

Title	Slice Algebraについて (関数論と関連する関数解析研究会報告集)
Author(s)	富山, 淳
Citation	数理解析研究所講究録 (1969), 79: 33-43
Issue Date	1969-12
URL	http://hdl.handle.net/2433/108005
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

slice algebra について

山形大 理 富 山 淳

A, B を Banach 代数とし、 A, B の α -ノルムによるテンソル積を $A \otimes_{\alpha} B$ とかく。今 α が Schatten の意味での λ -ノルムより小さくなる $\varphi \in A^*$ に対して $A \otimes_{\alpha} B$ から B への線型写像 R_{φ} を

$$R_{\varphi} \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right) = \sum_{i=1}^n \langle a_i, \varphi \rangle b_i$$

とつくること出来る。 $\psi \in B^*$ に対しても同様に L_{ψ} が

$$L_{\psi} : A \otimes_{\alpha} B \rightarrow A$$

が定義出来る。この時 R_{φ}, L_{ψ} の定義から等式

$$\langle x, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle R_{\varphi}(x), \psi \rangle = \langle L_{\psi}(x), \varphi \rangle$$

が $A \otimes_{\alpha} B$ の任意の元 x に対して成立する。これを Fubini 型の定理とす。

次に α が更に local property をもつとし、Banach 代数 $A_0, B_0, A(\subset A_0), B(\subset B_0)$ に対して $A_0 \otimes_{\alpha} B_0$

$A \otimes B$ が又 Banach 代数にちつて"るものとする。

定義. $A \otimes B$ の Banach 部分代数 S が $A \otimes B$ を含み、任意の $\varphi \in A^*$, $\psi \in B^*$ について $R_\varphi(S) \subset B$, 且つ $L_\psi(S) \subset A$ とちるとき、 $S \in A \otimes B$ の slice algebra と"る。

補題. 1. $S \in A \otimes B$ の slice algebra とし、 $\varphi \in A^*$, $\psi \in B^*$ とすると $\varphi \otimes \psi$ の S 上への product functional の形での拡大は一意的である。

証明. $\tilde{\varphi}, \hat{\varphi}$ を φ の A 上への拡大, $\tilde{\psi}, \hat{\psi}$ を ψ の B 上への拡大とすると、任意の $x \in S$ について

$$\begin{aligned} \langle x, \tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi} \rangle &= \langle R_{\tilde{\varphi}}(x), \tilde{\psi} \rangle = \langle R_{\tilde{\varphi}}(x), \psi \rangle \\ &= \langle R_{\tilde{\varphi}}(x), \hat{\psi} \rangle = \langle x, \tilde{\varphi} \otimes \hat{\psi} \rangle = \langle L_{\hat{\psi}}(x), \tilde{\varphi} \rangle \\ &= \langle L_{\hat{\psi}}(x), \hat{\varphi} \rangle = \langle x, \hat{\varphi} \otimes \hat{\psi} \rangle. \end{aligned}$$

Slice algebra は作用素環のテンソル積にもあつたが、重要な役割を果たすことが予想されるが、ここでは Function algebra のテンソル積での slice algebra の意味を多変数解析関数における Hartogs の定理などを背景に考えてみる。

$A, B \in$ コムパクトな空間 X, Y 上における関数環とする。

このとき A, B の λ -ノルム $\|\cdot\|_\lambda$ による積 $A \otimes_\lambda B$ は自然な意味で $C(X) \otimes_\lambda C(Y) = C(X \times Y)$ の部分環として、 $X \times Y$ 上の関数環と見做す。今 $C(X)$ 上の x による evaluation から ψ を $\psi(x)$ とした関数による対応 $R_x, y \in Y$ による $\psi(y)$ とかくことにすると、容易にわかるように $F(x, y)$ について $R_x(F), L_y(F)$ は関数 F の slice $\{x\} \times Y$ 及び $X \times \{y\}$ への制限関数と見做していい。従って R_x, L_y は homomorphism である。さて R_x, L_y は $R_y (\varphi \in C(X)^*), L_y (\psi \in C(Y)^*)$ の ψ の特別なものであるが、これによって

補題 2. $F \in C(X \times Y)$ によって次のことは同値である。

(i) 任意の $\varphi \in C(X)^*, \psi \in C(Y)^*$ によって

$$R_\varphi(F) \in B \quad \text{且つ} \quad L_\psi(F) \in A$$

(ii) 任意の $x \in X, y \in Y$ によって

$$R_x(F) \in B \quad \text{且つ} \quad L_y(F) \in A$$

(iii) X, Y の dense な集合 Z_1, Z_2 によって

$$R_x(F) \in B \quad \text{且つ} \quad L_y(F) \in A$$

証明。 (iii) から (i) をみる。今ある $\varphi \in C(X)^*$ が存在して $R_\varphi(F) \notin B$ とすると、

$$\exists \psi \in C(Y)^* : \langle B, \psi \rangle = 0, \langle R_\varphi(F), \psi \rangle \neq 0.$$

よって任意の $x \in Z_1$ によって

$$L_y(F)(x) = \langle R_x(F), \psi \rangle = 0$$

$$\Rightarrow L_y(F)(x) = 0 \quad \text{for all } x \in X.$$

しかしこれは

$$\langle L_y(F), \psi \rangle = \langle R_y(F), \psi \rangle \neq 0$$

に矛盾する。よって任意の ψ に対して $R_y(F) \in B$. L_y によって同様に示す。以上から

定理 1. $T = A \otimes_X B$ に対しては最大の slice algebra が存在する。

これを $S_T(X \times Y)$ とかくことにする。

証明. $S_T(X \times Y) = \{ F \in C(X \times Y) \mid \text{任意の } x \in X, y \in Y \text{ に対して } R_x(F) \in B, L_y(F) \in A \}$

とすればよい。

slice algebra についての基本的な課題は $S_T(X \times Y)$ が T と等しくなるかという話でこれは $X \times Y$ 上での連続関数が各変数に対して A, B と同じクラスに限定された連続性(解析性(?)) をもつとき $A \otimes_X B$ に入るかという問題であり、Hartogs の定理との関連が生ずる理由もこの辺にある。そしてこれに似たような形の結果を関数環で求めるのがここでの目的であるが先ず準備として

補題3 $S_T(X \times Y)$ の Silov 境界 $\partial_{S_T(X \times Y)}$ は ∂_T に等しい。従って $\partial_{S_T} = \partial_A \times \partial_B$

証明. $S_T(X \times Y)$ の定義から $\partial_A \times \partial_B$ が境界の一部分であることは容易に明らかであるから上のことが成り立つ。

A, B の maximal ideal の空間を M_A, M_B とし、Gelfand 表現を $f \rightarrow \hat{f}$ であることにする。今 $\omega \in M_A$ について $\omega \in A$ 上の関数と見て $C(X)$ への拡大 $\hat{\omega}$ を考える。 M_B の元についても同様にとけば

補題4. $(\omega_1, \omega_2) \in M_A \times M_B$ とすると $\hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ は $S_T(X \times Y)$ 上 multiplicative である。

証明. $F, G \in S_T(X \times Y)$ に対して

$$\begin{aligned} R_{\hat{\omega}_1}(FG)(y) &= \langle FG, \hat{\omega}_1 \otimes e_y \rangle = \langle L_y(FG), \hat{\omega}_1 \rangle \\ &= \langle L_y(F)L_y(G), \hat{\omega}_1 \rangle = \langle L_y(F), \hat{\omega}_1 \rangle \langle L_y(G), \hat{\omega}_1 \rangle \\ &= R_{\hat{\omega}_1}(F)(y) R_{\hat{\omega}_1}(G)(y) \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } R_{\hat{\omega}_1}(FG) = R_{\hat{\omega}_1}(F)R_{\hat{\omega}_1}(G)$$

このことは $L_{\hat{\omega}_2}$ についても同様である。

$$\begin{aligned} \langle FG, \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2 \rangle &= \langle R_{\hat{\omega}_1}(FG), \hat{\omega}_2 \rangle \\ &= \langle R_{\hat{\omega}_1}(F)R_{\hat{\omega}_1}(G), \hat{\omega}_2 \rangle = \langle R_{\hat{\omega}_1}(F), \hat{\omega}_2 \rangle \langle R_{\hat{\omega}_1}(G), \hat{\omega}_2 \rangle \\ &= \langle F, \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2 \rangle \langle G, \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2 \rangle \end{aligned}$$

ここで補題1によつて $\hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ は $S_T(X \times Y)$ 上一意にき
 まるが、この対応 $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ は以下に示すように連続
 積に落ちるから、 $M_A \times M_B$ は $S_T(X \times Y)$ の極大イデアル空間の
 部分空間と見とるこゝが出来る。

$M_A \times M_B$ 内で今 $(\omega_1^a, \omega_2^a) \rightarrow (\omega_1, \omega_2)$ とする。 $\{\hat{\omega}_1^a\}$,
 $\{\hat{\omega}_2^a\}$ をそれぞれ $C(X)$, $C(Y)$ 上へのノルムを保存した拡大汎関数
 の集合とすると、共役空間の単位球の弱コンパクト性から、subnet
 $\{\hat{\omega}_1^{a_p}\}$, $\{\hat{\omega}_2^{a_p}\}$ が存在して $\hat{\omega}_1^{a_p} \rightarrow \varphi$, $\hat{\omega}_2^{a_p} \rightarrow \psi$ と弱収
 束する。これから $\varphi|_A = \omega_1$, $\psi|_B = \omega_2$, 又 $\hat{\omega}_1^{a_p} \otimes \hat{\omega}_2^{a_p}$ は
 $\varphi \otimes \psi$ に弱収束するから補題1より $S_T(X \times Y)$ 上では

$$\hat{\omega}_1^{a_p} \otimes \hat{\omega}_2^{a_p} \rightarrow \hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$$

以上のことは又 $\{\omega_1^a\}$, $\{\omega_2^a\}$ の任意の subnet についても、これを
 抽出系として言えるから結局 $\hat{\omega}_1^a \otimes \hat{\omega}_2^a$ は $S_T(X \times Y)$ 上
 $\hat{\omega}_1 \otimes \hat{\omega}_2$ に弱収束する。

$$\text{系. } \widehat{S_T(X \times Y)}|_{M_A \times M_B} = S_T(M_A \times M_B)$$

$$\text{又 } S_T(M_A \times M_B)|_{X \times Y} = S_T(X \times Y)$$

以下 $A, B \in \mathcal{I}$ の silov 境界 ∂_A, ∂_B 上 T maximal
 algebra にちつてゐるものとす。

補題5. $A, B \in X, Y$ 上の内積環とすると, $\partial_A \subsetneq X, \partial_B \subsetneq Y$ とする. $F \in C(X \times Y)$ によって $T[F] \in F$ と $T = A \otimes B$ によって生成された内積環とすると, $\partial_{T[F]} = \partial_T$ となる

$$F|_{\partial_T} \in S_T(\partial_T)$$

証明. $x_0 \in A$ の Choquet 境界の点とする. $R_{x_0}(F)$ と B によって生成された Y 上の内積環を R とする. $\partial_R = \partial_B$ である.

今 ∂_B が R の境界になることを示す.

$$\exists f \in R ; \|f\| > \|f\|_{\partial_B}$$

そこで f は $f = R_{x_0}(G)$ ($G \in T[F]$) とかけるとして

よ. $C(X) \otimes C(Y) = C(X, C(Y))$ とする identification 下

$R_x(G)$ は X 上の連続関数と見とらえるから

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U (x_0 \text{ の近傍}) ; \|R_x(G) - R_{x_0}(G)\| < \varepsilon \text{ for } x \in U.$$

よって $\varepsilon \in \|f\| - \|f\|_{\partial_B}$ より $\delta < \varepsilon$ とする. x_0 が Choquet 境界の点であるから

$$\exists g \in A ; g(x_0) = \|g\| = 1 \text{ 且 } |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\|G\|} \text{ in } \partial_A \text{ (} X \sim U \text{)}$$

$$H = G(g \otimes 1) \in T[F] \text{ によって}$$

$$(x, y) \in \{\partial_A \sim U\} \times \partial_B \text{ のとき}$$

$$|H(x, y)| = |G(x, y)| |g(x)| \leq \|G\| \frac{\varepsilon}{\|G\|} = \varepsilon$$

$$(x, y) \in \partial_A \cap U \times \partial_B \text{ のとき}$$

$$|H(x, y)| \leq |G(x, y)| \leq \|R_x(G)\|_{\partial_B} \leq \|R_{x_0}(G)\|_{\partial_B} + \varepsilon$$

従って $\partial_{T[F]} = \partial_T$ となる

$$\begin{aligned} \|H\| &\leq \|R_{x_0}(G)\|_{\partial_B} + \varepsilon = \|f\|_{\partial_B} + \varepsilon < \|f\| = \|R_{x_0}(G)\| \\ &= \|R_{x_0}(H)\| \leq \|H\| \end{aligned}$$

よって ∂_B は R の境界となり $\partial_R = \partial_B$. しかるに B は Y 上では relative maximal algebra になつてゐるから $B = R$ i.e. $R_{x_0}(F) \in B$, 同様に任意の B の Choquet 境界の z に対して $L_z(F) \in A$. よって補題 2 から

$$F|_{\partial_A \times \partial_B} \in S_T(\partial_A \times \partial_B)$$

定理 2. $A, B \in X, Y$ 上の圈教環で ∂_A, ∂_B 上では maximal algebra になつてゐるものとする. 今 ∂_A, ∂_B が X, Y の proper 部分集合になつてゐるならば, $S_T(X \times Y)$ は relative maximal algebra である.

証明. 圈教環 $S \supset S_T(X \times Y)$, $\partial_S = \partial_{S_T(X \times Y)} = \partial_T$ であり $F \in S$ とすると, $\partial_{T(F)} = \partial_T$. よって $F|_{\partial_A \times \partial_B}$ は $S_T(\partial_A \times \partial_B)$ に入る. しかるに補題 4 の系から

$$S_T(X \times Y)|_{\partial_A \times \partial_B} = S_T(\partial_A \times \partial_B).$$

よって $F|_{\partial_A \times \partial_B}$ は $S_T(X \times Y)$ の圈教に拡大出来るがこれは F 自身に行かなくてはならない.

以上の証明からわかるように $S_T(M_A \times M_B)$ は $\partial_A \times M_B \cup M_A \times \partial_B$ を含む任意の圈集合上で relative maximal

algebra に存在することが言える。

$A_1 \in$ Disk algebra としたとき、 C^n 内の polycylinder D^n 上連続で、内部で解析的な関数全体のつくる代数 A_n は $n \times n$ の A_1 と同値と見做す。よく知られたこととして $\Gamma \in D^n$ の topological boundary を含む任意の閉集合としたとき $A_n|_{\Gamma}$ は $C(\Gamma)$ の中で relative maximal algebra に存在が成り立つとき $A_n|_{\Gamma} = S_{A_n}(D^n)|_{\Gamma}$ とする事柄によるのである。ここで上記の等式が Hartogs の定理の abstract な構成と見做すことができるがその背景の結果としては次のことが成立する。

$\Gamma \in M_A \times M_B$ 内の閉集合とする。 Γ 上で $A \otimes B$ の関数で局所的に近似出来る関数 $\in \Gamma$ 上 $A \otimes B$ -holomorphic な関数と呼びその全体を $H_T(\Gamma)$ であらう。

定理3. $A, B \in$ $\partial A, \partial B$ 上で essential な maximal algebra とする。 $\partial A, \partial B \in M_A, M_B$ の proper な部分集合とするとき $\Gamma = \partial A \times M_B \cup M_A \times \partial B$ に対して $H_T(\Gamma) = S_{\Gamma}(M_A \times M_B)|_{\Gamma}$

証明. $(x_0, y_0) \in \partial A \times M_B$ をとる。今 x_0 の近傍 U を $U \subset \partial A$ とすると $\overline{AU} = C(U)$ 。 V を y_0 の任意の近傍とす

3. このとき $F \in S_T(M_A \times M_B)$ かつ $F|_{\partial A \times \partial B} \in \overline{T|_{\partial A \times \partial B}}$ とするところをいふ。

$$\begin{aligned} \overline{T|_{\partial A \times \partial B}} &= \overline{(A \otimes B|_{\partial A \times \partial B})} \supset (\overline{A|_{\partial A}}) \otimes (\overline{B|_{\partial B}}) \\ &= C(\overline{\partial A}) \otimes (\overline{B|_{\partial B}}) = C(\overline{\partial A}, \overline{B|_{\partial B}}) \end{aligned}$$

一方 $x \rightarrow R_x(F) \in B$ は M_A 上の連続関数である。 $\delta > \tau$ 以上のことから $F|_{\partial A \times \partial B} \in C(\overline{\partial A}, \overline{B|_{\partial B}})$ i.e. $F|_{\partial A \times \partial B} \in \overline{T|_{\partial A \times \partial B}}$.

$(x_0, y_0) \in M_A \times \partial B$ の時も同様であるから

$$S_T(M_A \times M_B)|_{\Gamma} \subset H_T(\Gamma). \quad \text{次に}$$

$F \in H_T(\Gamma)$ とすると任意の $x \in \partial A$, $y \in \partial B$ に対して

$$R_x(F) \in H_B(M_B), \quad L_y(F) \in H_A(M_A). \quad \delta > \tau$$

$$\begin{aligned} \sup_{\partial A \times \partial B} |F(x, y)| &= \sup_{\partial A} \sup_{M_B} |R_x(F)(y)| = \sup_{\partial A} \sup_{\partial B} |R_x(F)(y)| \\ &= \sup_{\partial A \times \partial B} |F(x, y)| \end{aligned}$$

同様に

$$\sup_{M_A \times \partial B} |F(x, y)| = \sup_{\partial A \times \partial B} |F(x, y)|$$

$$\text{i.e.} \quad \partial_{H_T}(\Gamma) = \partial_T \quad \text{従って} \quad S_T(M_A \times M_B)|_{\Gamma} = H_T(\Gamma)$$

尚 \sup の等式の右辺は Rickart [3] の結果。又 $\delta > \tau$ とし \hat{g} lichberg [2] に $\delta > \tau$ $H_A(M_A) = \hat{A}$, $H_B(M_B) = \hat{B}$ が得られたことに注意する。

註 1. 定理 3 は A, B に essential とした仮定を省くことも成立する。

註 2. Slice algebra の名は Bivitel [1] による。[1] では定理 2 と 3 が表現空間 (M_A, M_B) が metrizable の時に証明されているが、定理のつべ方に証明にも不正確さや誤りが多い。

文献

1. F. T. Bivitel; Products of maximal function algebras.
Tulane 大学での Function algebra についての Symposium 報告 (1965)
2. I. Glicksberg; Maximal algebras and a theorem of Radó, Pacific J. Math., 14 (1964), 919-941
3. C. E. Rickart; Analytic phenomena in general function algebras, Pacific J. Math. 18 (1966), 361-377
4. N. Mochizuki; The tensor product of function algebras
Tohoku Math. J., 17 (1965), 139-146
5. J. Tomiyama; Tensor products of commutative Banach algebras, Tohoku Math. J., 12 (1960), 147-154
6. ———; Applications of Fubini type theorem to the tensor products of C^* -algebras; Tohoku Math. J., 19 (1967), 213-226