数理解析研究所講究録
79巻 1969年 44-57

Topological algebra のスペクトルについて

東教大・理　神保敏弥

§1. 序

topological algebra E のスペクトル $S(E)$ が，どのようになっているかを調べることは一つの問題であった。ここでは[5]，[7]，[8]，[9]を中心として，単位元を持つ Banach algebra のスペクトルの元の特徴や locally convex algebra，正則関数の algebra，ε-product のときなどのスペクトルについて述べる。

§2. Banach algebra の multiplicative linear functional

A を単位元をもつ可換複素 Banach algebra とし，A' を A の dual space，$S(A)$ を A のすべての multiplicative linear functionals の集合[13]，A^{-1} を A の可逆元の全体と

する．$x \in A$ のスペクトルを $\sigma(x)$ とする，即ち $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \notin A^{-1}\}$ である．

$f \in S(A)$ の一つの良く知られた性質は，$\{x \in A \mid f(x) = 0\}$ が A の maximal ideal であり，M が A の maximal ideal ならば，或る $g \in S(A)$ が存在して，$M = \{x \in A \mid g(x) = 0\}$ と表わせる，ということである．最近，$f \in S(A)$ の別の性質を Kahane と Zelazko [7] は，x のスペクトルを用いて，次のように表わした。

<u>定理1</u>．A が単位元をもつ可換複素 Banach algebra ならば，$f \in S(A) \iff$ (1) $f \in A'$ (2) $f(x) \in \sigma(x)$, $^\forall x \in A$.

証明．$\Rightarrow$ は明らか。$\Leftarrow$ を示す：(2) より $f(e) = 1$，$x \in A$ に対し $\varphi(\lambda) = f(\exp(\lambda x))$ とおくと，$\varphi(\lambda)$ は整関数である．又 (2) より $\varphi(\lambda) \neq 0$ であるから，ある整関数 $\psi(\lambda)$ で $\varphi(\lambda) = \exp(\psi(\lambda))$ と表わせる．$|\varphi(\lambda)| \leqq \|f\| \exp(|\lambda| \|x\|)$ より，ある $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$ とかけ，$\varphi(0) = 1$ より $\psi(\lambda) = \alpha\lambda$ となる．したがって，

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{n!} \lambda^n$$

$\therefore f(x^n) = f(x)^n$, $n = 2$ のときから $f(xy) = f(x) f(y)$ を得る．

<u>注意</u>．定理1は real Banach algebra に対しては，正し

くない．又定理1は次の定理と同値である： X が A の sub-space ならば，X が maximal ideal $\Leftrightarrow$ $\mathrm{codim}\, X = 1$, $X \subset A - A^{-1}$.

<u>系1</u>．X は compact Hausdorff space とし，A を $C(X)$ の subalgebra とする，かつ $1 \in A$．μ は X 上の Radon measure で $\forall x \in X$ に対して，ある $p_x \in X$ が存在して，$\int_X x\, d\mu = x(p_x)$ とかけるならば

$$\int_X xy\, d\mu = \int_X x\, d\mu \int_X y\, d\mu, \ \forall x, y \in A.$$

証明．$f(x) = \int_X x\, d\mu$ とおき，f を A から supremum norm に関する completion $\overline{A}$ に拡張し，$\overline{A}$ に対する定理1を用いればよい．

<u>系2</u>．A_1, A_2 は それぞれ単位元をもつ可換 Banach algebra とする，A_2 は semi-simple とする．T は A_1 から A_2 の中への 有界線形写像 で $\sigma(Tx) \subset \sigma(x)$, $\forall x \in A_1$ を満たすものとする．$\Rightarrow$ $Txy = Tx\, Ty$ ，$\forall x, y \in A_1$

証明．$f \in \mathfrak{S}(A_2)$ に対して $F(x) = f(Tx)$ ，$\forall x \in A_1$ とおくと $F \in A_1'$ かつ $F(x) \in \sigma(x)$ より $F \in \mathfrak{S}(A_1)$．故に $f(Txy) = f(Tx)f(Ty) = f(Tx\, Ty)$．$f$ の任意性と A_2 の semi-simple より結論を得る．

注意．系2は，A_2 が semi-simple を欠くと正しくない．

§3. 正則関数の algebra のスペクトル

この節では，Riemann domain と Stein space の正則関数の algebra の場合について述べる。

対(X, p)が Riemann domain とは，(1) Xが Hausdorff space (2) $p: X \longrightarrow \mathbb{C}^n$は 局所位相同型のときを言う。

$\mathcal{O}_X$を Riemann domain (X, p)上の正則関数の algebra，$S(\mathcal{O}_X)$を$\mathcal{O}_X$のスペクトルとする。$f \in \mathcal{O}_X$に対して $\hat{f}(h) = h(f), {}^\forall h \in S(\mathcal{O}_X)$によって$\hat{f}$を定義し，$h_x(f) = f(x), {}^\forall f \in \mathcal{O}_X$ によってh_xを定める。次の定理は，スペクトル$S(\mathcal{O}_X)$に自然な Riemann domain の構造を導入できることを言っている。

<u>定理2</u>．(X, p)を separable Riemann domain とし，$\hat{p} = (\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_n)$とおく。$\Rightarrow$ $(S(\mathcal{O}_X), \hat{p})$には以下の性質を持つ Riemann domain の構造を与えることができる：

(1) 写像$g: x \longrightarrow h_x$が holomorphic，

(2) Eを$g(X)$と交わる$S(\mathcal{O}_X)$の成分の合併とするとき，
$\hat{g}: \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_X$が isomorphism，

(3) (Y, p')が Riemann domain で$\hat{\varphi}: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$が isomorphism であるような正則写像$\varphi: X \longrightarrow Y$が存在するならば，$g = \psi \circ \varphi$ であるような正則写像 $\psi: Y \longrightarrow S(\mathcal{O}_X)$が存在する。(cf. [5])。

証明．略．(Complex analytic manifold については cf.[1])

次に$(X, \mathcal{O})$を analytic space とするとき Xが Stein space とは (1) Xが countable topology をもつ (2) Xが holomorphically convex (3) $x \in X$に対して, $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{O}_X$が存在して $\mathrm{rank}_x(f_1, \cdots, f_n) = \dim t_x X$ ($\dim t_x$ は tangential dimension) (4) $x \neq y \in X$に対して $f(x) \neq f(y)$となる $f \in \mathcal{O}_X$が存在する, (ここで$\mathcal{O}_X$は X上の正則関数の algebra である.) を満たすときをいう.

KがXの compact のとき, Kの holomorphically convex hull $\hat{K}$ は, $\{x \in X \mid |f(x)| \leq \|f\|_K, \ \forall f \in \mathcal{O}_X\}$で定義されるもので, $A(K)$は, $\mathcal{O}_X$の関数のK上での一様極限である連続関数の algebra とする.

X上の Oka-Weil domain Wとは (1) Wが relatively compact (2) 次の(イ),(ロ)を満すφが存在する (イ) $\varphi: \overline{W}$の近傍 $\longrightarrow \mathbb{C}^n$ は holomorphic mapping (ロ) $\varphi|W$ はWから$\mathbb{C}^n$の多重円板(半径1)内の closed subvariety の上への biholomorphic mapping, を満たすときをいう.

定理3. $(X, \mathcal{O})$を Stein space, KをXの compact subset とする。 $\Longrightarrow$ $S(A(K)) = \hat{K}$. (cf. [5])

証明. $x \in \hat{K}$とし, $l_x(f) = f(x)$, $\forall f \in \mathcal{O}_X$ でl_xを定めるとl_xは $A(K)$上の homomorphism を定義する. $x \longrightarrow l_x$ は $\hat{K} \longrightarrow S(A(K))$の中への continuous $1-1$ map である.

逆に $h \in S(A(K))$ とせよ．W は $f_1, \cdots, f_t \in \mathcal{O}_X$ で定義された $W \supset \hat{K}$ なる Oka-Weil domain とせよ．$V = \{ z \in \mathbb{C}^t \mid z_i = f_i(x),\ x \in \dot{W} \}$ とおく．$\|f_i\|_{\hat{K}} < 1$ より $z_0 = (h(f_1), \cdots, h(f_t)) \in$ 半径1の多重円板 $\Delta(0,1)$．今 $z_0 \notin V$ とすると，ある $F \in \mathcal{O}_{\Delta(0,1)}$ が存在して $F(z_0) \neq 0$，$F \equiv 0$ on V とできる．F を多項式近似して矛盾を得 $z_0 \in V$ がわかる．さらに $z_0 \notin \hat{K}$ とすると，$z_0 = (f_1(x_0), \cdots, f_t(x_0))$，$x_0 \in W$ とかけているので，ある $G \in \mathcal{O}_X$ が存在して $|G(x_0)| > \|G\|_K$ とできる．
$W_\varepsilon = \{ x \in W \mid |f_i(x)| \leq 1 - \varepsilon,\ i = 1, \cdots, t \}$ は holomorphically convex である，ε は $W_\varepsilon \ni x_0$ ととる，この W_ε 上で G に一様収束する $f_1, \cdots, f_t$ の多項式 P_n が存在する．故に $|G(x_0)| = \lim |P_n(x_0)| = \lim |h(P_n)| = |h(G)| \leq \|G\|_K$．これは矛盾．$\therefore x_0 \in \hat{K}$，故に $h = l_{x_0}$．証明終り．

これを用いて次の定理を得る．

<u>定理4</u>．$(X, \mathcal{O})$ は $\mathcal{O}_X$ が X の点を分離し，$\mathcal{O}_X$ が local coordinates を与える純次元の complex space とせよ．
X は Stein $\Longleftrightarrow$ $X = S(\mathcal{O}_X)$．（cf. [5]）

§4．$E \otimes_{\mathcal{T}} F$ のスペクトル

E，F は locally convex (locally m-convex) algebra とする．tensor product algebra $E \otimes F$ 上の位相 $\mathcal{T}$ が，

$E\otimes F$の構造でもって compatible とは、次の条件を満たすときである。

(1) $\mathcal{J}$を備えた$E\otimes F$が locally convex (locally m-convex) algebra(これを$E\otimes_{\mathcal{J}}F$と表わしこの completion を$E\hat{\otimes}_{\mathcal{J}}F$とかく)。

(2). $E\times F$から$E\otimes_{\mathcal{J}}F$の中への canonical bilinear map が個別的に連続.

(3) $f\in E'$, $g\in F'$に対して、$f\otimes g\in(E\otimes_{\mathcal{J}}F)'$. ここで

$f\otimes g$は $z=\sum_i x_i\otimes y_i\in E\otimes F$に対して

$f\otimes g(z)=\sum_i f(x_i)\,g(y_i)$で定義される.

(4) M, NがE', F'の equicontinuous subset ならば

$M\otimes N$は$(E\otimes_{\mathcal{J}}F)'$の equicontinuous subset.

$E\otimes_{\mathcal{J}}F$のスペクトル$S(E\otimes_{\mathcal{J}}F)$と$E$, Fのスペクトル$S(E)$, $S(F)$との関係は次の定理で与えられる.

<u>定理5.</u> [9]. E, Fは commutative locally convex algebra とする. $E\otimes_{\mathcal{J}}F$は compatible topology $\mathcal{J}$を与えられた$E\otimes F$とする.

$$\Longrightarrow\quad S(E\otimes_{\mathcal{J}}F)=S(E)\times S(F)$$

証明. bijective: $h\in S(E\otimes_{\mathcal{J}}F)$とすると、ある$a\otimes b\in E\otimes F$が存在して、$h(a\otimes b)\neq 0$より

(ハ)
$$f(x) = \frac{1}{h(a\otimes b)} h(ax\otimes b), \quad x \in E$$
$$g(y) = \frac{1}{h(a\otimes b)} h(a\otimes by), \quad y \in F$$

と定義すると，f，g は continuous であり，$(f,g) \in S(E) \times S(F)$である．逆に $(f', g') \in S(E)\times S(F)$ならば，定義の(3)より $f'\otimes g' \in (E\otimes_J F)'$，$h = f'\otimes g'$とおき，$h$から(ハ)により定められたものを$f, g$とすると，$h = f\otimes g$ (cf. [12]) である．このとき$f' = f$，$g = g'$となる．

次に $(f,g) \longrightarrow h = f\otimes g$ の連続性：$(f,g)_{i\in I}$ は (f,g)に収束する $S(E)\times S(F)$の net とすると $f_i \to f$, $g_i \to g$ である．$x\otimes y \in E\otimes_J F$に対して，

$h_i(x\otimes y) = f_i(x) g_i(y) \longrightarrow f(x)g(y) = h(x\otimes y)$.

逆に，$h \longrightarrow (f,g)$ (f, g は (ハ)による)の連続：

$(h_i)_{i\in I}$ は hに収束する $S(E\otimes_J F)$の netとする．$a\otimes b \in E\otimes_J F$をとって $h(a\otimes b) \neq 0$ とできるので

$f(x) = h(ax\otimes b)/h(a\otimes b)$，$x\in E$，ならば，$f(x)$の近傍$U$に対して $f_i(x) = h_i(ax\otimes b)/h_i(a\otimes b) \in U$, $\forall i \geq i_U$ である $i_U \in I$が存在する．故に$f_i \longrightarrow f$ in $S(E)$．他方も同様であり連続性が言えた．

系 E, F を commutative locally convex algebras, $S(E), S(F)$ は それぞれ E', F' の equicontinuous subset とする. $\Rightarrow$ $S(E\hat{\otimes}_J F) = S(E)\times S(F)$

証明. 前の定理の前半より bijective は明らか. 定義の (4) によって $S(E\otimes_J F)$ は $(E\otimes_J F)'$ の equicontinuous subset である. 又 $S(E\otimes_J F)$ と $S(E\hat{\otimes}_J F)$ は位相空間として一致している。

§ 5. $S(E)$ の 局所同程度連続.

E を locally convex algebra で $S(E)$ を E のスペクトルとする. E が m-barreled とは, すべての吸収的円形凸閉 idempotent subset が 0 の近傍となるときを言う. $S(E)$ が locally equicontinuous とは 各 $f\in S(E)$ に対して, equicontinuous subset である f の近傍 U_f が存在するときを言う. 次の定理は, [8] による.

定理 6. E が m-barreled locally convex algebra とし, (1) $S(E)$ は locally compact (Hausdorff) space.

(2) $S(E)$ は locally equicontinuous.

このとき (1) $\Rightarrow$ (2). E が単位元 e を持てば (2) $\Rightarrow$ (1).

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): U_f は $f\in S(E)$ の compact な近傍とする. U の極集合 $U^\circ \equiv \{ x\in E \mid |\langle g, x\rangle| \leq 1, \forall g\in U_f\}$ は

m−barrel となるので 0の近傍である.
故に $U \subset U^{\circ\circ}$ は $S(E)$の equicontinuous subset である.
(2)⇒(1): $E \ni e$ より $S(E)$は E'の weakly closed subset である. U_fが fの equicontinuous 近傍ならば, $\overline{U}$は E'の equicontinuous subset である. 故に $\overline{U} \cap S(E)$は fの compact 近傍である.

<u>系</u> Eは m−barreled locally convex algebraとし, $A \subset S(E)$ ならば, Aが weakly relatively compact
⟺ Aが weakly bounded.

次に Gel'fand map の連続性を考える. Eは locally convex algebraとし, $C(S(E))$は $S(E)$上のすべての複素数値連続関数の algebraで compact一様収束の位相をもつとする. このとき Gel'fand map gは, $g: x \longrightarrow \hat{x}$, $\forall x \in E$, である. ここで $\hat{x}$は, $\hat{x}(f) = f(x)$, $\forall f \in S(E)$ によって定義される. このとき次の定理が成り立つ[8].

<u>定理7</u>. Eを locally convex algebraとするならば, Gel'fand map $g: E \longrightarrow C(S(E))$が連続
⟺ $S(E)$のあらゆる compact subset が equicontinuous.

証明. $A \subseteq S(E)$が (weakly) compactとすると, gが連続 ⟺ $g_A: E \longrightarrow C_u(A)$ が連続 ($C_u(A)$ は 一様収束の

のtopologyをもつとする). $\Leftrightarrow$ Aが equicontinuous.

系. Eが m-barreled locally convex algebra $\Rightarrow$ Gel'fand map は連続.

証明. $A \subset S(E)$ が compact $\Rightarrow$ A°は m-barrel で 0 の近傍. 故に $A^{\circ\circ}$ ($\supseteq A$) は E'の equicontinuous subset である.

§6. ε-product に関するスペクトル.

E, Fを locally convex space とし, , E'_cは E内の compact な disc 上での一様収束の位相を与えられたEの dual space E'とし, $\mathcal{L}(E'_c, F)$ は, $E'_c \longrightarrow F$ への連続な線形写像のベクトル空間とし, $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, F)$は$E'$内の linear functionals の equicontinuous sets 上での一様収束の位相を与えられた$\mathcal{L}(E'_c, F)$とする.

ここでは ε-product の定義を

$$E \varepsilon F = \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, F) = \mathcal{L}_\varepsilon(F'_c; E), \quad (\text{cf } [2], [11])$$

とする(後の$=$は isomorphism の意味).

$\mathcal{F}$は second countable topological space 上の topological sheaf とし, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ は U上の$\mathcal{F}$の連続な)横断の空間を表わす. このとき, $\mathcal{F} \varepsilon E$は presheaf $\{\Gamma(U, \mathcal{F}) \varepsilon E,\ U \subset X \text{ open}\}$ によって定義されたX上

の sheaf とする. 次の命題より $\mathcal{F}\varepsilon E$ は 又 topological sheaf であることがわかる[2].

<u>命題</u>. $\mathcal{F}$ は上に述べたもの, E は locally convex space.

$$\Longrightarrow \quad \Gamma(U, \mathcal{F}\varepsilon E) = \Gamma(U, \mathcal{F})\varepsilon E, \quad {}^{\forall}\text{open } U \subset X.$$

以下では, $(X, \mathcal{O})$ は H. Grauert の意味での complex space で reduced であるとする.

<u>定理 8</u>. [8]. $(X, \mathcal{O})$ を Stein space とし, E は complete locally m-convex algebra, $\mathfrak{S}(E)$ は locally equicontinuous であるとする,

$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{S}(\Gamma(X, \mathcal{O}\varepsilon E)) = X \times \mathfrak{S}(E).$$

証明. open set $U \subset X$ に対して,
$\Gamma(U, \mathcal{O})\varepsilon E = \Gamma(U, \mathcal{O})\hat{\otimes}_{\varepsilon} E$ である (cf. [11]). 前命題より $\Gamma(U, \mathcal{O}\varepsilon E) = \Gamma(U, \mathcal{O})\varepsilon E$ であるから,
$\Gamma(X, \mathcal{O}\varepsilon E) = \Gamma(X, \mathcal{O})\hat{\otimes}_{\varepsilon} E$ を得, したがって結論を得る.

次の定理は (semi-simple) Stein algebras の ε-product が又 (semi-simple) Stein algebra であることを言っている. 定理のみをあげる [8].

<u>定理 9</u>. $(X, {}_X\mathcal{O})$ と $(Y, {}_Y\mathcal{O})$ を complex spaces とする

$$\Longrightarrow \quad \Gamma(X, {}_X\mathcal{O}) \hat{\otimes}_{\varepsilon} \Gamma(Y, {}_Y\mathcal{O}) = \Gamma(X \times Y, {}_X\mathcal{O}\varepsilon {}_Y\mathcal{O}).$$

特に $(X, {}_X\mathcal{O})$ と $(Y, {}_Y\mathcal{O})$ が Stein spaces とする

$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{S}(\Gamma(X \times Y, {}_X\mathcal{O}\varepsilon {}_Y\mathcal{O}) = X \times Y.$$

注意，各節において"="は homeomorphism あるいは topological isomorphism のときにも用いてある．

文献

[1] Bishop E., Holomorphic completions, analytic continuation and the interpolation on semi-norms, Ann. Math. 78 (1963) 468-500

[2] Bungart L. Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas, Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), 317-344.

[3] Forster O., Primärzerlegung in Steinschen Algebren, Math. Ann. 154 (1964).

[4] Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Am. Math. Soc. 1955.

[5] Gunning R.C. and Rossi H., Analytic Functions of Several Complex Variables, Prentice-Hall, 1965.

[6] 一松信，多変数解析函数論，培風館 (1960).

[7] Kahane J.P. and Zelazko W., A characteri-

zation of maximal ideals in commutative Banach algebras, Studia Math. 29(1968) 339-343.

[8] Mallios A., On the spectra of topological algebras, Jour. Functional Anaysis 3(1969) 301 — 309.

[9] ———, On the spectrum of topological tensor product of locally convex algebras, Math. Ann. 154 (1964) 171—180.

[10] Michael E. A., Locally multiplicativelly-convex topological algebras, Mem. Am. Math. Soc. Nr 11 (1952).

[11] Schwartz, L., Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier 7 (1957) 1—141.

[12] Tomiyama J., Tensor product of commutative Banach algebras, Tôhoku Math. Jour. 12 (1960) 147—154.

[13] Wermer J. Banach Algebras and Analytic Functions, Advan. Math. 1 (1961) 51—102