数理解析研究所講究録
79巻 1969年 58-75

有理函数による近似問題における構成的方法について

茨城大 理　荷見守助

§1. 序

有理函数による近似の問題についての A. G. Vitushkin の結果に関聯した二つの事柄を述べる．第一に Vitushkin の定理の中で基本的と看做されるものの証明の概略と、その方法の応用としての Gamelin-Garnett の定理を説明する．その証明法が所謂構成的と呼ばれるものである．第二にこの方法を解明する一つの試みを述べるが、これは完結したものではない．有理函数による近似の問題では多くの興味ある結果が知られてゐるが、それらについては既に貴志氏 [4]，山下氏 [7] の詳しい報告があるのでこゝでは触れない．

§2. Vitushkin の定理

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の compact 集合 X に対し，$C(X)$ の部分空間 $A(X)$, $R(X)$ を次の如く定義する：$A(X)$ は X の内部 X° で正則な

函数の全体；$R(X)$ は X 上には極を持たない有理函数で一様近似出来る函数の全体．又 $\mathbb{C}$ 上の有界な開集合 U に対し $A(\bar{U})$ のことを $A(U)$ とも書く．本稿で述べる近似問題は，$A(X)=R(X)$ なる X を特徴付けることである．

S を $\mathbb{C}$ の部分集合，m を正数とする．この時，(i) f は S の或 compact 部分集合 K_f の外で一価正則，(ii) $f(\infty)=0$，(iii) $\|f\|_{CK_f} \leqq m$，を満足する f の全体を $A(S,m)$；(i′) $f\in C(S^2)$（但し S^2 は Riemann 球面），(ii′) $\|f\|\leqq m$，(iii) $f\in A(S,m)$ を満足する f の全体を $C(S,m)$ で表はす．$f\in A(S,m)$ のとき，

$$\gamma(S,f) = (2\pi i)^{-1}\int_{\partial S} f(z)\,dz \quad \left(=\lim_{z\to\infty} z f(z)\right)$$

とおく．∂S は，K_f の全ての点のまはりの回転数が 1 であるやうな任意の contour を表はすとする．そして

$$\gamma(S)=\sup\{|\gamma(S,f)| : f\in A(S,1)\},\quad \alpha(S)=\sup\{|\gamma(S,f)| : f\in C(S,1)\}$$

を夫々 S の解析的容量，AC 容量と呼ぶ．さて，Vitushkin の定理と呼ばれるものの中で，基本的なのは次のものである：

<u>定理 1</u>．$\mathbb{C}$ 上の compact 集合 X に対し次は同値である：

(a) $A(X)=R(X)$；

(b) 任意の有界開集合 G に対し，$\alpha(CX\cap G)=\alpha(CX^\circ\cap G)$；

(c) 任意の開円板 D に対し，$\alpha(CX\cap D)=\alpha(CX^\circ\cap D)$；

(d) 任意の $z\in\partial X$ に対し，$r\geqq 1$ で $\displaystyle\overline{\lim_{\delta>0}}\frac{\alpha(CX^\circ\cap\Delta(z;\delta))}{\alpha(CX\cap\Delta(z;r\delta))}<+\infty$ なるものが存在する．但し $\Delta(z;\delta)$ は中心 z，半径 δ の開円板．

(e) 任意の $z\in\mathbb{C}$ と $\delta>0$ に対し、$\alpha(CX^\circ\cap\Delta(z,\delta))\leqq m\alpha(CX\cap\Delta(z,r\delta))$ を満足するやうな $r\geqq 1$ と $m\geqq 0$ とが存在する。

§§3～7 で (a)⇒(e), (e)⇒(a) の証明について述べる。他は理論的な興味が少いと思はれるので省略する。

§3. 非正則点の分割。作用素 T_φ.

$\{\varphi_k\}$ を C^∞ 級の1の分割とすれば、$f\in C_0^1(\mathbb{C})$ に対し

$$f(\zeta)=(2\pi i)^{-1}\int\frac{f_{\bar z}}{z-\zeta}dz\wedge d\bar z=(2\pi i)^{-1}\int\frac{f_{\bar z}}{z-\zeta}\sum_k\varphi_k\,dz\wedge d\bar z$$

$$=\sum_k\Big[\varphi_k(\zeta)f(\zeta)-(2\pi i)^{-1}\int\frac{f(z)}{z-\zeta}(\varphi_k)_{\bar z}\,dz\wedge d\bar z\Big]$$

$$=-\sum_k(2\pi i)^{-1}\int\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}(\varphi_k)_{\bar z}\,dz\wedge d\bar z.$$

そこで、一般に $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{C})$ に対し、作用素 T_φ を

$$(T_\varphi f)(\zeta)=-(2\pi i)^{-1}\int\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\varphi_{\bar z}\,dz\wedge d\bar z \tag{1}$$

$$=\varphi(\zeta)f(\zeta)-(2\pi i)^{-1}\int\frac{f(z)}{z-\zeta}\varphi_{\bar z}\,dz\wedge d\bar z$$

と定義する。(1) は f が局所可積分であれば意味を持つ。更に f が有界な台を持つ時は、1の分割 $\{\varphi_k\}$ に対して

$$f=\sum_k T_{\varphi_k}f. \tag{2}$$

<u>補題1</u> $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{C})$ ($C_0^1(\mathbb{C})$ でもよい) の台を K, f を有界可測とすれば、次の性質がある。

(i) $T_\varphi f$ は可測であって、

$$\|T_\varphi f\|_\infty \leqq 2\,\mathrm{diam}(K)\,\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}\right\|_\infty \sup_{z,\xi\in K}|f(z)-f(\xi)| \leqq 4\,\mathrm{diam}(K)\,\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}\right\|_\infty \|f\|_K .$$

(ii) $T_\varphi f$ は CK で正則であり、且 $(T_\varphi f)(\infty)=0$.

(iii) $T_\varphi f$ は f の連続点で連続，f の正則点で正則である.

(iv) $f-T_\varphi f$ は $\varphi^{-1}(1)$ の内点で正則である.

これによれば，$T_\varphi f$ の非正則点は，f の非正則点の集合と φ の台の共通部分に含まれるから，(2) は f の非正則点を分割したことになるが、これが Vitushkin の構成的方法の第一歩である．但し後の評価の都合から，1 の分割を次のやうに作る.

__補題 2__. 任意の $\delta>0$ に対し次のやうな 1 の分割が存在する:

(i) $\varphi_{k,\delta}\in C_0^\infty(\mathbb{C})$，$0\leq\varphi_{k,\delta}\leq 1$，$\sum_k \varphi_{k,\delta}=1$;

(ii) $\varphi_{k,\delta}$ の台は $\Delta(z_{k,\delta},\delta)$ に含まれる;

(iii) $\|\partial\varphi_{k,\delta}/\partial\bar z\|_\infty \leqq \lambda/\delta$．（但し λ は絶対定数）

(iv) 任意の $z\in\mathbb{C}$ に対し、z を含む円板 $\Delta(z_{k,\delta};\delta)$ の個数は高々 M である．但し M も絶対定数である.

証明は簡単である．（[1]，[6]，又は [8] も参照されるとよい）

§4．(a) ⇒ (b) の証明：局所化の原理.

この部分の証明の核心は Bishop の局所化定理である．即ち

__補題 3__. $f\in C(X)$ とする．任意の $z\in X$ に対し，z の閉近傍 K_z で $f|_{X\cap K_z}\in R(X\cap K_z)$ なるものがあれば、$f\in R(X)$.

証明は [4] 又は [8].

(a) ⇒ (b) の証明：任意の $\varepsilon > 0$ に対し $f \in C(CX^\circ \cap G, 1)$ を $\alpha(CX^\circ \cap G) - \varepsilon \leqq |\gamma(CX^\circ \cap G, f)|$ であるやうに取る．f は $CX^\circ \cap G$ の或 compact 部分集合 K_f の外で正則であるから，f は CG の近傍で正則である．又 $f|_X \in A(X) = R(X)$ は明かであるから，補題3により $f \in R(X \cup CG)$．従て $\forall \varepsilon' > 0$ に対し，$X \cup CG$ の外に極を持つ有理函数 g で $\|f - g\|_{X \cup CG} < \varepsilon'$ なるものが存在する．そこで g を $X \cup CG$ の或近傍の外で変化させて，$g \in C(S^2)$ 且つ $\|g\| < 1 + \varepsilon'$ のやうに出来る．この新しい g に対しては，$|\gamma(CX \cap G, g)| \leqq (1 + \varepsilon')\alpha(CX \cap G)$．$\varepsilon' \to 0$ とすると，$\gamma(CX \cap G, g) \to \gamma(CX \cap G, f)$ であるから，更に $\varepsilon \to 0$ として $\alpha(CX^\circ \cap G) \leqq \alpha(CX \cap G)$ を得る．逆の不等式は明かであるから，(b) が示された．

§5．(e) ⇒ (a) の証明：Vitushkin の構成法．

Runge の定理によれば，証明すべきことは，$\forall f \in A(X)$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対し，X の近傍で正則な g で $\|f - g\|_X < \varepsilon$ を満足するものの存在を示すことである．このための Vitushkin の論法は次の三段階に分れる．先づ f を $C_0(\mathbb{C})$ の函数に延長しておく．

I．f の非正則点の分割．

$\delta > 0$ を任意に取り，補題2の1の分割 $\varphi_{k,\delta}$ を用ひて

(3) $$f = \sum_k f_{k,\delta}, \qquad f_{k,\delta} = T_{\varphi_{k,\delta}} f,$$

と書く。補題1によれば、$f_{k,\delta}$ は S^2 上で連続、$f_{k,\delta}(\infty)=0$，$X^\circ \cup C[\mathrm{supp}\,\varphi_{k\delta}]$ （$\supseteqq X^\circ \cup C\,\Delta(z_{k,\delta};\delta)$）で正則である。

II. $f_{k,\delta}$ の近似函数の構成。

補題1によれば，$\|f_{k,\delta}\|_\infty \leqq 4\lambda\omega_f(2\delta)$ （但し $\omega_f(2\delta)$ は f の連続度を表はす）であるから、$f_{k,\delta}\in C(CX^\circ\cap\Delta(z_{k,\delta};\delta),\ 4\lambda\omega_f(2\delta))$ であるが、條件(e)を用ひれば、

(4) $$f_{k\delta}(\zeta)-g_{k,\delta}(\zeta)=O(|\zeta|^{-3}) \qquad (|\zeta|\to\infty)$$

なる $g_{k,\delta}\in C(CX\cap\Delta(z_{k,\delta};(2\lambda+1)\delta,\ b\,\omega_f(2\delta))$ （但し b は m と λ のみによって決る定数）が存在することが分る。

III. 近似度の評価。

(5) $$\|f_{k,\delta}-g_{k,\delta}\|\leqq(4\lambda+b)\,\omega_f(2\delta)$$

は明かである。簡単のために，右辺の量を $\omega(\delta)$ と書くことにすれば、(4)，(5)と最大値の原理から、$|z-z_{k,\delta}|\geqq(2\lambda+1)\delta$ のとき、$|(z-z_{k,\delta})^3(f_{k,\delta}(z)-g_{k,\delta}(z))|\leqq(2\lambda+1)^3\delta^3\omega(\delta)$ が成立つから、(5)により次式が至る処で成立つ：

(6) $$|f_{k,\delta}(z)-g_{k,\delta}(z)|\leqq(2\lambda+1)^3\delta^3\omega(\delta)\,|z-z_{k,\delta}|^{-3}.$$

<u>補題4.</u> 任意に $z\in\mathbb{C}$ を固定する時，$A_n=\{\zeta : |\zeta-z|=n\delta\}$ と交はる $\Delta(z_{k,\delta};\delta)$ の個数 $N(n)$ は $9nM$ を越えない。

さて，$z\in\mathbb{C}$ を任意に固定する。この時、$f_{k,\delta}$，$g_{k,\delta}$ の番号 k を次の要領で double index (n,j) に変へる：$\Delta(z_{k,\delta};\delta)$ が A_n とは交はるが，A_{n-1} とは交はらない時、k を (n,j) と書く。各 n

に対する j の個数 $j(n)$ は $N(n)$ を越えない．故に (7) より．

$$\sum_k |f_{k\delta}(z) - g_{k\delta}(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j(n)} |f_{n,j,\delta}(z) - g_{n,j,\delta}(z)|$$

$$\leqq N(1)\,\omega(\delta) + \sum_2^{\infty} \frac{(2R+1)^3 \delta^3 j(n)\,\omega(\delta)}{(n\delta)^3} \leqq 9M\,\omega(\delta)\left(1 + (2R+1)^3 \sum_2^{\infty} \frac{1}{n^2}\right).$$

従て，$g_\delta = \sum_k g_{k,\delta}$ とおけば，g_δ は X の近傍で正則であり，$\delta \to 0$ の時 $\omega(\delta) \to 0$ であるから，$\|f - g_\delta\| \to 0\ (\delta \to 0)$ となる．

§6、第 II 段の構成法．第二 Laurent 係数の評価．

S を $\mathbb{C}$ 上の有界集合で $\alpha(S) > 0$ なるものとし，$h \in A(S, m)$ とする．∞ の近傍で $h(\zeta) = a_1(\zeta - z_0)^{-1} + a_2(\zeta - z_0)^{-2} + \cdots$ （但し $z_0 \in \mathbb{C}$）ならば，

$$a_1 = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial S} h(\zeta)\,d\zeta = \gamma(S, f), \quad a_2 = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial S} h(\zeta)(\zeta - z_0)\,d\zeta$$

である．そこで次の記号を導入する．

$$\beta(S, z_0, h) = \alpha(S)^{-1} a_2 = (2\pi i\,\alpha(S))^{-1} \int_{\partial S} h(\zeta)(\zeta - z_0)\,d\zeta\,;$$

$$\beta(S, z_0) = \sup\{|\beta(S, z_0, h)| : h \in C(S, 1)\}$$

$$\beta(S) = \inf\{\beta(S, z_0) : z_0 \in \mathbb{C}\}.$$

<u>補題 5</u>. (i) $\beta(S, z_1, h) - \beta(S, z_2, h) = (z_2 - z_1)\,\alpha(S)^{-1} \gamma(S, h) \quad (\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})$.

(ii) $\beta(S, O(S)) = \beta(S)$ なる点 $O(S)$ が存在する．

(iii) $\alpha(S) \leqq \beta(S) \leqq \mathrm{diam}(S)$.

(iv) $\sup\{|z - O(S)| : z \in S\} \leqq 2\,\mathrm{diam}(S)$.

(v) $|\alpha| \leqq \alpha(S)$, $|\beta| \leqq \beta(S)$ なる α, β に対し，$\gamma(S, h) = \alpha$, $\beta(S, O(S), h)$

$=\beta$ なる $h\in C(S,6)$ が存在する.

証明は [6] 又は [8] を参照されたい. 次の補題についても同様である.

<u>補題 6</u>. S を $\mathbb{C}$ 上の $\alpha(S)<\infty$ なる集合, 集合族 $S_i\subset S$ は次の性質を持つものとする：半径 $\alpha(S)$ の任意の円板と交はる S_i の個数が一定数 s を越えない. この時

$$\sum_i \alpha(S_i) \leqq 2C_1 s\,\alpha(S).$$

ここで C_1 は絶対定数である. 又 $h_i\in C(S_i,1)$ とすれば

$$\sup\{\textstyle\sum_i |h_i(z)| : z\in\mathbb{C}\} \leqq C_1 s.$$

以上の準備の下に $f_{k,\delta}$ の第二 Laurent 係数を評価する. 先づ

<u>補題 7</u>. h を有界可測, $\psi\in C_0^1(\mathbb{C})$ の台を K とすれば

$$\gamma(K, T_\psi h) = (2\pi i)^{-1}\int h(\zeta)\,\psi_{\bar\zeta}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta,$$

$$\gamma(K,(z-z_0)T_\psi h) = (2\pi i)^{-1}\int(\zeta-z_0)h(\zeta)\,\psi_{\bar\zeta}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta = \gamma(K, T_{(z-z_0)\psi}h).$$

従て, $(2\pi i)^{-1}\int(\zeta-z_0)h(\zeta)\psi_{\bar\zeta}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta$ を評価すればよいが, その為には次の結果が基本的である.

<u>補題 8</u>. S を $\mathbb{C}$ 上の集合, $r\geqq 1$, $\delta>0$ とする. f が有界可測で, 台の直径が δ_0 を越えない任意の $g\in C_0^\infty(\mathbb{C})$ に対し

(7) $$\left|(2\pi i)^{-1}\int f(\zeta)\,g_{\bar\zeta}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta\right| \leqq q\cdot\delta_g\cdot\|g_{\bar z}\|_\infty\cdot\Omega(f,\delta_g)\cdot\alpha(CS\cap\Delta(t,r\delta_g))$$

(但し, q は定数, δ_g は g の台の直径, $\Omega(f,\delta)$ は f と δ によって定まる定数であって f を固定するとき δ について単調増加, t は g の台に含まれる或点.) が成立つときは, $0<2\delta\leqq\delta_0$,

$X_{k,\delta} = CS \cap \Delta(z_{k,\delta}\,;(2r+1)\delta)$ に対して

(8) $\displaystyle \left|(2\pi i)^{-1}\int(\zeta - O(X_{k,\delta}))\,f(\zeta)\,(\varphi_{k,\delta})_{\bar\zeta}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta\right| \leqq C(r)\cdot q\cdot \Omega(f,2\delta)\,\alpha(X_{k,\delta})\,\beta(X_{k,\delta}).$

但し $C(r)$ は r のみに関係する定数である.

証明には補題5,6が用ひられるが、詳細は省略する. [6]の IV, §4, Lemma 1 の証明を修正すればよい.

§7. 第 II 段の証明の完結.

先づ補題1の(i)によって

(9) $\|f_{k,\delta}\|_\infty \leqq 4\lambda\,\omega_f(2\delta).$

次に $g \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ ならば、同じ補題により $\|T_g f\|_\infty \leqq 2\delta_g \|g_{\bar z}\|_\infty\,\omega_f(\delta_g)$ を得るから、g の台を K と書くとき, 補題7も参照して

$$\left|(2\pi i)^{-1}\int f(\zeta)\,g_{\bar\zeta}\,d\zeta\wedge d\bar\zeta\right| = |\gamma(CX^\circ\cap K,\,T_g f)| \leqq 2\delta_g\|g_{\bar z}\|_\infty\,\omega_f(\delta_g)\,\alpha(CX^\circ\cap K)$$

$$\leqq 2\delta_g\|g_{\bar z}\|_\infty\,\omega_f(\delta_g)\,\alpha(CX^\circ\cap\Delta(t,\delta_g)) \qquad (\forall t\in K)$$

$$\leqq 2m\,\delta_g\|g_{\bar z}\|_\infty\,\omega_f(\delta_g)\,\alpha(CX\cap\Delta(t,r\delta_g))$$

を得る. この最後の変形の処で條件(c)を用ひた. 即ち $q = 2m$, $\Omega(f,\delta) = \omega_f(\delta)$ として補題8の條件が満足されるから, $X_{k,\delta} = CX\cap\Delta(z_{k,\delta}\,;(2r+1)\delta)$ として.

(10) $|\beta(X_{k,\delta},\,O(X_{k,\delta}),\,f_{k,\delta})| \leqq 2m\,C(r)\,\omega_f(2\delta)\,\beta(X_{k,\delta})$

が成立つ. 一方(9)と $4\lambda \leqq C(r)$ としてよいことから,

(11) $|\gamma(X_{k,\delta},\,f_{k,\delta})| \leqq 4\lambda\,\omega_f(2\delta)\,\alpha(X_{k,\delta}) \leqq 2m\,C(r)\,\omega_f(2\delta)\,\alpha(X_{k,\delta}).$

故に、(10),(11), 補題5の(v)により、

$\gamma(X_{k,\delta}, g_{k,\delta}) = \gamma(X_{k,\delta}, f_{k,\delta})$, $\beta(X_{k,\delta}, O(X_{k,\delta}), g_{k,\delta}) = \beta(X_{k,\delta}, O(X_{k,\delta}), f_{k,\delta})$

なる $g_{k,\delta} \in C(X_{k,\delta}, 12mC(r)\omega_f(2\delta))$ の存在が知られる．即ち，$b = 12mC(r)$ として第II段の証明が完了した．

§8、Vitushkin の方法の応用．Gamelin-Garnett の定理．

U を S^2 の開集合で $\infty \notin \partial U$ なるものとする．この時 $A(U)$ が $H^\infty(U)$ の中で bounded pointwise convergence（b. p. c.）の位相で稠密であるとは，$\forall f \in H^\infty(U)$ に対し，定数 $c > 0$ と $f_n \in A(U)$ で $\|f_n\| \leqq c\|f\|$，$f_n(z) \to f(z)$ $(\forall z \in U)$ なるものが存在することを云う．$A(U)$ が $H^\infty(U)$ で b. p. c. 稠密の時は，上の c はすべての $f \in H^\infty(U)$ に対し同一に取れることが分る．Gamelin と Garnett [1] は次の定理を Vitushkin の方法を応用して証明した．

<u>定理 2.</u> $\infty \notin \partial U$ なる開集合に対し次は同値である．

(a') $A(U)$ は $H^\infty(U)$ で b. p. c. 稠密である．

(b') $\forall r > 1, \exists m > 0 \ni \gamma(CU \cap \Delta(z;\delta)) \leqq m\,\alpha(CU \cap \Delta(z; r\delta))$ $(\forall \delta > 0, \forall z \in \mathbb{C})$

(c') $\exists r > 1, \exists m > 0 \ni \gamma(\partial U \cap \Delta(z;\delta)) \leqq m\,\alpha(CU \cap \Delta(z; r\delta))$ $(\delta_0 \geqq \forall \delta > 0, \forall z \in \partial U)$.

<u>定理 3.</u> K を $\mathbb{C}$ の compact 集合とする．

(a'') $R(K)$ は $H^\infty(K^\circ)$ で b. p. c. 稠密で，∂K の面積が 0 ならば，

$\forall r > 1, \exists m > 0 \ni \gamma(CK^\circ \cap \Delta(z;\delta)) \leqq m\,\gamma(CK \cap \Delta(z; r\delta))$ $(\forall \delta > 0, \forall z \in \mathbb{C})$.

(b'') 次が成立すれば，$R(K)$ は $H^\infty(K^\circ)$ で b. p. c. 稠密である：

$\exists r > 1, \exists m > 0 \ni \gamma(\partial K^\circ \cap \Delta(z;\delta)) \leqq m\,\gamma(CK \cap \Delta(z; r\delta))$ $(\delta_0 \geqq \forall \delta > 0, \forall z \in \partial K^\circ)$.

これらの証明法は §§4〜7 に述べたものに類似ではあるがいろいろの工夫が必要になる．その詳細は [1] にある．尚，(a″) の條件中「∂K の面積が 0」は不必要ではないかと言ってゐるが，未解決である．又，$A(U)$ が $H^\infty(U)$ で b.p.c. 稠密の時は，定数 c を 1 にすることが出来るという Davie の結果もある．その他の興味ある結果については，[2] を見られたい．一様近似と b.p.c. 近似の異同については Fisher の例がある．

§9．T_φ の一般化．

R^n を $n(\geqq 2)$ 次元 Euclid 空間とし，その座標を $(x_1, \cdots, x_n)$，$D_\nu = -i\,\partial/\partial x_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ とする．$P(D)$ を定数係数の楕円型一階線型偏微分作用素系とする．即ち

(12) $$P(D) = \sum_{\nu=1}^{n} A^{(\nu)} D_\nu + B,$$

$A^{(\nu)}$，B は $N\times N$ 定数行列であって，任意の $\xi\,(\neq 0) \in R^n$ に対し

(13) $$\det\left(\sum_{\nu=1}^{n} A^{(\nu)} \xi_\nu\right) \neq 0$$

を満足するものとする．この時，次の性質を持つ $P(D)$ の基本解 $E(x)$ が存在する（[3]，[5] 参照）．

1) $E(x)$ は R^n で定義され $N\times N$ 複素行列に値をとる函数で，原点を除いては C^∞ である．

2) δ を Dirac 測度，I を $N\times N$ 単位行列とするとき，

$$P(D)E = E * P(D)(\delta I) = \delta I.$$

3) $F(x) = \left(\sum_{i,j=1}^{N} |E_{ij}(x)|^2\right)^{1/2}$ とおけば、原点の近傍で

$$F(x) \leqq C_0 |x|^{1-n}$$

が成立つ．但し C_0 は定数で，$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ である．

さて，任意の $f \in \mathcal{E}'(R^n; N) = \mathcal{E}'(R^n) \times \cdots \times \mathcal{E}'(R^n)$ （N 個の直積）に対し，$f = (P(D)E) * f = E * (P(D)f)$ であるから，$\{\varphi_k\}$ を $C_0^\infty(R^n)$ の函数よりなる 1 の分割とすれば、簡単な計算で

$$f = \sum_k E * (\varphi_k P(D) f) = \sum_k [\varphi_k f - E * (\sum_\nu (D_\nu \varphi_k) A^{(\nu)} f)]$$

を得る．そこで，$\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ を固定して，作用素 T_φ を

(14) $$T_\varphi f = \varphi f - E * [\sum_\nu (D_\nu \varphi) A^{(\nu)} f] \qquad f \in \mathcal{D}'(R^n; N)$$

で定義する．特に $f \in L^{1, loc}(R^n; N)$ ならば、

(15) $$(T_\varphi f)(\xi) = \varphi(\xi) f(\xi) - [E * \sum_\nu (D_\nu \varphi) A^{(\nu)} f](\xi)$$

$$= \sum_\nu \int_{R^n} E(\xi - x)(D_\nu \varphi(x)) A^{(\nu)} (f(\xi) - f(x))\, dx + \int_{R^n} E(\xi - x) \varphi(x) B f(\xi)\, dx$$

<u>命題 1</u>．$\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ とし，その台を K とすれば，$f \in L^{1, loc}(R^n; N)$ に対し，$T_\varphi f$ は次の性質を持つ．

(i) $T_\varphi f \in L^{1, loc}(R^n; N)$，

(ii) K の外部で $P(D)(T_\varphi f) = 0$．

(iii) ξ の近傍に於て $P(D) f = 0$ ならば、$P(D)(T_\varphi f)(\xi) = 0$．

(iv) f が ξ_0 で連続で，K 上で有界ならば，$T_\varphi f$ は ξ_0 で連続．

(v) $f - T_\varphi f$ は $\varphi^{-1}(1)$ の内点に於て，$P(D) u = 0$ を満足する．

これは，$T_\varphi f$ の大きさの評価の点を除けば、補題 1 の拡張

である．更に、$f \in L^{p,loc}(R^n;N)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ ならば，$T_\varphi f \in L^{p,loc}(R^n;N)$ であることもすぐ分る．

次に、$x_0 \in R^n$ を固定する．$\tilde{\varphi}$ を $[0,\infty)$ 上で定義された実数値 C^∞ 函数で，$\tilde{\varphi}(t)=1$ $(t \leqq 1)$，$=0$ $(t \geqq 2)$，且つ全ての t で $0 \leqq \tilde{\varphi}(t) \leqq 1$ なるものとし，$\delta>0$ 対し

$$\varphi_\delta(x) = \tilde{\varphi}(4\delta^{-1}|x-x_0|)$$

とおく．この時、φ_δ の台 K_δ は $\{x \in R^n : |x-x_0| \leqq \delta/2\}$ に含まれ、

$$|\operatorname{grad} \varphi_\delta(x)| = \left(\textstyle\sum_\nu (\partial\varphi_\delta/\partial x_\nu)^2\right)^{1/2} = 4\delta^{-1}\tilde{\varphi}'(4\delta^{-1}|x-x_0|).$$

そこで，$\delta \to 0$ の時の $T_{\varphi_\delta} f$ の収斂性を調べる．

<u>定義</u>．$f \in L^{p,loc}(R^n,N)$ $(1 \leqq p < \infty)$ とする．もし $\alpha \in \mathbb{C}$ と有限な定数 $C_2>0$ で，充分小さい全ての $\delta>0$ に対して

$$\left(\int_{|x-x_0|\leqq\delta} |f(x)-\alpha|^p dx\right)^{1/p} \leqq C_2 \delta .$$

が成立つやうなものが存在するならば、f は x_0 に於て L^p 連続であると云ふ．

この時次が成立つ．

<u>命題 2</u>．$n/(n-1) \leqq p \leqq \infty$，$f \in L^{p,loc}(R^n;N)$ とする．

(i) x_0 を含まない任意の compact 集合 H 上に於て，$T_{\varphi_\delta} f$ は $\delta \to 0$ の時一様に 0 に収斂する．

(ii) $p<\infty$ の時、f が x_0 で L^p 連続ならば，$\delta \to 0$ のとき、$T_{\varphi_\delta} f$ は $L^{p,loc}(R^n;N)$ に於て 0 に収斂する．

(iii) $p=\infty$ の時，f が x_0 で連続ならば，$\delta \to 0$ のとき．$T_{\varphi_\delta} f$

は全てのcompact集合上で一様に0に収斂する.

$T_\varphi f$ のノルムを評価する. $g \in L^{p,loc}(R^n; N)$, K が R^n のcompact集合の時, $g|K$ の L^p ノルムを $\|g\|_{p,K}$ と書く.

<u>命題 3</u>. $1 \leqq p \leqq \infty$, $f \in L^{p,loc}(R^n; N)$, $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ とし, φ の台をKと書く.

(i) $p < \infty$ とし, r, s を $1 \leqq r, s \leqq \infty$ で $p^{-1} + r^{-1} = s^{-1}$ なるものとすれば, 任意のcompact集合 $H \subset R^n$ に対し,

$$\|T_\varphi f\|_{s,H} \leqq \|\varphi\|_H \|f\|_{s,H} + C_3 \|\mathrm{grad}\,\varphi\|_r \|f\|_{p,K}.$$

こゝで, C_3 は H と K のみに依存する定数である. 特に, $n/(n-1) \leqq p$ ならば,

$$\|T_{\varphi_\delta} f\|_{np/(n+p),H} \leqq C_4 (\|f\|_{p,H} + \|f\|_{p,K_\delta}).$$

こゝで, C_4 は H と x_0 のみに依存する定数である.

(ii) $p = \infty$ の時は, 任意のcompact集合 $H \subset R^n$ に対し,

$$\|T_\varphi f\|_H \leqq \|\varphi\|_H \|f\|_H + C_5\, m(K)^{1/n} \|\mathrm{grad}\,\varphi\|_\infty \|f\|_K.$$

こゝで, C_5 は H と K のみに依存する定数で, $m(K)$ は K の体積である. 特に.

$$\|T_{\varphi_\delta} f\|_H \leqq C_6 (\|f\|_H + \|f\|_{K_\delta}).$$

こゝで, C_6 は H と x_0 のみに依存する定数である.

<u>系 1</u>. $n/(n-1) \leqq p < \infty$, $f \in L^{p,loc}(R^n; N)$, $x_0 \in R^n$ とする. この時, 次の條件を満足する函数列 $f_m \in L^{np/(n+p)}(R^n; N)$ が存在する.

(i) $\|f_m\|_{np/(n+p),H} \leqq C_H (\|f\|_{p,H} + \|f\|_{p,V})$

こゝで，V は x_0 の（固定された）compact 近傍，C_H は H のみに依存する定数である．

(ii) $P(D)f=0$ が成立つ任意の開集合上に於て，$P(D)f_m=0$．

(iii) x_0 の近傍（m に依存する）に於て，$P(D)f_m=0$．

(iv) $x \neq x_0$ ならば，$f_m(x) \to f(x)$ であり，収斂は x_0 を含まない任意の compact 集合上で一様である．

(v) 任意の compact 集合 H 上で，$\|f-f_m\|_{np/(n+p),H} \to 0$．

(vi) もし f が x_0 で L^p 連続ならば，上の f_m を $L^{p,loc}(R^n;N)$ より取ることが出来，更に $\|f_m\|_{p,H} \leqq C_7(\|f\|_{p,H}+\|f\|_{p,V}+1)$ を成立せしめることが出来る．こゝで，C_7 は H と f の x_0 に於ける連続性（定義の C_2）にのみ依存する定数である．しかも，(v) は L^p ノルムで満足される．

証明．$f_m=f-T_{\varphi(1/m)}f$ $(m=1,2,\cdots)$ とおけばよい．

系 2．$f \in L^{\infty,loc}(R^n;N)$，$x_0 \in R^n$ とすると，次を満足する函数列 $f_m \in L^{\infty,loc}(R^n;N)$ が存在する．

(i) $\|f_m\|_H \leqq C_H\|f\|_{H\cup V}$．

こゝで，V は x_0 の固定された compact 近傍，C_H は H のみに依存する定数である．

(ii) f が連続な点では f_m も連続である．又，$P(D)f=0$ が成立つ任意の開集合上では $P(D)f_m=0$．

(iii) x_0 の（m に依存する）近傍で，$P(D)f_m=0$．

(iv)　x_0を含まない任意のcompact集合上で，一様に$f_m \to f$.

(v)　fがx_0で連続ならば，任意のcompact集合上で，一様に$f_m \to f$.

これは、［1］のCor. 1.2. の拡張である．T_φの性質についてはこの位にして、終にその応用を述べる．

§10．T_φの応用：局所性定理．

$P(D)$を前節の通りとし、次の定義をおく：開集合Uに対し

$$\mathcal{A}_P(U) = \{ u \in C(U;N) : P(D)u = 0 \ \text{ on } U \}.$$

又，R^nのcompact集合Xに対し、

$$\tilde{\mathcal{A}}_P(X) = \bigcup \{ \mathcal{A}_P(U) : U \text{はXを含む開集合} \}$$

とおき，更に

$$\mathcal{A}_P(X) = \{ u \in C(X;N) : u \text{は} \tilde{\mathcal{A}}_P(X) \text{の函数でX上一様近似出来る} \}$$

とおく．この時、Bishopの局所性定理（補題3）の拡張に當る次の定理が成立つ．

<u>定理4.</u>　$f \in C(X;N)$とする．任意の$x \in X$に対し，xの閉近傍K_xで$f|_{X \cap K_x} \in \mathcal{A}_P(X \cap K_x)$なるものがあれば、$f \in \mathcal{A}_P(X)$．

又，bounded pointwise convergenceについては，次の結果も証明出来る．

<u>定理5.</u>　UをR^nの有界開集合とし，fをU上有界で$P(D)f$

$=0$ 及び次の條件を満足するものとする。$\{U_j\}_{j=1}^{s}$ は $\overline{U}$ の有限開被覆，M は正数で、各 j に対し函数列 $f_k \in A_P(\overline{U \cap U_j})$ で

$$f_k(x) \longrightarrow f(x) \quad (\forall x \in U \cap U_j), \quad \|f_k\|_{U \cap U_j} \leqq M \|f\|_{U \cap U_j}$$

なるものが存在する。この時、函数列 $g_k \in A_P(\overline{U})$ で

$$g_k(x) \longrightarrow g(x) \quad (\forall x \in U), \quad \|g_k\|_U \leqq \lambda M \|f\|_U$$

なるものが存在する。こゝで、λ は $\{U_j\}$ のみに依存する定数である。

これは、[1] の Lemma 2.1. の拡張に當る。証明も類似である。これに類似の定理（L^p の場合など）を更に述べることも出来るが、こゝでは省略させていたゞく。

文献

[1] T. W. Gamelin and J. Garnett, *Constructive techniques in rational approximation*, T. A. M. S. (to appear).

[2] ――――――, *Bounded pointwise approximation and dirichlet algebras*, (to appear).

[3] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer, 1963.

[4] 貴志一男, Function algebras の理論から見た rational approximation, Function algebra についての共同研究集会（第2回）報告集, 数解研講究録 61, 1968.

[5] 溝畑茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965.

[6] A.G. Vitushkin, Analytic capacity of sets and problems in approximation theory, Uspekhi Mat. Nauk 22 (1967), 141–199.

[7] S. Yamashita, Recent development of rational approximation theory, 1969年3月数解研講演.

[8] L. Zalcman, Analytic capacity and rational approximation, Lecture Notes in Math. #50, Springer, 1968.