数理解析研究所講究録
81巻 1970年 74-98

三値しきい値関数について

北橋 忠宏　　田中 幸吉

大阪大学・基礎工学部・電気工学科

本稿は、報告者が大阪大学工学部において野村浩郷、手塚慶一、笠原芳郎氏と共同で行なった研究を基にして[redacted]、その後基礎工学部において行なったものを加筆したものである。

1　まえがき

多値論理演算を実行する機構を物理的に構成しようとすると、各真理値に対応するいくつかの互いに区別できる安定な状態を必要とする。演算および記憶過程におけるこれらの状態の決定の際の物理現象は一般にいき値論理的である。このような見方からすれば、論理演算機構はすべていき値論理操作を基礎としているといえる。さらに、本研究集会において別に報告されているように[1]、任意の論理代数系においていき値関数は functionally complete である。これらの事実を考え合わせれば、三値論理関数の回路による実現のために、いき値関数についてその性質を究明しておくことは意味のあることと考えられる。このとき具体的な研究課題としては、つぎのようなものが考えられる。

(ⅰ) 与えられた三値論理関数がいき値関数であるための必要十分条件（本稿では、これを三値いき値関数の判定条件とよぶ）

(ⅱ) いき値関数である場合、その回路実現のための重みおよびいき値の決定

(ⅲ) 任意の三値論理関数をいき値関数の組み合わせとして実現する組織的な方法

本稿では（ⅰ），（ⅱ）について、2値論理代数系におけ

るいき値関数についての概念を拡張定義することによって，その性質を論じる予定であるが，工学的に最も興味深い（iii）は今後の課題として残った．しかし，本稿の結果からすれば，二値論理代数系に対して提案されているいくつかの手法は三値論理代数系に対しても適用可能であると考えられる．

2．諸定義

以下の議論の基礎となる用語，概念を列挙しておく．

真理値：本稿では三値論理における変数および関数のとる三つの真理値を数値 1，0，−1 に対応づけ，以後これを真理値とみなす．

変数ベクトルおよび入力ベクトル：n 変数三値論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は n 次元三値ベクトル空間から 1 次元三値ベクトル空間への写像と考えることができる．すなわち，1 次元三値ベクトル空間 $\{1, 0, -1\}$ を V で表わすと，$f(x_1, \cdots, x_n) : V^n \to V$ である．したがって，変数をベクトル $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ によって表わし，変数ベクトルとよぶ．変数ベクトル（がその値としてとる）の定義域である n 次元三値ベクトル空間の構成ベクトルを回路における具体的入力と考え，入力ベクトルとよぶことにする．また，三つの関数値 1，0，−1 を与える入力ベクトルの集合をそれぞれ $f^{-1}(1)$，$f^{-1}(0)$，$f^{-1}(-1)$

と表わす．

$$f^{-1}(1)=\{{}^{1}x_p \mid f({}^{1}x_p)=1\}$$
$$f^{-1}(0)=\{{}^{0}x_q \mid f({}^{0}x_q)=0\} \qquad (1)$$
$$f^{-1}(-1)=\{{}^{-1}x_r \mid f({}^{-1}x_r)=-1\}$$

三値いき値関数：各変数 x_i（$i=1,\cdots,n$）に対応づけられた実数 w_i および2つの実数 T_1, T_2（$T_1>T_2$）によって，

$$f(x)=\begin{cases} 1 \cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geqq T_1 \\ 0 \cdots\cdots & T_1 > \sum w_i x_i > T_2 \\ -1 \cdots\cdots & T_2 \geqq \sum w_i x_i \end{cases} \qquad (2)$$

で与えられる関数をいき値関数とよぶ．ここで，w_i を重み，そのベクトル表示 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ を重みベクトルとよぶ．また，T_1, T_2 をいき値とよぶ．

実現定数：重み，および，いき値が定まれば，いき値関数は一意的に決定され，いき素子を用いて回路実現できる．そこで，両者をまとめて［w, T_1, T_2］と表わし，これをいき値関数の実現定数と呼ぶ．

3．三値いき値関数の判定条件

まず（i）に対する解答を不等式系に対する解の存在条件から求める．

n 変数いき値関数の定義式（2）は，第（$n+1$）要素が1，

0のみをとる

$$\{x'\} = \{({}^{1}x_p, 1), ({}^{1}x_p, 0)\} \cup \{({}^{0}x_q, 1), ({}^{0}x_q, 0)\}$$
$$\cup \{({}^{-1}x_r, 1), ({}^{-1}x_r, 0)\} \qquad (3)$$

なる $(n+1)$ 次元ベクトル x' の集合，および，w よりも1次元多い重みベクトル $w' = (w, T_2 - T_1)$ を考えたとき，

$$F(x') = \begin{cases} 1 \cdots\cdots & w'x' \geqq T_2 \\ 0 \cdots\cdots & w'x' < T_2 \end{cases} \qquad (4)$$

ここで，$w'x' = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + (T_2 - T_1) \cdot x_{n+1}$

で与えられる $F(x')$ が存在し，

$$F(x_p' \mid x_p' \in \{({}^{1}x_p, 1), ({}^{1}x_p, 0)\} \cup \{({}^{0}x_q, 0)\}) = 1$$
$$F(x_q' \mid x_q' \in \{({}^{0}x_q, 1)\} \cup \{({}^{-1}x_r, 1), ({}^{-1}x_r, 0)\}) = 0$$
$$(5)$$

となることと同値である。

不等式系 (4) が (5) のような解をもつための必要十分条件はよく知られているように，

いかなる正の整数 $\{a_{p_1}\}, \{a_{p_2}\}, \{a_{q_1}\}, \{b_{q_2}\}, \{b_{r_1}\}$ $\{b_{r_2}\}$ についても，

$$\sum_{p_1} a_{p_1}({}^{1}x_p, 1) + \sum_{p_2} a_{p_2}({}^{1}x_p, 0) + \sum_{q_1} a_{q_1}({}^{0}x_q, 0)$$
$$= \sum_{q_2} b_{q_2}({}^{0}x_{q_2}, 1) + \sum_{r_1} a_{r_1}({}^{-1}x_r, 1) + \sum_{r_2} a_{r_2}({}^{-1}x_r, 0) \qquad (6)$$

かつ，

$$\sum_{p_1} a_{p_1} + \sum_{p_2} a_{p_2} + \sum_{q_1} a_{q_1} = \sum_{q_2} b_{q_2} + \sum_{r_1} b_{r_1} + \sum_{r_2} b_{r_2} \qquad (7)$$

が成立<u>しない</u>ことである。

後の考察における便宜上、これらの条件を

$$\sum_{q_2} b_{q_2}\,{}^{0}x_{q_2} + \sum_{r_1} b_{r_1}\,{}^{-1}x_{r_1} - \sum_{p_2} a_{p_2}\,{}^{1}x_{p_2} - \sum_{q_1} a_{q_1}\,{}^{0}x_{q_1}$$

$$= \sum_{p_1} a_{p_1}\,{}^{1}x_{p_1} - \sum_{r_2} b_{r_2}\,{}^{-1}x_{r_2} \qquad (8)$$

かつ、

$$\sum_{p_1} a_{p_1} = \sum_{q_1} b_{q_1} + \sum_{r_1} b_{r_1} \;,\quad \sum_{r_2} b_{r_2} = \sum_{p_2} a_{p_2} + \sum_{q_2} b_{q_2} \qquad (9)$$

のように変形し、つぎのような用語を定義しておく。

<u>三値-k-summability</u>：$\sum_{p_1} a_{p_1} + \sum_{r_2} b_{r_2} = j$ とおくとき、$2 \leqq j \leqq k$ なるいずれかの j について式(8),(9)が成<u>立する</u>ことをいう。関数 f についてこの関係が成立するとき、関数 f は三値-k-summable であるともいう。

<u>単純-三値-summable</u>：0もしくは1のみの係数を用いて式(8),(9)を成立させうることをいう。

<u>三値-asummability</u>：いかなる k についても、三値-k-summability が成立<u>しない</u>ことをいう。これが成立する関数を三値-asummable であるという。

以後 summability, summable は sum. と、asummablity, asummable は asum. と略す。

この定義にしたがえば、

［定理１］　与えられた三値論理関数がいき値関数であるための必要十分条件は、その関数が三値－asum.であることである。

という定理が得られる。この判定条件は実際に適用するにあたっては有効であるとはいい難い。とくに変数の数と調べなければならないnの上限との関係が明らかでない場合には無限の試行を必要とするともいえる。しかし、二値論理代数系においてもasum.に代わる有効な判定条件を得難いことから考えれば、三値論理代数系においても、この条件はいき値関数の最も基本的な判定条件であると考えられる。

4．三値論理関数の直交関数展開と回路実現への応用

上述の定理によって、まえがきに述べた（i）に対して、一応の回答を与えることができた。この節では（ii）に対する一つの回答として、いき値関数が一次式を用いて定義されることに着目し、与えられたいき値関数から一次式で表わされる近似式を導くことによって、その実現定数を近似的に求めるという方法を提案する。このために、まず一般に多値論理関数の直交関数展開を求め、ついで、二段階にわたる近似を行なうことによって一次式で表わされる近似式を導く。そ

して、この一次式の係数をいき値関数の実現定数とする．この方法は、一般的には近似的実現しか与えられないが、二値論理においては同様の方法がかなり有用であることが知られているところから、三値論理においても少変数のいき値関数に対しては有用であると考えられる．本節では三値いき値関数にこの方法を適用し、その有効性と限界について若干の考察を行なう．

4．1　多値論理関数の直交関数展開

R．P．Coleman[(2)]が二値論理関数の展開に用いた直交関数系は容易に多値論理関数にも拡張できることを示す．

p値論理代数系におけるp個の真理値をつぎのp個の数値（この数値の集合をVと記す）

$$p：\text{奇数}\qquad V=\left\{0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,\ \pm\frac{p-1}{2}\right\}$$

$$p：\text{偶数}\qquad V=\left\{0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots,\ \pm\left(\frac{p}{2}-1\right),\ \frac{p}{2}\right\}$$

に対応づけ、p値論理関数をp^n個の点において定義された数値関数とみなす．そして、これを改めてp値論理関数と考える．ベクトルの内積を$v\cdot u$と表わし、入力ベクトルをa_iと表わすとき、

［補題1］　$$\sum_{k=1}^{p^n}\exp\left(j\frac{2\pi}{p}a_l x_k\right)\exp\left(-j\frac{2\pi}{p}a_m x_k\right)$$

$$= \begin{cases} p^n & \cdots\cdots\cdots\cdots \quad a_l = a_m \\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots \quad a_l \neq a_m \end{cases} \tag{10}$$

が成立する．

また，したがって，

［補題2］ つぎの関数集合 Φ_e

$$\Phi_e = \left\{ \exp\left(j\frac{2\pi}{p}a_i x\right) \right\} \quad (i = 1, 2, \cdots, p^n) \tag{11}$$

によって，$f(x)$ に対応して作られる多項式 $f_N(x)$

$$f_N(x) = \sum_{i=1}^{p^n} F(a_i)\exp\left(j\frac{2\pi}{p}a_i x\right) \tag{12}$$

ここで，$F(a_i) = p^{-n}\sum_{k=1}^{p^n} f(x_k)\exp\left(-j\frac{2\pi}{p}a_i x_k\right)$ (13)

を考えると，

$$D^2 = \sum_{x \in V^n} |f(x) - f_N(x)|^2 = 0 \tag{14}$$

が成立するから，Φ_e は V^n において完備である．

したがって，つぎの定理を得る．

［定理1］ 関数集合 Φ_e は V^n において完全直交関数系をなし，p 値論理関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p^n} F(a_i)\exp\left(j\frac{2\pi}{p}a_i x\right) \tag{15}$$

ここで，$F(a_i) = p^{-n}\sum_{k=1}^{p^n} f(x_k)\exp\left(-j\frac{2\pi}{p}a_i x_k\right)$ (16)

と展開される．

4．2　直交関数展開と近似式

与えられた p 値論理関数 $f(x)$ を Φ_e に属する任意の l 個の直交関数

$$\left\{ \exp\left(j\frac{2\pi}{p}a_{i_1}x\right),\ \cdots\cdots,\ \exp\left(j\frac{2\pi}{p}a_{i_l}x\right) \right\} \qquad (17)$$

によって近似するとき、これらの1次結合として与えられる近似式 $s(x)$

$$s(x) = \sum_{m=1}^{l} s_m \exp\left(j\frac{2\pi}{p}a_{i_m}x\right) \qquad (18)$$

とする。ここで、$s_m = F(a_{i_m})$ であるとき、$s(x)$ と $f(x)$ との2乗誤差 Δ^2

$$\Delta^2 = \sum_{k=1}^{p^n} \{ f(x_k) - s(x_k) \}^2 \qquad (19)$$

が最小になることはよく知られているとおりである。

さて、本稿では一次式で表わされる近似式を得ることを目標にしているから、まず、第一段階として、Φ_e に属する関数のうち1変数のみを変数として含んでいる $n(p-1)$ 個の関数（$\{\exp j\frac{2\pi}{p}\beta x_i\}$）および、定数関数の一次結合で与えられる関数 S_1

$$S_1 = s_0 + \sum_{\substack{\beta\in V \\ (\beta\neq 0)}} \sum_{i=1}^{n} s_{\beta i} \exp\left(j\frac{2\pi}{p}\beta x_i\right) \qquad (20)$$

を考える。$S_1(x)$ と $f(x)$ との2乗誤差 Δ^2 を最小にする $S_1(x)$ を $f(x)$ の'第1近似式'とよび、$S_{1,min}$ と表わす。これは

$$S_{1,min}(x) = F(0) + \sum_{\substack{\beta\in V \\ (\beta\neq 0)}} \sum_{i=1}^{n} F(a_{\beta i}) \exp\left(j\frac{2\pi}{p}\beta x_i\right) \quad (21)$$

ただし，
$$F(0) = p^{-n}\sum_{k=1}^{p^n} f(x_k) = a_0$$
$$F(a_{\beta i}) = p^{-n}\sum_{k} f(x_k)\exp\left(-j\frac{2\pi}{p}\beta x_{ki}\right)$$

で与えられる．$S_{1,min}$ が共役な項をもつことを考慮すれば，つぎのような変形が可能である．

$$\begin{aligned} S_{1,min} = a_0 &+ \sum_{i=1}^{n}\Bigg[\sum_{\gamma\in U}\Big\{2 p^{-n}\sum_{k=1}^{p^n} f(x_k)\cos\frac{2\pi}{p}\gamma x_{ki}\Big\}\cos\frac{2\pi}{p}\gamma x_i \\ &+ \sum_{\gamma\in U}\Big\{2p^{-n}\sum_{k=1}^{p^n} f(x_k)\sin\frac{2\pi}{p}\gamma x_{ki}\Big\}\sin\frac{2\pi}{p}\gamma x_i\Bigg] \\ &+ \frac{1+(-1)^p}{2}\Big\{p^{-n}\sum_{k=1}^{p^n} f(x_k)\cos\pi x_{ki}\Big\}\cos\pi x_i \end{aligned} \quad (22)$$

ここで，$U = \{1, 2, \cdots, [\frac{p-1}{2}]\}$

4．3　整多項式による表現

式（22）のように与えられた第1近似式から目標である一次式で表わされる近似式を得るために2つの方法が考えられる．

（i）　sin, cos 関数を Taylor 展開する方法

（ii）　Lagrange の補間公式を利用する方法

（i）は $\frac{2\pi}{p} \ll 1$ の場合，すなわち，p が大きい場合には収

---

* これを $f(x)$ にそのまま適用し，その定数項と1次項とを取り出して，直ちに線形近似式を得ることも考えられるが，一般には本稿で得られる線形近似式のもつ幾何学的意味が失なわれる．この経過は補遺に示すとおりである．

束も速くなるが、（ii）を用いた場合には、最大限 p 次の整多項式で表現できる点で、p が小さい間は有用である。

ところで（ii）を用いた場合の $\cos\frac{2\pi}{p}\gamma x_i$，$\sin\frac{2\pi}{p}\gamma x_i$ の整多項式による表現 $P_{\cos,\gamma}(x_i)$，$P_{\sin,\gamma}(x_i)$ は

$$P_{\cos,\gamma}(x_i)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{p}\gamma k\right)\prod_{\substack{l=0\\(l\neq k)}}^{\frac{p-1}{2}}\frac{x_i^2-l^2}{k^2-l^2} & (p：奇数)\\[2ex] \displaystyle -\frac{x_i-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}\prod_{l=1}^{\frac{p}{2}-1}\frac{x_i^2-l^2}{-l^2}+\cos m\pi\,\frac{x_i}{\frac{p}{2}}\prod_{l=1}^{\frac{p}{2}-1}\frac{x_i^2-l^2}{(\frac{p}{2})^2-l^2} & \\ \displaystyle +\sum_{k=1}^{\frac{p}{2}-1}\cos\frac{2\pi}{p}mk\cdot\frac{x_i(x_i-\frac{p}{2})(\frac{p}{2}x_i+k^2)}{k^2(k^2-(\frac{p}{2})^2)}\prod_{\substack{l=1\\(l\neq k)}}^{\frac{p}{2}-1}\frac{x_i^2-l^2}{k^2-l^2} & (p：偶数)\end{cases}\qquad(23)$$

$$P_{\sin,\gamma}(x_i)=\sum_{k=1}^{[\frac{p-1}{2}]}\sin\left(\frac{2\pi}{p}\gamma k\right)\frac{x_i}{k}\prod_{\substack{l=1\\(l\neq k)}}^{[\frac{p-1}{2}]}\frac{x_i^2-l^2}{k^2-l^2}\qquad(24)$$

と表わされる．式（23），（24）を式（22）に代入すれば、$S_{1,min}(x)$ の整多項式表現 $P_{S_{1,min}}(x)$ が得られる．式（23），（24）は（$p-1$）次以下の多項式であるから、$P_{S_{1,min}}(x)$ も（$p-1$）次以下の整多項式で表わされる．

ここでは三値論理代数系を具体的な考察対象とするから、（ii）の方法による整多項式表現を用いる．

4．4　線形近似式としきい値論理関数

$P_{S_{1,min}}(x)$ の一次項、および、$S_{1,min}(x)$ の定数項 a_0（

ここで $P_{S_1,min}(x)$ から導かれる定数項を省略したのは、線形近似式のもつ幾何学的意味を簡明にするためである.)の1次結合として構成される一次式をもって、与えられた関数に対する'線形近似式'とする. そして、これを $f_{LA}(x)$ と表わす.

$$f_{LA}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} l_{fi}\, x_i \qquad (25)$$

係数 l_{fi} は式(23), (24)より一般的に求めることができるが、表現が複雑であるからここでは省略する.

さて、線形近似式 $f_{LA}(x)$ から、もとの関数の論理関数としての近似式 f_A を導くとすれば、もとの関数の値は近似式が与える値に最も近い真理値をとるものと考えるのが妥当であろう. 本稿の場合には真理値に対応する数を $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_p$ ($\alpha_\ell \in V$) とすると、任意の ℓ について $\alpha_{\ell-1} - \alpha_\ell = 1$ であるから, f_A は

$$f_A(x) = \begin{cases} \alpha_1 & \cdots\cdots \quad f_{LA}(x) \geqq \alpha_1 - \frac{1}{2} \\ \alpha_2 & \cdots\cdots \quad \alpha_1 - \frac{1}{2} > f_{LA}(x) \geqq \alpha_2 - \frac{1}{2} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_p & \cdots\cdots \quad \alpha_{p-1} - \frac{1}{2} > f_{LA}(x) \end{cases} \qquad (26)$$

と定めるのが妥当であろう. ここで、$f_{LA}(x)$ の定数項 a_0 を移項して、$\alpha_\ell - \frac{1}{2} - a_0 = T_\ell$ とおけば,

$$f_A(x) = \begin{cases} \alpha_1 & \cdots\cdots \quad \sum_{i=1}^{n} l_{fi} x_i \geqq T_1 \\ \alpha_2 & \cdots\cdots \quad T_1 > \quad〃 \quad \geqq T_2 \\ \vdots & \\ \alpha_p & \cdots\cdots \quad T_{p-1} > \sum_{i=1}^{n} l_{fi} x_i \end{cases} \qquad (27)$$

となり、p値論理代数系におけるいき値関数の定義式そのものである。

ところが、線形近似式が2度にわたる近似を経て導かれたものであり、2度目の近似は最小2乗誤差を与える保障もないから、とくにpが大きい場合には、粗い近似になっており、いき値関数に対してさえつねに誤りのない回路実現を導く実現定数を与えるとは予想されないが、与えられた関数$f(x)$がいき値関数であるならばこの近似式から実現定数を得ることができる可能性がある。これに対し、一般の論理関数については誤りのない回路実現を定めることはできず、単一のいき素子による近似的な回路実現を与えるものである。

4．5　三値論理関数への応用

二値論理については、この理論によるものと同じ結果が他の接近方法からも導かれ、すでに適用されており、6変数以下のいき値関数については二、三の例を除いてすべて誤りのない実現定数を与えることが知られている。したがって、三値いき値関数についても変数の数が少ない場合には、線形近似式に基く実現定数決定法は有効であると考えられる。三値論理関数について、第一近似式の整多項式表現および線形近似式を求めると、

$$P_{s_1,min}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} B_{1i} + \sum_{i=1}^{n} A_{1i} x_i - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{n} B_{1i} x_i \tag{28}$$

$$f_{LA}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} A_{1i}\, x_i \qquad (29)$$

ただし、

$$a_0 = 3^{-n} \sum_{k=1}^{3^n} f(x_k) = 3^{-n}\left[m({}^{1}f) - m({}^{-1}f) \right]$$

$$A_{1i} = \frac{3^{-n+1}}{2} \sum_{k=1}^{3^n} f(x_k)\, x_{ki}$$

$$= \frac{3^{-n+1}}{2}\left[\{ m({}^{1}f_{x_i=1}) - m({}^{1}f_{x_i=-1}) \} - \{ m({}^{-1}f_{x_i=1}) - m({}^{-1}f_{x_i=-1}) \} \right]$$

$$B_{1i} = 3^{-n}\left[2a_0 - 3 \sum_{k=1}^{3^n} f(x_k) \cdot x_{ki}^2 \right]$$

したがって、f_{LA} から導かれる近似式 $f_A(x)$ は

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 \cdots\cdots\cdots\cdots & \sum_{i=1}^{n} A_{1i}\, x_i \geqq 1 - \frac{1}{2} - a_0 \\ 0 \cdots\cdots & \frac{1}{2} - a_0 > \sum A_{1i}\, x_i \geqq -\frac{1}{2} - a_0 \\ -1 \cdots\cdots & -\frac{1}{2} - a_0 > \sum A_{1i}\, x_i \end{cases} \qquad (30)$$

となる．式(30)の条件の部分の各辺を正の定数倍してもよいから、三値いき値関数の実現定数として取扱う場合には、

[補題3]　三値いき値関数は

$$[\,w,\ T_1,\ T_2\,] = \left[3\sum_{k=1}^{3^n} f(x_k)\cdot x_k ,\quad 3^n - 2\sum_{k=1}^{3^n} f(x_k),\ -3^n - 2\sum_{k=1}^{3^n} f(x_k) \right]$$

なる実現定数によって誤りのない回路実現が可能性が強い。

二変数以下の三値いき値関数にこの方法を適用した結果、いき値さえ修正すればすべて誤りのない回路実現を与えることを確認できた.(3) したがって、上述の補題についても、いき値

に修正項を加え、これを適宜変化させればより誤りのない実現定数を与える可能性の増すことは明らかであろう。

5. 三値論理関数の特徴パラメータ

二値論理関数を特徴づける一つの方法として、直交関数系による展開係数の一部をパラメータとする方法が提案されている[(4)(5)]。このパラメータがいき値関数を含む関数集合と興味のある関係をもつことが明らかにされている[(6)]。ここでは、この結果を念頭におきながら前述の直交関数展開を基礎にして三値論理関数の特徴パラメータを定義するとき、これが二値論理関数のそれと同様の性質をもつことを明らかにする。

5.1 特徴パラメータと線形近似式

三値論理関数の特徴パラメータも二値論理関数のそれの拡張として、つぎのように定義する。

特徴パラメータ：n変数三値論理関数$f(x)$の特徴パラメータはつぎのように定義される$(n+2)$次元ベクトルC_fである。

$$C_f=(C_{of}\,;\,\pi_{f1},\pi_{f2})=(c_{f1},c_{f2},\cdots,c_{fn}\,;\,\pi_{f1},\pi_{f2}) \tag{31}$$

ただし、

$$C_{of}=\sum_{x\in V^n} f(x)\cdot x \qquad \left(c_{fi}=\sum_{x\in V^n} f(x)\cdot x_i\right)$$

$$\pi_{f1}=\sum_{x\in V^n} f(x) \quad , \quad \pi_{f2}=\sum_{x\in V^n}\{f(x)\}^2$$

この定義が直交関数展開を基礎にしたものであることから、当然の結果ではあるが、線形近似式の係数と密接な関係にあることは式(29)のただし書きと上述の定義から明らかである.

［補題4］　三値論理関数$f(x)$の特徴パラメータの第i要素c_{fi}と$f(x)$の線形近似式の対応する項の係数A_{fi}とは

$$A_{fi} = \frac{3^{-n+1}}{2} c_{fi}$$

なる関係にあり、π_{f1}とa_0とは、

$$a_0 = 3^{-n} \pi_{f1}$$

なる関係にある.

この補題と前述の補題3とから、~~ただちに~~つぎの定理が導かれる.

［定理2］　三値いき値関数についても、その特徴パラメータより、ただちに近似的実現を与える実現定数を定めることができる.

5.2　特徴パラメータといき値関数判定条件

特徴パラメータは本会会の別の報告(7)にもあるように、関数および変数の否定、置換などを正確に反映するためこれを用いて関数の類別などを行なうことができる. また、いき値関数とは1対1対応することが示されている. この関係をいき値関数の判定条件との関係を明らかにする中でより詳しく論じてみよう.

［定理3］　三値論理関数において、その特徴パラメータと関数とが1対1対応するのは、その関数に関して、単純－三値－sum. が成立しない場合である．

＜証明＞　2つのn変数三値論理関数f，gの特徴パラメータをC_f，C_gとする．仮定により$C_f = C_g$である．

（ｉ）まずこのとき，関数fおよびgについて単純－三値－sum. が成立することを示す．C_f，C_gの第n要素までについても当然，等号が成立するから、C_f，C_gの定義式(31)および式（1）の記法を用いると，

$$\sum_i {}^{1}x_{fi} - \sum_j {}^{-1}x_{fj} = \sum_k {}^{1}x_{gk} - \sum_l {}^{-1}x_{gl} \qquad (32)$$

が成立する．$f^{-1}(1) \cap g^{-1}(1)$ および $f^{-1}(-1) \cap g^{-1}(-1)$ に属する入力ベクトルは上式の左辺と右辺とでは異なる添字を付されているが実際は同一であるから消去できる．入力ベクトルの所属を記号Σの下に明記してこの結果を示せば，

$$\sum_{f^{-1}(1) \cap \{g^{-1}(0) \cup g^{-1}(-1)\}} {}^{1}x_f - \sum_{f^{-1}(-1) \cap \{g^{-1}(1) \cup g^{-1}(0)\}} {}^{-1}x_f$$

$$= \sum_{g^{-1}(1) \cap \{f^{-1}(0) \cup f^{-1}(-1)\}} {}^{1}x_g - \sum_{g^{-1}(-1) \cap \{f^{-1}(1) \cup f^{-1}(0)\}} {}^{-1}x_g \qquad (33)$$

となる．したがって，上式（33）を構成する入力ベクトルが，たとえば，すべて関数gに関する入力ベクトルであると考え，これを明示するために $f^{-1}(1) \cap \{g^{-1}(0) \cup g^{-1}(-1)\}$ を満足する

集合を $S_1\{g^{-1}(0)\cup g^{-1}(-1)\}$ などと表わすと，式(33)は，

$$\sum_{S_1\{g^{-1}(0)\cup g^{-1}(-1)\}} {}^{1}x_f - \sum_{S_2\{g^{-1}(1)\cup g^{-1}(0)\}} {}^{-1}x_f = \sum_{S_3\{g^{-1}(1)\}} {}^{1}x_g - \sum_{S_4\{g^{-1}(-1)\}} {}^{-1}x_g$$

となり，左辺をさらに分割すると

$$\left(\sum_{S_5\{g^{-1}(0)\}} {}^{1}x_f + \sum_{S_6\{g^{-1}(-1)\}} {}^{1}x_f\right) - \left(\sum_{S_7\{g^{-1}(0)\}} {}^{-1}x_f + \sum_{S_8\{g^{-1}(-1)\}} {}^{-1}x_f\right)$$
$$= \sum_{S_9\{g^{-1}(1)\}} {}^{1}x_g - \sum_{S_{10}\{g^{-1}(-1)\}} {}^{-1}x_g \qquad (34)$$

と表わすことができる（ベクトルを f に関するものとみなした場合も同様）．この式(34)は x_f，x_g の $g^{-1}(1)$，$g^{-1}(0)$，$g^{-1}(-1)$ への所属に注意すれば，式(8)の各項の係数が0もしくは1である場合を表わしている．

さらに C_f，C_g の第$(n+1)$，$(n+2)$要素 π_{f1}，π_{f2} および π_{g1}，π_{g2} についても

$$\pi_{f1} = \pi_{g1}, \quad \pi_{f2} = \pi_{g2}$$

すなわち，

$$m({}^{1}f) - m({}^{-1}f) = m({}^{1}g) - m({}^{-1}g)$$
$$m({}^{1}f) + m({}^{-1}f) = m({}^{1}g) + m({}^{-1}g)$$

が成立する．よって，

$$m({}^{1}f) = m({}^{1}g), \quad m({}^{-1}f) = m({}^{-1}g)$$

である．したがって，式(33)の左右辺の第1項同士，第2項同士に含まれるベクトルの数は相等しい．式(34)はこれ

らのうちから両辺に共通するものを消去したものであるから、相等関係はくずれず、式(34)の各項の係数はすべて1であるから、係数の和はベクトルの数に等しい。ゆえに式(9)も成立する。

したがって、特徴パラメータの相等しい2つの三値論理関数f, gにおいては、双方に、同一の単純−三値−sum. が成立する。

(ii) 逆に、単純−三値−sum. を構成する~~変数~~入力ベクトルが与えられれば、つぎのようにして、特徴パラメータを等くする2つの関数を導くことができる。まず、これらの~~変数~~入力ベクトルを、それが式(33)を満足するように$f^{-1}(1) \cap \{g^{-1}(0) \cup g^{-1}(-1)\}$など4組に振り分ける。さらに、単純−三値−sum. に現われない変数ベクトルについては、これを任意の2組に分け、それぞれが$f^{-1}(1) \cap g^{-1}(1)$, $f^{-1}(-1) \cap g^{-1}(-1)$を形成するものであるとみなせば、関数$f$, gは完全に決定される。しかも、f, gの特徴パラメータは、与えられた単純−三値−sum. の両辺にこれらの入力ベクトルを加えたり減じたりしたものであるから、等号はそのまま成立する。したがって、f, gは特徴パラメータを等しくする2つの相異なる関数である。よって、逆も証明された。 〈証明終り〉

特徴パラメータの相等しい2つの三値論理関数は以上のよ

うな性質をもっているが、第$(n+2)$要素 π_{f2} を除く$(n+1)$個の要素が相等しい場合、すなわち、線形近似式の相等しい2つの三値論理関数はつぎのような性質をもっていることが、[定理3]とほとんど同様にして証明できる。

[系1] 線形近似式の相等しい2つの三値論理関数については、少くともその一方において、単純－三値－accm. が成立する。

〈証明略〉(8)

いき値関数を含む関数に対して、特徴パラメータは、その関数を一意的に定めうる点(また、近似的実現定数を与える点など)で興味深いが、与えられた特徴パラメータを単独で調べたのでは、いき値関数に対応するものであるのかどうかを見分けることができないのが難点である。

6 むすび

本稿では、与えられた三値論理関数がいき値関数であるか否かの判定条件、および、いき値関数の近似的実現定数の一つの決定方法を与えることができた。また、特徴パラメータの定義によって、上記の結果の相互関係を論じ近似的実現定数決定法のいくつかの性質を示した。

しかし、二値論理関数の解析に有効であった単調性については全く触れなかったが、別の報告からその一端をうかがえ

るように特徴パラメータの正負および大小関係としきい値関数の重みの正負および大小関係が対応関係にあることを示すことができる．また、単調性としきい値関数判定条件である三値-sum．との関係を明らかにすることにより単調性の有効限界をある程度見通すことができる．これらについては機会を改めて報告する．

参考文献

（1）藤田米春、北橋、田中；“ある完備な多値論理系について”

（2）R. P. Coleman ；“Orthogonal functions for the logical design of switching circuits”, IEEE. Trans. Vol. EC-10, No.3 p.379, Sept. 1961

（3）北橋、野村、手塚、笠原；“多値しきい値論理関数の直交展開と回路実現への応用”，電子通信学会論文誌 C，Vol. 52-C No.9, p.503

（4）C.K. Chow：“On the characterization of threshold functions”, AIEE Special Publication (S-134) p.34 Sept. 1961

（5）K.R. Kaplan, R.O. Winder ：“Chebyshev approximation and threshold functions”, IEEE.

Trans. Vol. EC-14, No. 2 p. 250 April 1965
(6) 矢島、茨木："論理関数とその特性ベクトルについて" 電気通信学会誌 Vol. 50, No. 3, p. 25 (昭 42-5)
(7) 藤田志郎："三値しきい値関数について"
(8) 北橋、野村、手塚、笠原："三値論理関数の特徴パラメータとしきい値関数への応用" 電子通信学会論文誌 C、Vol. 52-C, No. 10

補　遺

Lagrange の補間公式を論理関数に直接適用する。ところで、n 変数関数に対する補間公式はつぎのような形になる。

n 次元空間の k 個の点 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ において、n 変数関数 $\varphi(x)$ と一致する整多項式 $P_\varphi(x)$ は

$$P_\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(a_i)\left(\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{k} \frac{x_1 - a_{jm_1}}{a_{im_1} - a_{jm_1}}\right)\cdots\cdots\left(\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{k} \frac{x_n - a_{jm_n}}{a_{im_n} - a_{jm_n}}\right)$$

で与えられる。これを n 変数 p 値論理関数に対して適用すると p^n 個の p 値 n 次元ベクトル a_i $(i=1, 2, \cdots, p^n)$ に関して、与えられた $f(x)$ と同じ真理値をとる整多項式 $P_f(x)$ が得られる。a_i の各要素も真理値に対応する p 個の数値のうちのいずれかの値をとるから、一般につぎのように表わされる。

$$P_f(x) = \sum_{i=1}^{p^n} f(a_i)\Big(\prod_{\substack{v_1\in V\\(v_1\neq a_{i1})}} \frac{x_1 - v_1}{a_{i1} - v_1}\Big)\cdot\cdots\cdots\cdot\Big(\prod_{\substack{v_n\in V\\(v_n\neq a_{in})}} \frac{x_n - v_n}{a_{in} - v_n}\Big)$$

この式を展開するとき、定数項 c_0 は a_i の要素がすべて 0 であるベクトルに対応する項である

$$f(0)\prod_{m=1}^{n}\Big(\prod_{\substack{v_m\in V\\(v_m\neq 0)}} \frac{x_m - v_m}{-v_m}\Big)$$

から得られるだけである．また、この項の展開からは一次項も導かれる．2次以上の項をまとめて $P_{02}(x)$ と表わすと、この項の展開は

$$f(0)\prod_{m=1}^{n}\Big(\prod_{\substack{v_m\in V\\(v_m\neq 0)}} \frac{x_m - v_m}{-v_m}\Big)$$

$$= f(0)\left[\prod_{m=1}^{n}\Big(\prod_{\substack{v_m\in V\\(v_m\neq 0)}}\Big(\frac{-v_m}{-v_m}\Big)\Big) + \sum_{m=1}^{n}\left[\left\{\sum_{i=1}^{p-1}\Big(\prod_{\substack{v_m\in V\\(v_m\neq 0,\, a_{im})}}\frac{v_m}{v_m}\Big)\Big(\frac{1}{-a_{im}}\Big)\right\} x_m\right] + P_{02}(x)\right]$$

ところで．

$$\sum_{\substack{i=1\\(a_{im}\neq 0)}}^{p-1}\Big(-\frac{1}{a_{im}}\Big) = \begin{cases} 0 & : p\ \text{奇数} \\ \dfrac{2}{p} & : p\ \text{偶数}\end{cases}$$

$$= f(0)\left\{1 + \sum_{m=1}^{n}\frac{1+(-1)^p}{2}\cdot\frac{2}{p}x_m + P_{02}(x)\right\}$$

となる．

同様にして、一次項はただ一つ 0 でない要素をもつベクトルに対応する項からも得られる．その項の展開は

$$f(0,\cdots,0,a_{jm},0,\cdots,0)\left\{\prod_{\substack{r=1\\(r\neq m)}}^{n}\left(\prod_{\substack{v_r\in V\\(v_r\neq 0)}}\frac{x_r-v_r}{v_r}\right)\right\}\left\{\prod_{\substack{v_m\in V\\(v_m\neq a_{jm},0)}}\frac{x_m-v_m}{a_{jm}-v_m}\cdot\frac{x_m}{a_{jm}}\right\}$$

$$=f(0,\cdots,0,a_{jm},0,\cdots,0)\left\{\prod_{\substack{r=1\\(r\neq m)}}^{n}\left(\prod_{\substack{v_r\in V\\(v_r\neq 0)}}\frac{v_r}{v_r}\right)\prod_{\substack{v_m\in V\\(v_m\neq 0,\,a_{jm})}}\frac{v_m}{v_m-a_{jm}}\cdot\frac{1}{a_{jm}}\cdot x_m+P_{12}(x)\right\}$$

$$=f(0,\cdots,0,a_{jm},0,\cdots,0)\left\{\prod_{\substack{v_m\in V\\(v_m\neq 0,\,a_{jm})}}\frac{v_m}{v_m-a_{jm}}\cdot\frac{1}{a_{jm}}\cdot x_m+P_{12}(x)\right\}$$

となる．

したがって，このようにして得られる一次式で表わされる近似式 $f_{LA'}(x)=c_0+\sum_{m=1}^{n}d_m x_m$ の各項の係数は

$$c_0=f(0)$$

$$d_m=\frac{1+(-1)^p}{p}f(0)+\sum_{\substack{a_{jm}\in V\\(a_{jm}\neq 0)}}\left(\prod_{\substack{v_m\in V\\(v_m\neq 0,\,a_{jm})}}\frac{v_m}{v_m-a_{jm}}\cdot\frac{1}{a_{jm}}f(a_j^m)\right)$$

ただし　$a_j^m=(0,\cdots 0,\,a_{jm},\,0,\cdots 0)$　$(a_{jm}\in V,\ a_{jm}\neq 0)$

で与えられる．この式は上述のようにして得られる近似によっては，p^n 個の点のうち最大限座標軸上の $n(p-1)+1$ 個の点における関数値によって，その係数が決定されることを示している．このことは，この近似が与えられた関数の特徴を十分には反映できないことを示している．

したがって，この方法よりは本文に述べた近似法が優れていると考えられる．