数理解析研究所講究録
81巻 1970年 207-234

Fuzzy 代数

水本雅晴，豊田順一，田中幸吉
大阪大学・基礎工学部・電気工学科

あらまし　実際の物理界には，境界のはっきりしない，すなわち，真か偽かをはっきり割り当てることができないあいまいな事柄，現象などが数多くある．L.A.Zadeh[1]は，このようなことを量的に説明するために，membership 関数の概念を導入して，fuzzy 集合なる理論を発展させた．

本報告では，fuzzy 集合の理論に基づいて，fuzzy 代数についての概説を行なった．第1章では fuzzy 集合について，第2章では fuzzy 行列，第3章では多値論理の拡張である連続論理の一種といえる fuzzy 論理についてあらましを述べた．

なお，fuzzy代数に関する議論は，ブール代数の一般化として議論できる．

第1章　Fuzzy集合

実際の物理界でみられる物のクラスには，それを構成する物の基準がはっきり定まっていない，すなわち，あいまいな場合が多くある．たとえば，“1よりもずっと大きい実数のクラス”とか，“美人のクラス”等がそれである．また，“大きい”，“熱い”，“長い”等の形容詞も明らかにあいまいなものである．このようなあいまいに定義されたクラスは，普通の数学的な意味では集合を構成していない．

L.A.Zadeh [1] によって定義されたfuzzy集合の概念は，あいまいに定義されたクラスを，membership関数を導入することにより，数学的に記述しようとしたものである．なお，fuzzy集合は“あいまい集合”とか，“ぼやけ集合”とかに訳される．

fuzzy集合は，普通の集合の拡張として論じられるが，その応用は広範囲にわたるものと思われる．たとえば，人間の思考に関するもの，とりわけ，パターン認識，人工知能，

言語理論，機械翻訳，情報検索，学習理論，システムの同定，制御等に重要な役割りを果すものと思われる．

1.1 fuzzy集合の定義

Xを空間とし，その要素をxと表わす．すなわち$X=\{x\}$．Xにおける<u>fuzzy集合</u>Aとは，

$$A=\{(x,\mu_A(x))\},\ x\in X$$

で表わされる．ここで，関数μ_Aは$\mu_A: X\to M$なる関数で<u>membership関数</u>と名付ける．ただし，Mはmembership空間である．値$\mu_A(x)\in M$は，Aにおけるxの"grade of membership"を表わす．membership空間Mが$\{0,1\}$の場合，membership関数は特性関数となり，fuzzy集合は通常の意味における集合となる．Mは一般には半順序集合，又は束でよいが，ここでは簡単のため$M=[0,1]$なる区間として議論を進めてゆく．値$\mu_A(x)$が1に近ければ，xのAに属する度合（grade）が高いことを示している．

（例題）$A=\{x \mid x\gg 1\}$（Aを1よりもずっと大きい実数のfuzzy集合）とする．Aを特性づけるmembership関数μ_Aは，主観的ではあるが，たとえば，つぎのように与えることが出来る．

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \cdots\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(x-1)^2}} & \cdots\ x > 1 \end{cases}$$

fuzzy集合の演算は，普通の集合の演算の拡張として，つぎのように定義される．

(1) 包含　$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leqq \mu_B(x),\ \forall x \in X.$
(2) 等値　$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$
(3) 和　$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
(4) 交わり　$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_C(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
(5) 補集合　$\bar{A} \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$
(6) 代数積　$C = AB \Leftrightarrow \mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
(7) 代数和　$C = A \oplus B \Leftrightarrow \mu_C(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$
(8) 絶対差　$C = |A - B| \Leftrightarrow \mu_C(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$

（例題１）　"非常に背の高い人"のfuzzy集合は，"背の高い人"のfuzzy集合に含まれる．

（例題２）　fuzzy集合 $A = \{x \mid x \gg 1\}$ の補集合 $\bar{A}$ は $\bar{A} = \{x \mid x \text{ not} \gg 1\}$ である．

図1-1に，membership 関数がそれぞれ μ_A，μ_B である fuzzy 集合A，Bの和，交わり，および代数積の関係を示す．線分1，2（太線）が和に関する membership 関数，線分3，4（細線）が交わりに関する membership 関数，および線分5（点線）が代数積に関する membership 関数である．明らかに $A \cup B \geqq A \cap B \geqq AB$ なる関係が成立する．

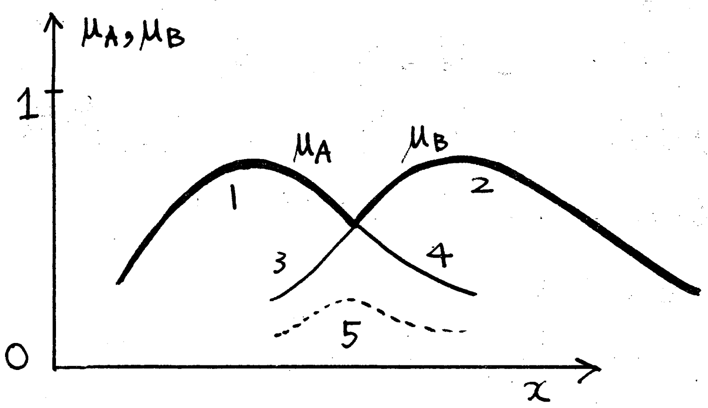


図1-1，和（太線），交わり（細線），代数積（点線）の図的表示．

"属する"という概念は，通常の集合論では大切なものであるが，fuzzy 集合の場合，グレードが1および0以外の場合は無意味であるが，しきい値を設けることにより定義することができる．レベル数が1，2，… となるに従って，2値，3値，… なる多値論理が対応する．たとえば，レベル数が2の場合，すなわち $0 < \alpha < \beta < 1$ なるしきい値 α，β に対して

“xがAに属する”とは　$\mu_A(x) \geqq \beta$,

“xがAに属さない”とは　$\mu_A(x) \leqq \alpha$,

“xが中間的な状態にある”とは　$\alpha < \mu_A(x) < \beta$

のように定義することができる.

fuzzy関係　直積空間 $X \times Y = \{(x, y)\}$, $x \in X$, $y \in Y$, における fuzzy関係Rとは, $X \times Y$ における fuzzy集合Rのことで, $\mu_R(x, y)$ なる membership関数によって特性づけられる. 一般に, 直積空間 $X = X^1 \times X^2 \times \cdots \times X^n$ における n項 fuzzy関係とは, n変数 membership 関数 $\mu_R(x_1, \cdots, x_n)$, $x_i \in X^i$, $i = 1, \cdots, n$, によって特性づけられるXにおける fuzzy集合Rのことである.

(例題) $X = R \times R$ とする, ここでRは実数の集合. すると $x \gg y$ は R^2 における fuzzy関係である. この場合, membership関数 μ_A は, たとえば, つぎのように与えられる.

$$\mu_A(x, y) = \begin{cases} 0 & \cdots\cdots\ x \leq y \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x-y)^2}} & \cdots\cdots\ x > y \end{cases}$$

fuzzy関係の合成　R_1, R_2 を X^2 における fuzzy関係とすると, R_1, R_2 の合成 (composition) とは, X^2 における

fuzzy関係で，$R_1 \cdot R_2$ と記し，つぎのように定義される．なお，合成の演算は結合律を満す．

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x, y) = \sup_{v \in X} \min\left[\mu_{R_1}(x, v), \mu_{R_2}(v, y)\right].$$

（例題）R_1, R_2 を $x \gg y$ なる fuzzy関係とすると，合成 $R_1 \cdot R_2$ は，$x \ggg y$ なる fuzzy関係となる．

<u>写像による fuzzy集合</u>　f を X から Y への写像とする．すなわち，$f(x) = y$，$x \in X$，$y \in Y$．　A を X における fuzzy集合とすると，写像 f によって引き起されたYにおける fuzzy集合Bは

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

と定義される．

<u>fuzzy集合の射影</u>　A を $X \times Y$ における fuzzy集合とし，f を $X \times Y \to X$ なる写像とする．この写像 f によって引き起されたXにおける fuzzy集合をAの射影（shadow）と呼び，$S_X(A)$ と記す．$S_X(A)$ の membership 関数は，

$$\mu_{S_X(A)}(x) = \sup_{y \in Y} \mu_A(x, y)$$

で示される.

<u>条件付fuzzy集合</u>　Yにおけるfuzzy集合$B(x)$が, $x \in X$により条件付けられているとは, $B(x)$のmembership関数が, xをパラメターとして関連づけられていることである. $B(x)$のmembership関数を$\mu_B(y|x)$と記すことにする. Xにおけるfuzzy集合をAとすると, $\mu_B(y/x)$によって引き起されるYにおけるfuzzy集合Bは

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min[\mu_A(x), \mu_B(y|x)]$$

で特性づけられる. なお, これはfuzzy関係における合成の特別の場合である.

以上, 簡単にfuzzy集合に関するあらましを述べた. fuzzy集合に関する理論は新しく, 多くの概念は未だ定式化されていない. 物理をはじめとするいわゆる"hard science"では, 観測対象の間の厳密な関係を見出してきた. ところで生物学や心理学や社会現象等のいわゆる"soft science"で

は，厳密には扱えない問題が数多くあるが，1つの方法として，変数間のfuzzy関係を求めることが考えられる．このようなfuzzy性は技術的なデザインの問題等にもあてはまる．fuzzy集合論によってこれらの問題が完全に解決されるかというとそうでなく，むしろ，これらの問題に対する見方に重点がおかれるものといえよう．しかし，これらの問題のfuzzy性を組織的に開発することにより，従来の確率等の方法では処理できなかった多くの困難な問題が解決されるものと思う．

第2章　Fuzzy行列

本章では，fuzzy行列の代数についての基本的な性質を議論する．

fuzzy行列の理論は，オートマトン理論，スイッチ網，グラフ理論などに応用できる．

2.1. fuzzy行列の諸定義

$n \times n$ fuzzy行列Aの才(i,j)要素をa_{ij}とする．
ただし，$1 \leqq i, j \leqq n$，$0 \leqq a_{ij} \leqq 1$，a_{ij}をfuzzy変数とする．

fuzzy行列の演算は，ブール行列の演算の拡張として，フ

ぎのように定義できる.

1) $A \oplus B = C \iff c_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$

2) $A \otimes B = C \iff c_{ij} = \min(a_{ij}, b_{ij})$

3) $A \leqq B \iff a_{ij} \leqq b_{ij}$

4) $A \circ B = C \iff c_{ij} = \max_k \min(a_{ik}, b_{kj})$

5) $A^T = C \iff c_{ij} = a_{ji}$

6) $I = \| m_{ij} \|$, ここで $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \cdots\ i = j, \\ 0 & \cdots\ i \neq j. \end{cases}$

7) $O = \| 0 \|$

8) $E = \| 1 \|$

注) 4)の fuzzy 行列の $\circ$ 算は, fuzzy 関係における合成 (composition) に対応している.

2.2. fuzzy 行列の基本性質

fuzzy 行列の定義より, つぎのような性質が導びかれる.

(1) すべての fuzzy 行列 A に対して,

$O \leqq A \leqq E$.

(2) $A \oplus A = A$, $A \otimes A = A$.

(3) $A \oplus B = B \oplus A$, $A \otimes B = B \otimes A$

(4) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$,

$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

(5) $A \oplus (B \otimes C) = (A \oplus B) \otimes (A \oplus C)$

$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$

(6) $A \oplus (A \otimes B) = A$

$A \otimes (A \oplus B) = A$

(7) $0 \oplus A = A$

$0 \otimes A = 0$

(8) $E \oplus A = E$

$E \otimes A = A$

(9) 一般に, $A \circ B \neq B \circ A$

(10) $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$

(11) $A \circ I = I \circ A = A$

(12) $A \circ 0 = 0 \circ A = 0$

(13) $A \circ E = E \circ A = E$

(14) $A^0 = I$, $A^{k+1} = A^k \circ A$

(15) $A^p \circ A^q = A^{p+q}$

(16) $(A^p)^q = A^{pq}$

(17) $A \circ (B \oplus C) = A \circ B \oplus A \circ C$

$(A \oplus B) \circ C = A \circ C \oplus B \circ C$

(18) $A \circ (B \otimes C) \leqq A \circ B \otimes A \circ C$

$(B \otimes C) \circ A \leqq B \circ A \otimes C \circ A$

(19) $A \leqq B$, $B \leqq C$ ならば, $A \leqq C$

(20) $A \leqq B \iff A \oplus B = B$

$A \leqq B \iff A \otimes B = A$

(21) $A \leqq B$ ならば,

$A \oplus C \leqq B \oplus C$

$A \otimes C \leqq B \otimes C$

$A \circ C \leqq B \circ C$

(22) $A \leqq B$, $C \leqq D$ ならば,

$A \oplus C \leqq B \oplus D$

$A \otimes C \leqq B \otimes D$

$A \circ C \leqq B \circ D$

(23) $(A \oplus B)^T = A^T \oplus B^T$

(24) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$

(25) $(A \circ B)^T = B^T \circ A^T$

(26) $(A^T)^T = A$

(27) $A \leqq B$ ならば, $A^T \leqq B^T$

つぎにfuzzy行列において成立する二，三の基本定理を述べる．

《定理1》 任意のfuzzy行列Aに対して，
系列 $A, A^2, A^3, \cdots$ は最終的に周期をなす．

（証明） n次元fuzzy行列Aの要素の集合を $M=\{a_1, \cdots, a_\ell\}$ とすると，Aの集法（∘演算）によって生成される相異なるfuzzy行列の個数は高々 ℓ^{n^2} である．すなわち有限である．

《定理2》 $n \times n$ fuzzy行列 $A \geqq I$ に対して，

$$I \leqq A \leqq \cdots \leqq A^{n-1} = A^n = A^{n+1} = \cdots$$

が成立する。

（証明） $I \leqq A$ であるから，一般に $A^{k-1} \leqq A^k$ となる．
逆の証明は $A^{n-1} = A^n$ を証明すれば十分である．
A^n の対角項はすべて1であるから，非対角項を考える．
A^n の第(i,j)要素 $a_{ij}^{(n)}$，ただし $i \neq j$，は

$$a_{ij}^{(n)} = \max_{1 \leqq k_1, \cdots, k_{n-1} \leqq n} \min [a_{ik_1}, a_{k_1k_2}, \cdots, a_{k_{n-2}k_{n-1}}, a_{k_{n-1}j}]$$

と書ける．ところが，$i, k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, j$ は $n+1$ 個あるので少なくともそのうちの2つは一致しなければならない．

1) ある s $(1 \leqq s \leqq n-1)$ に対して，$j = k_s$ ならば，
上式の項はつぎのように書ける．

$$\min [a_{ik_1}, \cdots, a_{k_{s-1}j}, a_{jk_{s+1}}, \cdots, a_{k_{n-1}j}]$$

これは，A^s の (i,j) 要素 $a_{ij}^{(s)}$ の項

$$\min[a_{ik_1}, \cdots, a_{k_{s-1}j}]$$

に含まれる．従って，A^{n-1} の (i,j) 要素 $a_{ij}^{(n-1)}$ の項にも含まれる．

2) $i = k_s$ の場合にも同様にできる．

3) ある s, r に対して $k_s = k_r\ (\neq i, j)$ とすると，$a_{ij}^{(n)}$ の項は，つぎのような形となる．

$$\min[a_{ik_1}, \cdots, a_{k_{s-1}k_r}, a_{k_rk_{s+1}}, \cdots, a_{k_{r-1}k_r}, a_{k_rk_{r+1}}, \cdots, a_{k_{n-1}j}]$$

これは明らかに

$$\min[a_{ik_1}, \cdots, a_{k_{s-1}k_r}, a_{k_rk_{r+1}}, \cdots, a_{k_{n-1}j}]$$

に含まれる．よって $a_{ij}^{(n-1)}$ の項にも含まれる．

したがって，1), 2), 3) より

$$a_{ij}^{(n)} \leqq a_{ij}^{(n-1)}, \quad \text{すなわち} \quad A^n \leqq A^{n-1}$$

が成立する．これより $A^{n-1} = A^n$ が証明される．(証終)．

つぎのような

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A^i = A^1 \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^n$$

なる式を定義する．

《定理3》 n×n fuzzy行列Aが $A \geqq I$ ならば,

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A^i = A^n$$

である.

(証明) $A \geqq I$ ならば, $A^2 \geqq A$, $A^3 \geqq A^2$, …, $A^n \geqq A^{n-1}$

が成立するから,

$$A \oplus A^2 = A^2$$
$$A^2 \oplus A^3 = A^3$$
$$\vdots$$
$$A^{n-1} \oplus A^n = A^n$$

したがって,

$$A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^n = A^n.$$

さらに一般に, $A \geqq I$ ならば, 定理2より

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} A^i = A^n$$

となることが示される. (証終).

《定理4》 Aと n×n fuzzy 行列とすると, 各rに対して

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A^i = \bigoplus_{i=1}^{n+r} A^i$$

が成立する.

(証明) $r=1$ の場合を証明すれば十分である.

$$\bigoplus_{i=1}^{n+1} A^i = \bigoplus_{i=1}^{n} A^i \oplus A^{n+1}$$

と表わされる．そこで，A^{n+1} の各要素 $a_{ij}^{(n+1)}$ が，$\bigoplus_{i=1}^{n} A^i$ の対応する (i,j) 要素に含まれることを示せばよい．

A^{n+1} の要素 $a_{ij}^{(n+1)}$ は，つぎのように表わされる．

$$a_{ij}^{(n+1)} = \max_{1 \leqq k_1, k_2, \cdots, k_n \leqq n} \min [a_{ik_1}, a_{k_1k_2}, \cdots, a_{k_{n-1}k_n}, a_{k_nj}]$$

これより，定理2の証明と同様の方法で，$a_{ij}^{(n+1)}$ は，適当な $r(\leqq n)$ に対する fuzzy 行列 A^r に対応する (i,j) 要素に含まれる．したがって

$$A^{n+1} \leqq \bigoplus_{i=1}^{n} A^i$$

が成立する．

《定理5》　$A, B \geqq I$ なる fuzzy 行列に対して

$$(A \oplus B)^* = (A^* \circ B^*)^* = (B^* \circ A^*).$$

ただし，$A^* = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A^i$ のことである．

（証明）　$A^* \geqq I$，$B^* \geqq B$ であるので，$A^* \circ B^* \geqq B$

同様に $A^* \circ B^* \geqq A$．従って，$A^* \circ B^* \geqq A \oplus B$．

よって，$(A^* \circ B^*)^* \geqq (A \oplus B)^*$．　逆に，$A^* \leqq (A \oplus B)^*$，$B^* \leqq (A \oplus B)^*$．

従って，$A^* \circ B^* \leqq ((A \oplus B)^*)^2 = (A \oplus B)^*$

よって，$(A^* \circ B^*)^* \leqq ((A \oplus B)^*)^* = (A \oplus B)^*$．

第3章　Fuzzy論理

通常の論理（2値，多値）においては，与えられた命題の値は決定的，あるいは確率的な方法により客観的に決められる．ところが，実際の自然界においては，客観的な方法では論じられない事柄が数多くある．たとえば，"A子は美人であるか"といったような質問に対する答は多分に主観的で，はっきりとYesかNoか，すなわち真か偽かを論じられないことがある．そのようなことを量的に説明するために導入されたのが，第1章で述べたZadehによるmembership関数である．P.N.Marinos[9]はfuzzy集合の概念を用いて，主観的に真(1)と偽(0)の間の値（連続，又は離散的）がきめられるような命題を扱ったfuzzy論理を定式化した．ところで，fuzzy論理の種々の定義は，多値論理の拡張として定義できる．

3.1. fuzzy論理の諸定義

Xを空間$\Omega=\{i\}$におけるfuzzy集合とし，xをXを特性づけるmembership関数とする．値$x_i\in[0,1]$は対象物iに対するgradeを表わす．今後$x\in[0,1]$を<u>fuzzy変数</u>と名

付ける。

変数間の基本的な演算は，ブール演算の拡張として，つぎのように与えられる．

1) 論理和

$$x \vee y = \max(x, y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$
$$= x\sigma(x-y) + y\sigma(y-x)^{*}$$

2) 論理積

$$x \wedge y = \min(x, y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$$
$$= x\sigma(y-x) + y\sigma(x-y)$$

3) 否 定

$$\bar{x} = 1-x$$

4) 含 意

$$x \to y = \min(1-x+y, 1)$$

---

* $$\sigma(z) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad z > 0 \\ 0 & \cdots\cdots \quad z \leq 0 \end{cases}$$

なお，論理和 $x \vee y$ は含意 $\to$ を用いることにより，

$$x \vee y = (x \to y) \to y$$

と表わせる．

fuzzy論理における論理演算を図的に示すと，図1)〜4)のようになる．

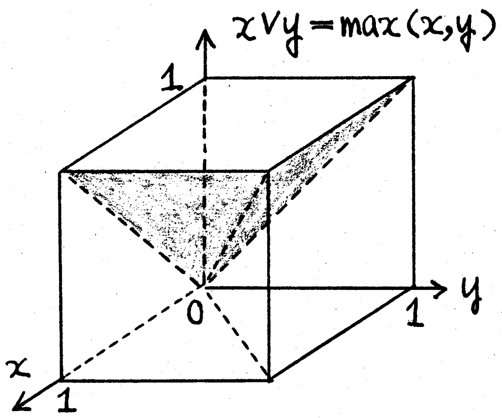


図1. 論理和(max)

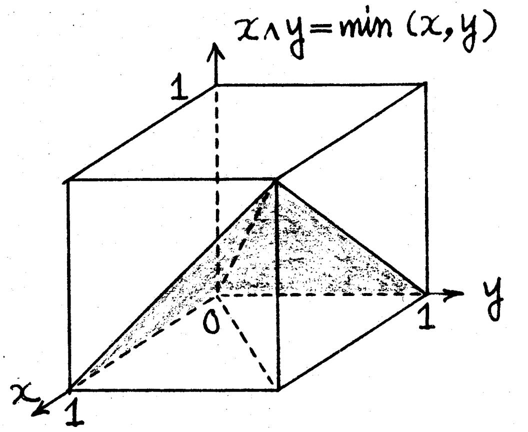


図2. 論理積(min)

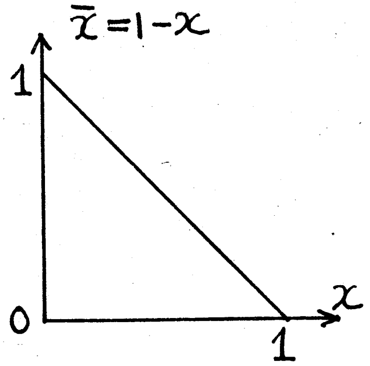


図3. 否定

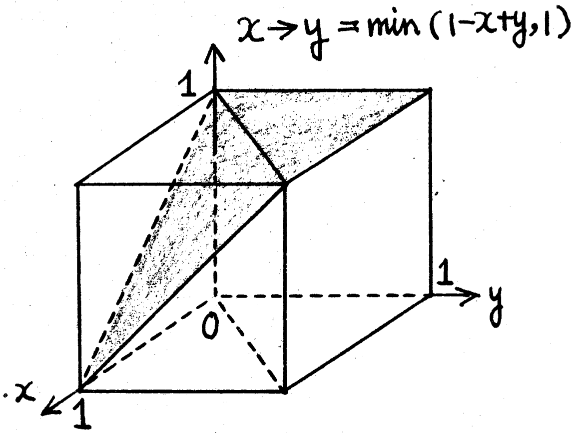
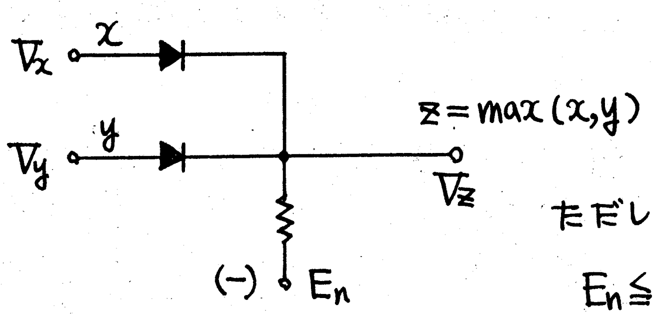


図4. 含意(→)

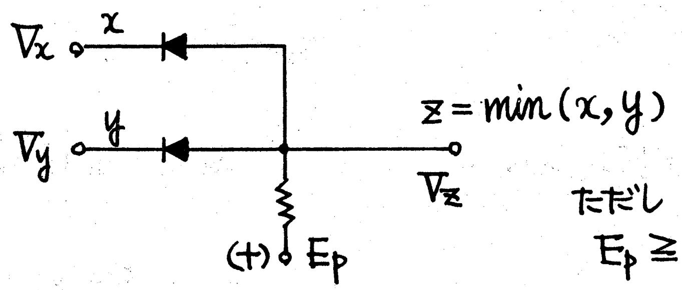
さらに，max, min, $^{-}$, を実現する回路としては，図5)〜7) のように，ダイオード，トランジスタを使うことにより実現できる．



ただし

$E_n \leqq V_x, V_y$.

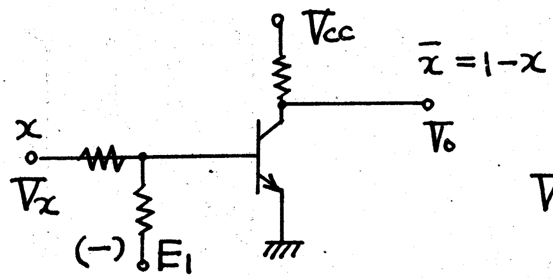
図5. maxの回路実現



ただし

$E_p \geqq V_x, V_y$.

図6. min の回路実現



$V_o = V_{cc} - V_x$

図7. 否定の回路実現

fuzzy変数に，前述のような論理操作をほどこした関数（fuzzy関数と名付ける），たとえば，

$$f(x,y) = (\bar{x} \wedge y) \vee x$$

は

$$f(x,y) = \max[\min(1-x; y), x]$$

のことである．これは fuzzy集合 X，Y における membership 関数の grade が x, y である対象物において，新しい fuzzy 集合 $Z = (\bar{X} \cap Y) \cup X$ での grade が $f(x,y)$ であることを示している．

なお，任意の fuzzy関数は，常に積和又は和積形式に表現できる．

3.2 fuzzy関数の基本性質

前述の論理演算の定義より，fuzzy関数に関してつぎのような基本性質が導びかれる．

基本性質

1) $\left.\begin{array}{l} x \vee x = x \\ x \wedge x = x \end{array}\right\}$ （巾等律）

2) $\left.\begin{array}{l} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{array}\right\}$ （交換律）

3)
$$\left.\begin{aligned} x\vee(y\vee z) &= (x\vee y)\vee z \\ x\wedge(y\wedge z) &= (x\wedge y)\wedge z \end{aligned}\right\}\text{(結合律)}$$

4)
$$\left.\begin{aligned} x\vee(x\wedge y) &= x \\ x\wedge(x\vee y) &= x \end{aligned}\right\}\text{(吸収律)}$$

5)
$$\left.\begin{aligned} x\vee(y\wedge z) &= (x\vee y)\wedge(x\vee z) \\ x\wedge(y\vee z) &= (x\wedge y)\vee(x\wedge z) \end{aligned}\right\}\text{(分配律)}$$

6)
$$\begin{aligned} &(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x) \\ &\quad = (x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x) \end{aligned}$$

7)
$$\left.\begin{aligned} \overline{(x\vee y)} &= \bar{x}\wedge\bar{y} \\ \overline{(x\wedge y)} &= \bar{x}\vee\bar{y} \end{aligned}\right\}\text{(ド・モルガンの定理)}$$

8)
$$\begin{aligned} 0\wedge x &= 0 \\ 0\vee x &= x \\ x\wedge 1 &= x \\ x\vee 1 &= 1 \end{aligned}$$

9)
$$\begin{aligned} x\vee\bar{x} &= \max(x, 1-x) \\ x\wedge\bar{x} &= \min(x, 1-x) \end{aligned}$$

さらに，fuzzy論理の演算の他に，通常の $+$，$\times$ の算法を導入することができる．これより導びかれるいくつかの定理を示す．

10) $x+(y\vee z)=(x+y)\vee(x+z)$

$x-(y\vee z)=(x-y)\wedge(x-z)$

11) $(x\vee y)+(z\vee w)=(x+z)\vee(x+w)\vee(y+z)\vee(y+w)$

$(x\vee y)-(z\wedge w)=(x-z)\vee(x-w)\vee(y-z)\vee(y-w)$

12) $x\times(y\vee z)=(x\times y)\vee(x\times z)$

$(x\vee y)\times(z\vee w)=(x\times z)\vee(x\times w)\vee(y\times z)\vee(y\vee w)$

なお，式 10)～12) は $\vee$ と $\wedge$ を および $\wedge$ と $\vee$ を 入れかえても成立する，

fuzzy論理に関する基本性質より導びかれる $=$，$\equiv$ の関係を述べる．

(1) $x\leq x\vee y$，　$x\geq x\wedge y$

(2) $x_1\leq y_1$，$x_2\leq y_2$ ならば，$x_1\vee x_2\leq y_1\vee y_2$，$x_1\wedge x_2\leq y_1\wedge y_2$

(3) $x\geq z$ ならば，

$(y\vee x)\geq(y\vee z)$

$(y\wedge x)\geq(y\wedge z)$

$(x\wedge y)\vee z=x\wedge(y\vee z)$

(4) $x \leq y$ ならば,

$$\bar{y} \leq \bar{x}$$
$$x \vee y = y$$
$$x \vee y \vee z = y \vee z \quad \text{など.}$$

(5) $x \leq y$ か, $x \leq z$ ならば,

$$x \leq y \vee z, \quad x \leq y \wedge z$$
$$x \vee y \vee z = y \vee z$$

(6) $x \geq y \geq z$ か, $x \leq y \leq z$ ならば,

$$(0 \vee x \vee y) \wedge (0 \vee y \vee z) \wedge 1 = (0 \vee y) \wedge 1$$

(7) $[(0 \vee x) \wedge 1] \wedge [(0 \vee y) \wedge 1] = (1 \wedge x \wedge y) \vee 0$

3.3. 否定項を含まないfuzzy関数

否定項を含まないn変数fuzzy関数を$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$とすると，一般に

$$f(x_1, \cdots, 0, \cdots, x_n) \leq f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \leq f(x_1, \cdots, 1, \cdots, x_n)$$

なる大小関係が成立する.

つぎに，否定項を含まないfuzzy関数の標準形は一般につぎのようになる．

「加法標準形」

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
= & [f(1,1,\cdots,1,1) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n] \\
& \vee [f(1,1,\cdots,1,0) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \wedge 1] \\
& \vee [f(1,1,\cdots,0,1) \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge 1 \wedge x_n] \\
& \qquad \text{------------} \\
& \vee [f(0,0,1,\cdots,0) \wedge 1 \wedge 1 \wedge x_3 \wedge \cdots \wedge 1] \\
& \qquad \text{------------} \\
& \vee [f(0,0,\cdots,0) \wedge 1 \wedge 1 \wedge \cdots \wedge 1]
\end{aligned}
$$

「乗法標準形」

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
= & [f(1,1,\cdots,1,1) \vee 1 \vee 1 \vee \cdots \vee 1] \\
& \wedge [f(1,1,\cdots,1,0) \vee 1 \vee 1 \vee \cdots \vee 1 \vee x_n] \\
& \wedge [f(1,1,\cdots,0,1) \vee 1 \vee 1 \vee \cdots \vee x_{n-1} \vee 1] \\
& \qquad \text{------------} \\
& \wedge [f(0,0,1,\cdots,0) \vee x_1 \vee x_2 \vee 1 \vee \cdots \vee x_n] \\
& \qquad \text{------------} \\
& \wedge [f(0,0,\cdots,0) \vee x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n]
\end{aligned}
$$

上述の表現を簡潔にするとつぎのようにまとめられる.

[加法標準形]

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigvee_{e} f(e_1, e_2, \cdots, e_n) \wedge x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{e_n}$$

ただし, $e_i = 0$, 又は1である.

[乗法標準形]

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigwedge_{e} f(e_1, e_2, \cdots, e_n) \vee x_1^{\bar{e}_1} \vee x_2^{\bar{e}_2} \vee \cdots \vee x_n^{\bar{e}_n}$$

ただし $\bar{e}_i = \begin{cases} 1 \cdots \text{もし } e_i = 0, \\ 0 \cdots \text{もし } e_i = 1. \end{cases}$

(例題) $f(x_1, x_2, x_3) = [(x_1 \vee x_2) \wedge x_3] \vee [(x_1 \vee x_3) \wedge x_2]$

なるfuzzy関数の標準形を求める.

$f(e_1, e_2, e_3)$は右のようになる.

e_1	e_2	e_3	$f(e_1, e_2, e_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

これより加法標準形は,

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_2\wedge x_3)$$
$$=(x_1\wedge x_2)\vee(x_2\wedge x_3)\vee(x_3\wedge x_1).$$

となり, 乗法標準形は,

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\vee x_3)\wedge(x_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee x_3)\wedge(x_2\vee x_3)$$
$$=(x_1\vee x_2)\wedge(x_2\vee x_3)\wedge(x_3\vee x_1)$$

となり, fuzzy関数$f(x_1,x_2,x_3)$はメジアン関数であることがわかる.

以上, 簡単にfuzzy論理において成立する基本性質を述べた.

fuzzy論理の応用としては, たとえば, パターン認識, ニューロン・モデル, 関数発生, 自己組織系, associative gate, 自動モニター, プロセス・シミュレーション, 品質管理等に重要な役割を果すであろう.

謝辞　種々の有益な御教示をいただいた北橋忠宏氏, 大学院生　藤田米春氏, 金孝行氏には深く感謝する.

参考文献

1) Zadeh, L.A. : "Fuzzy sets", Inform. Control, 8, 338-353, 1965.

2) Zadeh, L.A. : "Fuzzy sets and systems", Proc. Symp. System Theory, Polytechnic Institute of Brooklyn, P. 29, 1965.

3) 水本, 豊田, 田中 : "Fuzzy 言語", 信学会オートマトン研資, 昭44-10.

4) Yoeli, M. : "A note on a generalization of boolean matrix theory", Am. Math. Monthly, 68, 552-557, 1961.

5) Robert, P., Ferland, J. : "Generalisation de l'algorithme de Warshall", R.I.R.O., 7, 71-85, 1968.

6) 尾崎弘, 樹下行三 : "ディジタル代数学", 共立出版.

7) 水本, 豊田, 田中 : "Fuzzy オートマトンに関する二, 三の考察", 信学論(C), 昭44-07.

8) 豊田, 水本, 田中, 常松 : "Path Retrieval System について", 信学会オートマトン研資, 昭44-10.

9) Marinos, P.N. : "Fuzzy logic and its application to Switching systems", IEEE. Trans. on Computers, vol. C-18, No. 4, 343-348, 1969.

10) Ginzburg, S.A. : "Continuous logic and its applications", Automatika i Telemekanika, 2, 115-132, 1967.