数理解析研究所講究録
第80巻 1970年 34-44

乱流の確率汎函数方程式と一点、二点分布函数方程式との関係について

都立大 理学部　永 倉 俊 充

§1. 乱流の確率汎函数方程式

流体等のdeterministic mechanical system の諸量を一括して一つのvector $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ で示し

$$u_\rho \equiv \rho, \; u_x \equiv v_x, \; u_y \equiv v_y, \; u_z \equiv v_z, \; u_E \equiv e, \; \cdots\cdots.$$

とする。この変化が

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{L}^*(\mathbf{u}) \quad , \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t_0) \tag{1}$$

で与えられるとき，この系のensembleを考え，$\mathbf{u}$ が $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ と $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)+d\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ の間にあるprobabilityを

$$\int P(\mathbf{u},t)\,d\Omega \quad , \quad \int P(\mathbf{u},t)\,d\Omega = 1 \tag{2}$$

とする。$d\Omega$ は $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ のfunctional spaceのvolume elementであり $P(\mathbf{u},t)$ が確率汎函数である。

$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ の上記(1)に従うdeterministic changeに対しprobabibityはconserveされるべき故，$t=t_0$ の量に脚符0をつけて示すと

$$P d\Omega = \mathrm{const} = P_0\, d\Omega_0 \quad , \quad \left(\frac{dP\,d\Omega}{dt}\right)_{\mathbf{r}} = 0 \quad , \tag{3}$$

が成立しなければならない。但し $(d/dt)_{\mathbf{r}}$ は $\mathbf{u}$ を $\mathbf{r}$, t の函数と見て，$\mathbf{r}$ を固定しての微分である。

$\mathbf{r}$ の所のvolume element $d\mathbf{r}$ の部分の $\mathbf{u}$ が $d\mathbf{u}$ だけ変化したときの P の変化を $(\delta P/\delta \mathbf{u})_{\mathbf{r}}\, d\mathbf{r}$ とし

$$\mathbf{A}\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{u}} = \sum_\lambda \int A_\lambda \left(\frac{\delta P}{\delta u_\lambda}\right)_{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \tag{4}$$

とおくと次式が成立する。

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{\mathbf{r}}=\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\frac{\delta P}{\delta \mathbf{u}}=\frac{\partial P}{\partial t}+\mathbf{L}^{*}\frac{\delta P}{\delta \mathbf{u}} \tag{5}$$

また $d\Omega$ の変化に対しては compressible flow の連続関係と同様

$$\frac{dd\Omega}{dt}=\frac{\delta \dot{\mathbf{u}}}{\delta \mathbf{u}}d\Omega=\frac{\delta \mathbf{L}^{*}}{\delta \mathbf{u}}d\Omega \tag{6}$$

が成立する。但し

$$\frac{\delta \mathbf{F}}{\delta \mathbf{u}}\equiv\sum_{\lambda}\int\left(\frac{\delta F_{\lambda}}{\delta \mathbf{u}_{\lambda}}\right)_{\mathbf{r}}d\mathbf{r} \tag{7}$$

とおいている。

(5), (6) 式を (3) の第2式に入れると Liouville の定理に相当する次の確率汎函数方程式が得られる。

$$\underline{\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\delta \mathbf{L}^{*}P}{\delta \mathbf{u}}=0} \tag{8}$$

任意の量 $G(\mathbf{u})$ の $\mathbf{r}$, t に於ける ensemble mean $\overline{G}(\mathbf{r}, t)$ は次のように考えられる。

$$\overline{G}(\mathbf{r}, t)\equiv\int G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}}P(\mathbf{u}, t)\,d\Omega=\int G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}}P_0\,d\Omega_0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial t}=\int G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}}\frac{\partial P}{\partial t}d\Omega=-\int G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}}\frac{\delta \mathbf{L}^{*}P}{\delta \mathbf{u}}d\Omega=\int\left(\mathbf{L}^{*}\frac{\delta G}{\delta \mathbf{u}}\right)_{\mathbf{r}}P\,d\Omega$$

$$\underline{\therefore\quad\int\left\{G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}}\frac{\partial P}{\partial t}-\left(\mathbf{L}^{*}\frac{\delta G}{\delta \mathbf{u}}\right)_{r}P\right\}d\Omega=0} \tag{10}$$

$G(\mathbf{u})$ として $\mathbf{u}$ をとると，(1) 式の ensemble mean に相当する moment eq. が得られ次のようになる。

$$\int\left(\mathbf{u}_{\mathbf{r}}\frac{\partial P}{\partial t}-\mathbf{L}_{\mathbf{r}}^{*}P\right)d\Omega=0 \tag{11}$$

但し $(\quad)_{\mathbf{r}}$ 等は $\mathbf{r}$ に於ける値を示す。

§ 2. Hopfの汎函数方程式との関係

Pを$\mathbf{u}$の functional space でFourier transform したものを$\Phi(\mathbf{y}, t)$とおく。

即ち

$$(\mathbf{y}\mathbf{u}) \equiv \sum_{\lambda} \int y_{\lambda}(\mathbf{r}) u_{\lambda}(\mathbf{r}, t)\, d\mathbf{r} \tag{12}$$

とおき次のようにとる。

$$\Phi(\mathbf{y}, t) \equiv \int e^{i(\mathbf{y}\mathbf{u})} P d\Omega . \tag{13}$$

(9)式の$G(\mathbf{u})$として$e^{i(\mathbf{y}\mathbf{u})}$を入れた形になっている故(10)式から次式が成立する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int \mathbf{L}^{*} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{u}} P d\Omega = \int i\,(\mathbf{y}\mathbf{L}^{*})\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{u})} P d\Omega . \tag{14}$$

$\mathbf{r}_j$の所で$\triangle \mathbf{r}$なるvolume element の部分の$\mathbf{y}$が$d\mathbf{y}$変ったときのΦの変化に対し次式が成立する。

$$\left(\frac{\delta \Phi}{i\,\delta \mathbf{y}}\right)_{\mathbf{r}_j} = \int \mathbf{u}(\mathbf{r}_j)\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{u})} P d\Omega . \triangle \mathbf{r} . \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}(j)} \left(\frac{\delta \Phi}{i\,\delta \mathbf{y}}\right)_{\mathbf{r}_j} = \int \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}_j)}{\partial x_{\lambda}(j)}\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{u})} P d\Omega . \triangle \mathbf{r} . \tag{15'}$$

$\mathbf{L}^{*}$は$\mathbf{u}$, $\partial u_{\lambda} / \partial x_{\nu}$, $\partial^2 u_{\lambda} / \partial x_{\mu} \partial x_{\nu}$, $\mathbf{r}$ の函数である故 $\mathbf{L}^{*} = \mathbf{L}^{*}(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ と記すと(14)は次のようにおける。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int i\,\mathbf{y}\mathbf{L}^{*}\left(\frac{\delta}{i\,\delta \mathbf{y}}, \mathbf{r}\right) \Phi\, d\mathbf{r} , \tag{16}$$

これはHopf(1)の汎函数方程式に外ならない。

§ 3. One point distribution function $f(\mathbf{r}, \mathbf{w}, t)$

$P(\mathbf{u}, t)$はinitial の値が決まればそれ以後の値は(1)式に従うdeterministic な関係で決り何等統計論的な要素ははいらない。場所を一点或は何個所かにfixして着目し，そこに於ける$\mathbf{u}$の値が例えば$\mathbf{w}$である確率を考えることによって始めて統計的な意味がある。Pはそのときの

ensemble の分布を与えていることになる。

$\mathbf{r}$, t に於ける $\mathbf{u}$ の値が $\mathbf{w}$ である probability を与える $\mathbf{u}$ の distribution function を次のようにとる

$$\underline{f(\mathbf{r},\mathbf{w},t)\equiv\int\delta(\mathbf{w}-\mathbf{u}(\mathbf{r}))Pd\Omega} \tag{17}$$

但し $\delta(\mathbf{w}-\mathbf{u})\equiv\prod_\lambda\delta(w_\lambda-u_\lambda)$ とおいている。(10) 式で $G(\mathbf{u})$ として上記 δ−function を入れると f の満足すべき方程式として次式が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\int\left\{\mathbf{L}^*\frac{\partial\delta(\mathbf{w}-\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}\right\}_{\mathbf{r}}Pd\Omega=0 \tag{18}$$

但し $\{\quad\}_{\mathbf{r}}$ は $\mathbf{r}$ に於ける値をとることを示す。

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\rho\mathbf{L}^*\equiv-\rho\mathbf{v}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{r}}+\mathbf{L}\quad,\quad\rho L_\rho=-\rho^2\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{r}}\quad, \tag{19}$$

とおけるときについて f の式を具体化すると次のようになる。

$$\underline{\frac{\partial w_\rho f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(w_\rho\mathbf{w}_{\mathbf{v}}f)+\frac{\partial}{\partial\mathbf{w}}\int\{\mathbf{L}\delta(\mathbf{w}-\mathbf{u})\}_{\mathbf{r}}Pd\Omega=0\ .} \tag{20}$$

但し $\mathbf{w}_v$ は $\mathbf{v}$ の指定値 $\mathbf{w}$ を示している。また

$$\int\{G(\mathbf{u})\delta(\mathbf{w}-\mathbf{u})\}_{\mathbf{r}}Pd\Omega=G(\mathbf{w})f(\mathbf{r},\mathbf{w},t) \tag{21}$$

の成立することを用いた。更に $G(\mathbf{w})$ の mean をとると

$$\begin{aligned}\underline{\overline{G}(\mathbf{r},t)\equiv\int G(\mathbf{w})f(\mathbf{r},\mathbf{w},t)d\mathbf{w}}&=\iint G(\mathbf{w})\delta(\mathbf{w}-\mathbf{u})_{\mathbf{r}}d\mathbf{w}Pd\Omega\\&=\underline{\int G(\mathbf{u})_{\mathbf{r}}Pd\Omega}\ .\end{aligned} \tag{22}$$

となり (9) に求めた ensemble mean と一致する。また (20) 式を $\mathbf{w}$ について積分すると

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\rho\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{r}}=0 \tag{23}$$

$\mathbf{w}_\lambda$ を掛けて積分すると

$$\frac{\partial\overline{\rho u_\lambda}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\overline{\rho\mathbf{v}v_\lambda})-\overline{F}_\lambda=0\quad,\quad\overline{F}_\lambda\equiv\int(L_\lambda)_{\mathbf{r}}Pd\Omega. \tag{24}$$

が成立し (10) で $G(\mathbf{u})=\rho\mathbf{u}$ としたmoment eq. になる。

§ 4. s-point distribution function $f^{(s)}(\mathbf{r}^{(1)},\mathbf{w}^{(1)},\cdots\mathbf{r}^{(s)},\mathbf{w}^{(s)})$.

$\mathbf{r}^{(i)}$ $(i=1, 2\cdots s)$ に於ける $\mathbf{u}(\mathbf{r}^{(i)})=\mathbf{u}^{(i)}$ の値が $\mathbf{w}^{(i)}$ である distribution function を次のようにとる。

$$f^{(s)}(\mathbf{r}^{(1)},\mathbf{w}^{(1)},\cdots,\mathbf{r}^{(s)},\mathbf{w}^{(s)})\equiv\int\delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}^{(1)})\,\delta(\mathbf{w}^{(2)}-\mathbf{u}^{(2)})\cdots\delta(\mathbf{w}^{(s)}-\mathbf{w}^{(s)})\,Pd\Omega \tag{25}$$

$G=\prod_{j=1}^{s}\rho^{(j)}\delta(\mathbf{w}^{(j)}-\mathbf{u}^{(j)})$ ととると(18)式は

$$\frac{\partial w_\rho^{(1)}\cdots w_\rho^{(s)}f^{(s)}}{\partial t}-\sum_{i=1}^{s}\int\mathbf{L}^{*(i)}\frac{\partial\prod_{j=1}^{s}\rho^{(j)}\delta(\mathbf{w}^{(j)}-\mathbf{u}^{(j)})}{\partial\mathbf{u}^{(i)}}Pd\Omega=0$$

となり $\mathbf{L}^*$ が(19)の形のとき $f^{(s)}$ の式は次のようになる。

$$\frac{\partial w_\rho^{(1)}\cdots w_\rho^{(s)}f^{(s)}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_i}(w_\rho^{(1)}\cdots w_\rho^{(s)}f^{(s)}) \tag{26}$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial}{\partial\mathbf{w}^{(i)}}\int\mathbf{L}^{(i)}\rho^{(1)}\cdots\rho^{(s)}\delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}^{(1)})\cdots\delta(\mathbf{w}^{(s)}-\mathbf{u}^{(s)})\,Pd\Omega=0$$

$f^{(s)}$ は次の関係を満足する

Separation property, $\lim_{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to\infty}f^{(2)}(\mathbf{r}^{(1)},\mathbf{w}^{(1)},\mathbf{r}^{(2)},\mathbf{w}^{(2)},t)=f(\mathbf{r}^{(1)},\mathbf{w}^{(1)},t)\,f(\mathbf{r}^{(2)},\mathbf{w}^{(2)},t)$ (27)

reduction property.

$$\lim_{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to 0}f^{(2)}(\mathbf{r}^{(1)},\mathbf{w}^{(1)},\mathbf{r}^{(2)},\mathbf{w}^{(2)},t)$$

$$=\lim_{\triangle\mathbf{r}\to 0}\int\delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}(\mathbf{r}_1))\,\delta(\mathbf{w}^{(2)}-\mathbf{u}(\mathbf{r}_1+\triangle\mathbf{r}))\,Pd\Omega=f(\mathbf{r}_1^{(1)},\mathbf{w}_1^{(1)},t)\,\delta(\mathbf{w}_2-\mathbf{w}_1) \tag{28}$$

$$\int\frac{\partial G(\mathbf{u}^{(1)})}{\partial\mathbf{r}^{(1)}}\delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}^{(1)})Pd\Omega=\lim_{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|\to 0}\frac{1}{\triangle\mathbf{r}}\int\{G(\overset{\mathbf{u}^{(2)}}{\mathbf{r}^{(1)}+\triangle\mathbf{r}})-G(\overset{\mathbf{u}^{(1)}}{\mathbf{r}^{(1)}})\}\,\delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}^{(1)})\,Pd\Omega$$

$$=\lim_{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|\to 0}\int\int G(\mathbf{w}^{(2)})\{\delta(\mathbf{w}_2^{(2)}-\mathbf{u}^{(2)})-\delta(\mathbf{w}^{(2)}-\mathbf{u}^{(1)})\}\,d\mathbf{w}^{(2)}\,\delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}^{(1)})\,Pd\Omega$$

$$=\lim_{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|\to 0}\int G(\mathbf{w}^{(2)})\frac{\partial f^{(2)}(\mathbf{r}_1^{(1)},\mathbf{w}_1^{(1)},\mathbf{r}^{(2)},\mathbf{w}_1^{(2)},t)}{\partial\mathbf{r}^{(2)}}d\mathbf{w}^{(2)} \tag{29}$$

$$\int\frac{\partial^2 G(\mathbf{u}^{(1)})}{\partial\mathbf{r}^{(1)}\partial\mathbf{r}^{(1)}}\delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}^{(1)})Pd\Omega=\lim_{\mathbf{r}^{(2)}\to\mathbf{r}^{(1)}}\int G(\mathbf{w}^{(2)})\frac{\partial^2 f^{(2)}(\mathbf{r}_1^{(1)},\mathbf{w}_1^{(1)},\mathbf{r}_1^{(2)},\mathbf{w}^{(2)})}{\partial\mathbf{r}^{(2)}\partial\mathbf{r}^{(2)}}d\mathbf{w}^{(2)} \tag{30}$$

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \mathbf{r}^{(1)}} \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \mathbf{r}^{(1)}} \delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}^{(1)}) P d\Omega \tag{31}$$

$$= \lim_{\substack{\mathbf{r}^{(2)} \to \mathbf{r}^{(1)} \\ \mathbf{r}^{(3)} \to \mathbf{r}^{(1)}}} \int \mathbf{w}^{(2)} \mathbf{w}^{(3)} \frac{\partial^2 f^{(3)}(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{w}_1^{(1)}, \mathbf{r}_1^{(2)}, \mathbf{w}_1^{(2)}, \mathbf{r}_1^{(3)}, \mathbf{w}^{(3)})}{\partial \mathbf{r}^{(2)} \partial \mathbf{r}^{(3)}} d\mathbf{w}^{(2)} d\mathbf{w}^{(3)}$$

$$\iint G(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{u}^{(2)})\, d\mathbf{r}^{(2)} \delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}^{(1)}) P d\Omega \tag{32}$$

$$= \iint G(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{w}_1^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)})\, f^{(2)}(\mathbf{r}_1^{(1)}, \mathbf{w}_1^{(1)}, \mathbf{r}_1^{(2)}, \mathbf{w}_1^{(2)}, t)\, d\mathbf{r}^{(2)} d\mathbf{w}^{(2)}$$

§5. 流体の場合の f の方程式の具体的な形

a) Incompressible flow[2]

ρ = const. 故変数から外す。温度も考えないとすると，$\mathbf{u}$ としては vel. $\mathbf{v}$ だけをとればよく

$$\mathbf{L} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} + \mu \Delta \mathbf{v}\ , \tag{33}$$

となり，$\rho(\partial \mathbf{v}/\partial t) = -(\rho \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}})\mathbf{v} - (\partial p/\partial \mathbf{r}) + \mu \Delta \mathbf{v}$ から

$$\triangle p = -\sum_{\nu} \rho \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathbf{v} v_\nu}{\partial \mathbf{r}} \qquad \therefore\ p = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathbf{v} v_\nu}{\partial \mathbf{r}} \right)' d\mathbf{r}'$$

が得られる。従って f の式は次のようになる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w} f}{\partial \mathbf{r}} - \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial w_\lambda} \int \sum_{\mu,\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{w_\mu^{(2)} w_\nu^{(2)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \frac{\partial^2 f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathbf{r}', \mathbf{w}^{(2)}, t)}{\partial x_\mu' \partial x_\nu'} d\mathbf{r}' d\mathbf{w}^{(2)}$$

$$+ \mu \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial w_\lambda} \lim_{\mathbf{r}' \to \mathbf{r}} \int w_\lambda^{(2)} \sum_{\nu} \frac{\partial^2 f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{w}, \mathbf{r}', \mathbf{w}^{(2)}, t)}{\partial^2 x_\nu'^2} d\mathbf{w}^{(2)} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(1)} f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}^{(1)}} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(2)} f^{(2)}}{\partial \mathbf{r}^{(2)}} + \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(1)}} \int \left(-\frac{\partial p}{\partial x_\nu} + \mu \Delta v_\nu \right)^{(1)} \delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}^{(1)}) \delta(\mathbf{w}^{(2)}-$$

$$\mathbf{u}^{(2)}) P d\Omega + \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(2)}} \int \left(-\frac{\partial p}{\partial x_\nu} + \mu \Delta v_\nu \right)^{(2)} \delta(\mathbf{w}^{(1)}-\mathbf{u}^{(1)}) \delta(\mathbf{w}^{(2)}-\mathbf{u}^{(2)}) P d\Omega = 0\ . \tag{35}$$

b) Compressible flow

$$
\left.\begin{aligned}
&p=\rho(\gamma-1)e\,,\quad e\equiv C_v T\,,\quad L_\rho=-\rho^2\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}\\
&L_{v,\lambda}=-\frac{\partial p}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mu\left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial \mathbf{r}}+\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_\lambda}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\mu\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}\equiv\frac{\partial \mathbf{k}_\lambda}{\partial \mathbf{r}}\\
&L_e=\sum_\lambda \mathbf{k}_\lambda\frac{\partial v_\lambda}{\partial \mathbf{r}}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{\lambda}{C_v}\frac{\partial e}{\partial \mathbf{r}}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad (36)
$$

ととればよく，fの式は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial w_\rho f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(w_\rho \mathbf{w}_v f)-\frac{\partial}{\partial w_\rho}\lim_{\mathbf{r}'\to\mathbf{r}}\int w_\rho^{(2)}\mathbf{w}_v^{(2)}\frac{\partial f^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{w},\mathbf{r}',\mathbf{w}^{(2)},t)}{\partial \mathbf{r}'}d\mathbf{w}^{(2)}\\
&+\sum_\nu\frac{\partial}{\partial w_{v,\nu}}\lim_{\mathbf{r}'\to\mathbf{r}}\int\Big\{-(\gamma-1)\,w_\rho^{(2)}w_e^{(2)}\frac{\partial}{\partial x'_\nu}+\mu\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\left(w_{v,\nu}^{(2)}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}+\mathbf{w}_v^{(2)}\frac{\partial}{\partial x'_\nu}\right)\\
&-\frac{2}{3}\mu\mathbf{w}_v^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}'\partial x'_\nu}\Big\}f^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{w},\mathbf{r}',\mathbf{w}^{(2)},t)\,d\mathbf{w}^{(2)}\\
&-\frac{\partial}{\partial w_e}\lim_{\mathbf{r}'\to\mathbf{r}}\int\frac{\lambda}{C_v}w_e^{(2)}\frac{\partial^2 f^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{w},\mathbf{r}',\mathbf{w}^{(2)},t)}{\partial \mathbf{r}'^2}d\mathbf{w}^{(2)}\\
&+\frac{\partial}{\partial w_e}\lim_{\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}}\iint\mu\sum_\nu w_{v,\nu}^{(2)}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}\left(w_{v,\nu}^{(3)}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_3}+\mathbf{w}_v^{(3)}\frac{\partial}{\partial x_{\nu 3}}-\frac{2}{3}\mathbf{w}_\nu^{(3)}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_3}\right)f^{(3)}d\mathbf{w}^{(2)}d\mathbf{w}^{(3)}\\
&+\sum_\nu\frac{\partial}{\partial w_{v,\nu}}\lim_{\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}}\iint\left(\frac{\partial\mu^{(2)}(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}^{(2)}}\mathbf{w}^{(2)}\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}(\text{上 と 同 一})f^{(3)}d\mathbf{w}^{(2)}d\mathbf{w}^{(3)}\\
&-\frac{\partial}{\partial w_e}\lim_{\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}}\iint\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(2)}}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)\mathbf{w}^{(2)}\right)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2}e^{(3)}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_3}f^{(3)}d\mathbf{w}^{(2)}d\mathbf{w}^{(3)}=0
\end{aligned}\qquad (37)
$$

$$f^{(3)}\equiv f^{(3)}(\mathbf{r},\mathbf{w},\mathbf{r}_2,\mathbf{w}^{(2)},\mathbf{r}_3,\mathbf{w}^{(3)},t)$$

非常に複雑となる。気体の場合更に別のモーメントの量をとると精度をあげることになるが，これはその極限を考えると，気体の粒子の速度分布函数を$\mathbf{u}$としてとるとよいことを示す。

§ 6. 粒子系の velocity distribution function をmechanical systemと考える方法

上記のように$\mathbf{u}$即ちu_1，u_2 …… の数を充分にとって精度を高くする極限として，気体論で考える速度分布函数を$\mathbf{u}$としてとることが考えられる。一般の混合気体の場合，α粒子の速度分布の確率関数を$g_\alpha(\mathbf{x},t)$，$\mathbf{x}=(\mathbf{r},\mathbf{v})$，$\mathbf{g}=(g_\alpha, g_\beta, \cdots)$とすると，このmechanical system が

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}=L_\alpha^*\equiv-\frac{\partial \mathbf{v} g_\alpha}{\partial \mathbf{r}}+L_\alpha \quad , \quad L_\alpha\equiv-\frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha}(\mathbf{F}_\alpha g_\alpha). \tag{38}$$

によって定まる場合を考える。但し上式で

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{F}_\alpha=\mathbf{F}_\alpha^{(o)}+\mathbf{F}_\alpha^{(v)}+\mathbf{F}_\alpha^{(c)} \quad , \quad \mathbf{F}_\alpha^{(o)}\equiv \text{system外からの力}\\
&\mathbf{F}_\alpha^{(v)}\equiv\sum_\beta n_{\beta o}\int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')g_\beta(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' ,\\
&\mathbf{F}_\alpha^{(c)}g_\alpha\equiv\sum_\beta n_{\beta o}\int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\left\{g_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x}')-g_\alpha(\mathbf{x})g_\alpha(\mathbf{x}')\right\}d\mathbf{x}'\\
&\int g_\alpha(\mathbf{x})d\mathbf{x}=1 \quad , \quad g_{\alpha\beta}^{(2)}=(1+p_{\alpha\beta})g_\alpha(\mathbf{x})g_\beta(\mathbf{x}')
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

であり$g_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$は２体分布函数，$n_{\beta o}$は$\beta$粒子の平均数密度である。$\mathbf{F}_\alpha$については更に次の関係が一般に成立する。

$$\frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(o)}}{\partial \mathbf{v}}=0 \;, \quad \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(v)}}{\partial \mathbf{v}}=0 \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(c)}}{\partial \mathbf{v}}\neq 0 \tag{40}$$

種々の$\mathbf{g}_0$を含めたensembleを考え，phase spaceの一点$\mathbf{x}$に於ける$\mathbf{g}$の値が$\mathbf{k}$であるdistribution functionを次のようにとる。

$$f(\mathbf{x},\mathbf{k},t)\equiv\int\delta(\mathbf{k}-\mathbf{g})P(\mathbf{g},t)\,d\Omega, \quad \delta(\mathbf{k}-\mathbf{g})\equiv\prod_\beta\delta(k_\beta-g_\beta) \tag{41}$$

只一種の気体に着目すれば

$$f_\alpha(\mathbf{x},k_\alpha,t)\equiv\int\delta(k_\alpha-g_\alpha)P\,d\Omega \tag{42}$$

二種の気体に着目すると

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{x},k_\alpha,k_\beta,t)\equiv\int\delta(k_\alpha-g_\alpha)\delta(k_\beta-g_\beta)P\,d\Omega \tag{43}$$

とおく。また2－point distribution functionは

$$f^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{k},\mathbf{x}';\mathbf{k}',t)\equiv\int\delta(\mathbf{k}-\mathbf{g})\,\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{g}')P\,d\Omega \tag{44}$$

着目気体の種類がα，β等に限定したとき

$$f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, \mathbf{x}' k'_\beta, t) = \int \delta(k_\alpha - g_\alpha)\,\delta(k'_\beta - g'_\beta)\, P d\Omega \tag{45}$$

$$f_{\alpha,\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, \mathbf{x}', k'_\alpha, k'_\beta, t) = \int \delta(k_\alpha - g_\alpha)\,\delta(k'_\alpha - g'_\alpha)\,\delta(k'_\beta - g'_\beta)\, P d\Omega$$

とおく。また

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|\to\infty} f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{x}' \mathbf{k}', t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)\, f(\mathbf{x}', \mathbf{k}', t) \\
&\lim_{\mathbf{x}'\to\mathbf{x}} f^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}, \mathbf{x}', \mathbf{k}', t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)\, \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \\
\therefore\ &\lim_{\mathbf{x}'\to\mathbf{x}} f_{\alpha\alpha}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, x', k'_\alpha, t) = f_\alpha(\mathbf{x}, k_\alpha, t)\, \delta(k'_\alpha - k_\alpha) \\
&\lim_{\mathbf{x}'\to\mathbf{x}} f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, \mathbf{x}', k'_\beta, t) = f_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, k_\alpha, k_\beta, t)
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

等が成立する。f の方程式は次のようになる

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v} f}{\partial \mathbf{r}} + \sum_\alpha \int \frac{1}{m_\alpha}\left(\mathbf{F}_\alpha^{(o)} + \mathbf{F}_\alpha^{(v)}, \frac{\partial g_\alpha}{\partial \mathbf{v}}\right) \frac{\partial \delta(\mathbf{k} - \mathbf{g})}{\partial g_\alpha} P d\Omega$$

$$- \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \int \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(c)} g_\alpha}{\partial \mathbf{v}}\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{g})\, P d\Omega = 0\,. \tag{47}$$

$$\overline{g_\beta}(\mathbf{x}, t) \equiv \int k_\beta f(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)\, dk = \int k_\beta f_\beta(\mathbf{x}, k_\beta, t)\, dk_\beta = \int g_\beta P d\Omega \tag{48}$$

が成立するが，更に

$$\overline{\mathbf{F}}_\alpha^{(v)} \equiv \sum_\beta n_{\beta o} \int F_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') k'_\beta f_\beta(\mathbf{x}', k'_\beta, t)\, dk'_\beta\, d\mathbf{x}' = \sum_\beta n_{\beta o} \int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\, \overline{g}_\beta(\mathbf{x}', t)\, d\mathbf{x}' \tag{49}$$

$$\mathbf{F}_\alpha^{(v,c)} f_\alpha \equiv \sum_\beta n_{\beta o} \int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \left\{ f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, k_\alpha, \mathbf{x}', k'_\beta\, t) \right.$$

$$\left. - f_\alpha(\mathbf{x}, k_\alpha, t)\, f_\beta(\mathbf{x}', k'_\beta, t) \right\} k'_\beta\, dk'_\beta\, d\mathbf{x}' \tag{50}$$

とおくと

$$\int \mathbf{F}_\alpha^{(v)} \delta(k_\alpha - g_\alpha)\, P d\Omega = \overline{\mathbf{F}}_\alpha^{(v)} f_\alpha + \sum_\beta n_{\beta o} \int \mathbf{F}_{\alpha\beta}(x, x')\, (g_\beta - \overline{g}_\beta)_{\mathbf{x}'}\, \delta(k_\alpha - g_\alpha)\, P d\Omega$$

$$= \overline{\mathbf{F}}_\alpha^{(v)} f_\alpha + \mathbf{F}_\alpha^{(vc)} f_\alpha$$

となり，f_α の式は次のようになる

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v} f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{F}_\alpha^{(o)} + \overline{\mathbf{F}}_\alpha^{(v)}) f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(vc)} f_\alpha}{\partial \mathbf{v}}$$

$$- \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \int \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^{(c)} g_\alpha}{\partial \mathbf{v}}\, \delta(k_\alpha - g_\alpha)\, P d\Omega = 0 \tag{51}$$

k_αについてのmoment eq.を求めると$\mathbf{g}_\alpha$の式が得られ

$$\frac{\partial\overline{g}_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{v}\overline{g}_\alpha}{\partial\mathbf{r}}+\frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}(\mathbf{F}_\alpha^{(o)}+\overline{\mathbf{F}}_\alpha^{(v)})\overline{g}_\alpha$$

$$+\frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial\overline{\mathbf{F}_\alpha^{(vc)}g_\alpha}}{\partial\mathbf{v}}+\frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial\overline{\mathbf{F}_\alpha^{(c)}g_\alpha}}{\partial\mathbf{v}}=0\,. \tag{52}$$

$$\overline{\mathbf{F}_\alpha^{(c)}g_\alpha}\equiv\int\mathbf{F}_\alpha^{(c)}k_\alpha f_\alpha dk_\alpha=\int\mathbf{F}_\alpha^{(c)}g_\alpha P d\Omega\ ,$$

$$\overline{\mathbf{F}_\alpha^{(vc)}g_\alpha}\equiv\int\mathbf{F}_\alpha^{(vc)}k_\alpha f_\alpha dk_\alpha=\sum_\beta n_{\beta o}\int\mathbf{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\{\overline{g_\alpha(\mathbf{x})g_\beta(\mathbf{x}')}-\overline{g_\alpha(\mathbf{x})}\,\overline{g_\beta(\mathbf{x}')}\}d\mathbf{x}'\,.$$

となる。$f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x},k_\alpha,\mathbf{x}',k_\beta',t)$の式は次のようになる。

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{v}f_{\alpha\beta}^{(2)})+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}'}(\mathbf{v}'f_{\alpha\beta}^{(2)})+\frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}(\mathbf{F}_\alpha^{(o)}+\overline{\mathbf{F}_\alpha^{(v)}})f_{\alpha\beta}^{(2)}$$

$$+\frac{1}{m_\beta}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}'}(\mathbf{F}_\beta^{(o)}+\overline{\mathbf{F}}_\beta^{(v)})f_{\alpha\beta}^{(2)}+\frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}(\mathbf{F}_\beta^{(vc2)}f_{\alpha\beta}^{(2)})+\frac{1}{m_\beta}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}'}(\mathbf{F}_\beta^{(vc2)}f_{\alpha\beta}^{(2)})$$

$$-\int\left\{\frac{1}{m_\alpha}\frac{\partial\mathbf{F}_\alpha^{(c)}g_\alpha}{\partial\mathbf{v}}\frac{\partial}{\partial\kappa_\alpha}+\frac{1}{m_\beta}\frac{\partial\mathbf{F}_\beta^{(c)}g_\beta'}{\partial\mathbf{v}'}\frac{\partial}{\partial\kappa_\beta'}\right\}\delta(\kappa_\alpha-g_\alpha)\,\delta(\kappa_\beta'-g_\beta')P d\Omega=0 \tag{53}$$

$$\mathbf{F}_\alpha^{(vc2)}f_{\alpha\beta}^{(2)}\equiv\sum_\beta n_{\beta o}\int\mathbf{F}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{x}'')\{f_{\alpha\beta\gamma}^{(3)}(\mathbf{x},\kappa_\alpha,\mathbf{x}',\kappa_\beta',\mathbf{x}'',\kappa_\gamma'',t)$$

$$-f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x},\kappa_\alpha,\mathbf{x}',\kappa_\beta',t)\,f_\gamma(\mathbf{x}'',\kappa_\gamma'',t)\}\,\kappa_\gamma''d\kappa_\gamma''d\mathbf{x}''\,.$$

$\mathbf{F}_\alpha^{(c)}$はBoltzman型の衝突項と，Fokker–Planck 型の項との和の形で示し得，これを入れて具体化して解くを要するが，今の所求まっていない。

§7. H–theorem.

system全体を粒子の集団と見る立場に立ってensembleを考え，粒子が$\mathbf{x}$の所のVolume element $d\mathbf{x}$にある確率がα粒子について$(\int f_\alpha\kappa_\alpha d\kappa_\alpha)\,d\mathbf{x}$である故，H–functionとしては次のものととるべきである。

$$H\equiv\sum_\alpha\iint f_\alpha\kappa_\alpha\log f_\alpha\kappa_\alpha d\mathbf{k}\,d\mathbf{x}$$

$$=\sum_\alpha\iint f_\alpha\kappa_\alpha\log\kappa_\alpha d\mathbf{k}\,d\mathbf{x}+\sum_\alpha\iint f_\alpha\kappa_\alpha\log f_\alpha d\mathbf{k}\,d\mathbf{x}$$

$$=\sum_\alpha\iint g_\alpha\log g_\alpha P d\Omega\,d\mathbf{x}+\sum_\alpha\iint f_\alpha\kappa_\alpha\log f_\alpha d\mathbf{k}\,d\mathbf{x} \tag{54}$$

$$\therefore \frac{\partial H}{\partial t}=\sum_{\alpha}\iint\frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t}(1+\log g_{\alpha})Pd\Omega d\mathbf{x}+\sum_{\alpha}\iint\frac{\partial f_{\alpha}\kappa_{\alpha}}{\partial t}(1+\log f_{\alpha})\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{x}$$

$$=-\sum_{\alpha}\frac{1}{m_{\alpha}}\iint\frac{\partial \mathbf{F}_{\alpha}^{(c)}g_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}}(1+\log g_{\alpha})Pd\Omega d\mathbf{x}$$

$$-\sum_{\alpha}\frac{1}{m_{\alpha}}\iiint\frac{\partial \mathbf{F}_{\alpha}^{(c)}g_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}}\frac{\partial \kappa_{\alpha}\log f_{\alpha}}{\partial \kappa_{\alpha}}\delta(\kappa_{\alpha}-g_{\alpha})Pd\Omega\, d\kappa_{\alpha}d\mathbf{x}$$

$$\underline{-\sum_{\alpha}\frac{1}{m_{\alpha}}\iiint\frac{\partial \mathbf{F}_{\alpha}^{(vc)}f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}}\kappa_{\alpha}(1+\log f_{\alpha})Pd\Omega\, d\kappa_{\alpha}d\mathbf{x}} \tag{55}$$

となる。第一行はg_{α}なる状態の普通の気体論での$\partial H/\partial t$の平均値になっており，第二行は，粒子の衝突とcollectiveな変動との相互干渉の項であり，第三項はcollective な相互作用によるもので，いづれも2−point distribution function $f_{\alpha\beta}^{(2)}$ が本質的な役割を為している。特に第三項は$\mathbf{F}_{\alpha}^{(vc)}$ が $f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x},\kappa_{\alpha},\mathbf{x}',\kappa_{\beta}',t)-f_{\alpha}(\mathbf{x},\kappa_{\alpha},t)f_{\beta}(\mathbf{x}',\kappa_{\beta}',t)$ の形が効いて来ており$\partial\mathbf{F}_{\alpha}^{(vc)}f_{\alpha}/\partial\mathbf{v}\fallingdotseq 0$のとき$H$の変動に寄与することになる。これらの項での負の判定は$f^{(2)}$の函数形が求まらないと出来ない。今の所これはまだ求まっていない。

文　　献

(1) E. Hopf, J. Rat. Mech. Anal. **1**, 87 (1952).

(2) T. S. Lundgren, Phys. Fluids, **10**, 969 (1967).