様な元 $a_1, \dots a_n \in A$ とopen sets $U_1, \dots U_n$ が存在する, 即ち $f(x) = \hat{a}_i(x)$ $x\in U_i \cap (\mathrm{Spec}(A))$ よって, $\hat{a}_i = \hat{a}_j$ on $U_i \cap U_j \cap \mathrm{Spec}(A)$. 故に $[a_i]_x - [a_j]_x \in \mathcal{Z}$ $x\in U_i \cap U_j \cap \mathrm{Spec}(A)$.

又 $H^1(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{Z}) = 0$ ならば, (B)により gはontoである. かくして, 次の様な$\mathrm{Spec}(A)$の近傍で定義された正則函数gが存在する, 即ち $[g]_x - [\hat{a}_i] \in \mathcal{Z}$ for $x \in U_i \cap \mathrm{Spec}(A)$.
よって $g(x) = f(x)$ for $x \in \mathrm{Spec}(A)$.

よって次の定理を得る.

定理 8.

$$H^1(\mathrm{Spec}(A), \mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow A: \text{sectionally complete}$$

又次の事は明らか.

定理 9.

$H^0(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{N}(\mathrm{Spec}(A))/\mathbb{Z})$ は次の様な $\mathrm{Spec}(A)$ 上で定義された函数 f の族と 1－1 の対応がつく, 即ち $\forall x_0 \in \mathrm{Spec}(A)$ に対して, 元 $a_1, \cdots, a_n \in A$ と $\mathbb{C}^n$ で正則な函数 $\tilde{f}$ がとれて, x_0 の近傍で

$$f(x) = \tilde{f}(x(a_1), \cdots, x(a_n)).$$

文　献

[1]. R. Arens : The problem of locally-A functions in a commutative Banach algebra A, Trans. A.M.S., 104(1962) 24 — 36

[2] —— : A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disk, Trans. A.M.S. 81(1956) 501–513,

[3] R. Arens and A. P. Calderon : Analytic functions of several Banach algebra elements, Ann. of Math. 62 (1955) 204–216.

[4] Seminaire H. Cartan (1967) Benjamin.

[5] A. Guichardet : Special topics in topological algebras, Gordon and Breach (1968).

[6] R.C. Gunning and H. Rossi : Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall (1965).

[7] 一松信 : 多変数解析函数論

[8] C. E. Rickart : General theory of Banach algebras, Van Nostrand (1960)

[9] A. Browder : Introduction to function algebras, Benjamin (1969).

[10] E. Kallin : A nonlocal function algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 49 (1963) 821 — 824.