数理解析研究所講究録
81巻 1970年 166-175

ある完備な多値論理系について

藤田米春　北橋忠宏　田中幸吉
大阪大学基礎工学部電気工学科

まえがき　多値論理体系は、J. Lukasiewicz や E. Post などにより、例が与えられている。たとえば、Post の m 値論理体系では、真理値に、$1, 2, \cdots, m$ を対応させ、それに、大小関係 $1<2<\cdots<m$ を考える。そして、関数 $\min.(x, y)$ と、
$N(x)=\begin{cases} x+1 & x \neq m \\ 1 & x=m \end{cases}$ により、この m 値論理体系が関数的に完全である事を示している。このように、真理値に順序づけを行って、$\min.(x, y)$ なる関数を持ちこむのは、$\min.(x, y)$ なる関数の論理的解釈がやりやすい事および、2値のブール代数との対応からであろう。しかしながら、これらの関数を基本演算に、選らんだ場合、数値演算（たとえば、加法）の表現が複雑になる事が予想される。そこで、2値の場合の法2の加算 $x_1 \oplus x_2$ に対応して、法 m の加算を、考え、これを定数および、置換により、関数的に完全な m 値論理系ができる事を示し、又その標準形を作った。

次に、良く知られている、多値しきい値関数系の関数的完全性の証明を得たので、簡単に述べた。

まず、次の3個の関数の集合を$F=\{S(x,y), a, \sigma(x)\}$とあらわす。ただし、ここで、$S(x,y)$および$a$は、$a$が生成元となり、$S(x,y)$が演算となるような、定数関数の巡回群を作るとする。又$\sigma(x)$は、1つの互換とする。

[定理] Fは完全なm値論理系をなす。

これを証明するために、論理関数系の完全性の必要十分条件を与えるSlupeckiの定理を次に示す。

[Slupeckiの定理] m値$(m>2)$命題論理において、ある関数集合が関数的に完全であるための必要十分条件は、

(1) すべての1変数関数が定義できること。

(2) 真理値g, s, t, rが存在して、$f(g,t) \neq f(g,r)$, $f(g,t) \neq f(s,t)$, $f(g,r) \neq f(s,t)$ (ただし$1 \leqq g, s, t, r \leqq m$) となりかつ、任意の$i$ $(1 \leqq i \leqq m)$に対して、j, k $(1 \leqq j, k \leqq m)$が存在して、$i=f(j,k)$であること。

[定理]の証明 $S(x,a)$は巡回置換をあらわす。又、$\sigma(x)$は互換であるから、この2個の置換ですべての置換が定義できる。ここで次の表現を定める。$ka \triangleq S(S \cdots S(a,a) \cdots)$ (aがk個)とあらわす。定数関数は$S(x,y)$に関して有限巡回群であるから、$0 \triangleq ma$と書けば、0は単位元となる。iaの逆元は、$(m-i)a$である。任意の関数gを考えれば、定数関数0を単位元とし、gの逆元を$(m-1)g$として、一般の関数も$S(x,y)$

に関して、可換群となる。したがって$S(x,y)$ を加法の記号を用いて$x+y$と表わす。又$\sigma_{ij}(x)$はiaとjaの互換をあらわす。

まず、条件(1)を満たす事を示すために、mが偶数の場合とmが奇数の場合とにわける。

(i) $m=2l$ の場合

$t(x) \triangleq x+\sigma_{01}(x)$ とすれば

$$t(x)=\begin{cases} a & x=0,a \\ 2x & \text{その他} \end{cases}$$

故に

$$l\,t(x)=\begin{cases} la & x=0,a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

そこで

$I(x) \triangleq \sigma_{l1}(l\,t(x))$ とおけば

$$I(x)=\begin{cases} a & x=0,a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

さらに

$$H(x) \triangleq S(I(x), I(S(x,(m-1)a))) \\ = I(x)+I(x+(m-1)a) \quad \text{とおけば}$$

$$H(1)=\begin{cases} a & x=0,2a \\ 2a & x=a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

ゆえに

$J_1(x) \triangleq I(H(x)+2\bar{a})$ とおけば

$$J_1(x)=\begin{cases} I(2a+2\bar{a})=I(0)=a & x=a \\ I(a+2\bar{a})=I(\bar{a})=0 & x=0 \\ I(a+2\bar{a})=I(\bar{a})=0 & x=2a \\ I(0+2\bar{a})=I(2\bar{a})=0 & \text{その他} \end{cases}$$

($x=0$, $x=2a$ の行 …①、その他の行 …②)

ただし ①であるために $\bar{a}\neq a$ すなわち $m\geqq 3$

②であるために $2\bar{a}\neq a$ すなわち $m\geqq 4$

$J_k(x)=J_1(x+(k-1)a)$ とおけば

$$J_k(x)=\begin{cases} a & x=ka \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となり、$J_k(x)$ と関数"$+$"によってすべての1変数関数が合成できる事になる。

(ii) $m=2l+1$ の場合

$t(x)\triangleq x+\sigma_{01}(x)$ とおけば

$$t(x)=\begin{cases} a & x=0,a \\ 2x & \text{その他} \end{cases}$$

$U(x)=l\,t(x)+x$ とおけば

$$U(x)=\begin{cases} la & x=0 \\ (l+1)a & x=a \\ 0 & x\neq 0,a \end{cases}$$

さらに、

$V(x)=U(U(x)+(l+1)a)$ とおけば

$$V(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ la & x=a \\ 0 & x\neq 0,a \end{cases}$$

故に

$J_1(x)=\sigma_{l1}(V(x))$ とおけば

$$J_1(x)=\begin{cases} a & x=a \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$J_k(x)=J_1(x+(k-1)\bar{a})$ とおけば

$$J_k(x)=\begin{cases} a & x=ka \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$J_k(x)$ と演算"+"によってすべての1変数関すが合成できる。

以上から F は条件 (1) を満たす。

さて、$t=1$, $r=2$, $q=0$, $s=2$ とすれば

$$S(q,t)=1\neq 2=S(q,r)$$

$$S(q,t)=1\neq 3=S(s,t)$$

$$S(q,r)=2\neq 3=S(s,t)$$

となり、又、$S(x,y)$ は1から m までのすべての値をとり得る事は明らかである。したがって条件(2)も満たす。

以上から定理が証明された。

[標準形]

$J_{ij}(x,y)=J_0(J_i(x)+J_j(y)+2\bar{a})$ とおけば

$$J_{ij}(x,y)=\begin{cases} a & x=ia,\ y=ja \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

となる。これから

$$J_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x_1, \cdots, x_k) = J_{1 i_k}(J_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}}(x_1, \cdots, x_{k-1}), x_k)$$

によって、任意の次元に $J_{ij}(x, y)$ を拡張できる。

$(i_1 a, i_2 a, \cdots, i_k a)$ における $f(x_1, \cdots, x_k)$ の値を $f(i_1 a, i_2 a, \cdots, i_k a)$ とすれば $f(i_1 a, i_2 a, \cdots, i_k a) = \varphi(i_1, i_2, \cdots, i_k) a$ なる整数 $(0 \leq \varphi(i_1, i_2, \cdots, i_k) \leqq m-1)$ が存在するから、これにより

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \varphi(0, \cdots, 0) J_{0 \cdots 0}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$$
$$+ \varphi(1, 0, \cdots, 0) J_{10 \cdots 0}(x_1, \cdots, x_k) + \cdots + \varphi(m-1, \cdots, m-1) J_{m-1 \cdots m-1}(x_1, \cdots, x_k)$$

と書ける。

回路実現について

上述の基本演算を用いた論理は、数値演算を主目的とする、回路に用いる事ができる。すなわち、$m=10$ として、法10の加算を考える。これと置換と定数により、すべての論理関数が実現できるのであるが、現在まだ、多安定の回路素子が、開発されていないので、回路実現としては、多線式の疑似多値回路となる。この場合、素子としては法10のダイオードマトリクス一種となる。値の置換は、接続線の交換とすればよい。もちろん、この系に、掛算のマトリクスなど、他の回路をつけ加える事は、回路構成の小型化の面から好ましい事である。このような、多線式実現は、素子の冗長性が大となる欠点を持つが、本方式においては、構造の比較的簡単な、マ

トリクス回路であるので、小型の集積回路とする事が可能と思われる。

多値しきい値関数系の完全性

多値しきい値関数系が関数的に完全である事は、直感的、経験的には、ほぼ、明らかと思われるが、簡単な証明を与えておく。やはり、ここにおいても、m値とする。

[証明] すべての1変数関数が、m項の巡回置換と、1つの互換と、それに対応する関数（たとえば、後述の$\sigma_{i\,i+1}$と$f_i(x)$）とによって合成できるということは、S. Piccardによって証明されている。そこで、まず、これらの1変数関数が、いずれもしきい値関数の組合せとして実現できることを示し、3値以上のしきい値関数系がSlupeckiの条件(1)を満たすことを示す。

1変数関数を関数値を要素とする行ベクトルとして表わせば、任意のi ($1 \leqq i \leqq m-1$) について、$f_i(x) = (1, 2, \cdots, i-1, i, i, i+1, \cdots, m-1)$ はしきい値関数である。これは、少さい方からK番目のしきい値を、T_kとすれば、重みを1として、

$i=1$ のとき　　$k+1 < T_k < k+2$　　$(1 \leqq k \leqq m-1)$

$2 \leqq i \leqq m-1$ のとき　　$\begin{cases} k < T_k < k+1 & (1 \leqq k \leqq i-1) \\ k+1 < T_k < k+2 & (i \leqq k \leqq m-1) \end{cases}$

とすればよい。

また、2変数のm値しきい値関数を$T\{w_1, w_2; T_1, T_2, \cdots, T_{m-1}\}$とあらわすことにする。（ただし、$T_{k-1} < w_1 x_1 + w_2 x_2 < T_k$ のとき$T\{w_1, w_2; T_1, T_2, \cdots, T_{m-1}\} = k$ とする。）

まず、次のような$t_i(x_1, x_2)$を定める。

$i=1$では

$$t_i(x_1, x_2) = T\{(\delta - \tfrac{1}{2}), 1;\ T_1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{2}\delta,\ T_2 = \tfrac{1}{2} + 2\delta,\ T_k = \tfrac{1}{2}k - \tfrac{3}{4} + (k + \tfrac{1}{2})\delta\ (k \geqq 3)\}$$

$2 \leqq i \leqq m-2$ では

$$t_i(x_1, x_2) = T\{(\delta - \tfrac{1}{2}), 1;\ T_k = (k + \tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2} + \delta)\ (1 \leqq k \leqq i-2)\ T_{i-1} = (\tfrac{1}{2} + \delta)i - \tfrac{1}{2},\ T_i = (\tfrac{1}{2} + \delta)i - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} - \delta),\ T_{i+1} = (\tfrac{1}{2} + \delta)i + \delta,\ T_k = (\tfrac{1}{2} + \delta)k - \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2} - \delta)\ (m-1 \geqq k \geqq i+2)\}$$

$i = m-1$ では

$$t_i(x_1, x_2) = T\{(\delta - \tfrac{1}{2}), 1;\ T_k = (k + \tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2} + \delta)\ (k \leqq m-3),\ T_{m-2} = (\tfrac{1}{2} + \delta)m - 1 - \delta,\ T_{m-1} = (\tfrac{1}{2} + \delta)m - \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}\delta\}$$

（ただし $0 < \delta < \frac{1}{10}$）

この$t_i(x_1, x_2)$と、はじめに述べた1変数関数$f_i(x)$から、

$$\sigma_{i\,i+1}(x) = t_i(x, f_i(x)) \quad (i = 1, 2, \cdots, m-1)$$

をつくると、$\sigma_{i\,i+1}(x)$は、真理値iと真理値$i+1$との互換をあらわす関数となる。ゆえに、m項の巡回置換ができる。

m 項の巡回置換と、$\sigma_{i,i+1}(x)$ と $f_i(x)$ とにより、すべての1変数関数を合成できる事は、さきに述べたとおりである。
よって条件(1)が満たされた。

つぎに、$S(x_1, x_2)=T\{1,1; T_k=k+\frac{3}{2}(1\leq k\leq m-1)\}$ なる関数は1から m までのすべての値をとり、しかも、Slupecki の条件(2)における g, r, s, t として $g=1, s=3, t=1, r=2$ をとれば、
$S(1,1)=1\neq 3=S(3,1)$, $S(1,1)=1\neq 2=S(1,2)$, $S(1,2)=2\neq 3=S(3,1)$
となる。したがって条件(2)も満たされた。
以上から多値しきい値関数系が、関数的に完全である事が証明された。

あとがき　有限多値論理の完全な関数集合は、すでに、数多く与えられているが、多値論理関数の実現問題は、実際に、具体的なしかも実用的な多値論理素子が与えられていない事から、非常に一般的なとりあつかいか、最も回路構成に都合の良い関数を仮定して考察を行う事になる。本文では、後者の立場を取った。

［文献］ARTO SALOMAA, A THEOREM CONCERNING THE COMPOSITION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES RANGING OVER A FINITE SET, THE JOUNAL OF SYMBOLIC LOGIC. Vol. 25 No. 3 Sept, 1960

NORMAN M. MARTIN, THE SHEFFER FUNCTIONS OF 3-VALUED LOGIC, THE JOUNAL OF SYMBOLIC LOGIC. Vol. 19 No. 1, March 1954