

Combinatorial Problems in Design of Experiments

元日大生産工統計学科 小川 潤太郎

元日大生産工統計学科 池田 貞雄

§1. まえがき

釣合型不完全ブロック配置の作製は正に Combinatorial な問題そのものである。 v 個の処理を各々の大きさ異なる b 個のブロックに割当ると、次の三条件が満たされるなら、それは釣合型不完全ブロック配置——英語では *Balanced Incomplete Block Design*, 略して BIBD —— といい。

- (1) 各ブロックは k ($\leq v$) 個の相異なる処理を含む。
- (2) 各処理は r 個のブロックに現われる。
- (3) 任意の二つの処理は丁度 λ 個のブロックで会合する。

BIBD を記述する 5 個のパラメータ v, b, r, k, λ の間には、次の関係があることは見易い。

$$vr = bk, \quad \lambda(v-1) = r(k-1).$$

更に又一般には

$$v \leq b \text{ 従って } r \geq k$$

ではこれら知らぬことと知られてゐる R. A. Fisher [4].

1930年代の初め, R. A. Fisher と F. Yates [5] は繰返し数 $k \leq 10$ であるすべての可能と思はれる BIBD をリストした. その中の 6 個は存在しないことと後に判つて証明された.

$$(a) \quad v=15, b=21, r=7, k=5, \lambda=2$$

$$(a') \quad v=22, b=22, r=7, k=7, \lambda=2$$

$$(b) \quad v=21, b=28, r=8, k=6, \lambda=2$$

$$(b') \quad v=29, b=29, r=8, k=8, \lambda=2$$

$$(c) \quad v=36, b=45, r=10, k=8, \lambda=2$$

$$(c') \quad v=46, b=46, r=10, k=10, \lambda=2$$

更に Fisher-Yates の表にある次の二つの BIBD は, 今日判つてもその存在も不存も不明である.

$$(d) \quad v=46, b=69, r=9, k=6, \lambda=1$$

$$(e) \quad v=51, b=85, r=10, k=6, \lambda=1.$$

これと同様なことは当然部分釣合型不完全ブロック配置——Partially Balanced Incomplete Block Design, 略して PBIBD——についても起る.

このブロック配置の不存証明の有力な一手段として Hanse-Minkowski の ρ -不変量を援用する方法がある. 本稿では主として, 此方法を中心として述べる [8].

§2. Hasse-Minkowski の p -不変量

$A = \|a_{ij}\|$ は n 次の有理対称な正方行列として、その主対角線小行列式を

$$D_0 = 1, D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

として、

$$C_p(A) = (-1, -1)_p \cdot \prod_{i=1}^n (D_i, -D_{i-1})_p$$

とある、これを行列 A の Hasse-Minkowski の p -不変量という。但しこ

で記号 $(a, b)_p$ は Hilbert 剰餘記号で

$$(a, b)_p = \begin{cases} +1, & ax+by=1 \text{ が } p\text{-進解をもつらう,} \\ -1, & \text{然らざるとき.} \end{cases}$$

二つの有理対称行列 A, B に対して、同次数の有理デシリングエラーならばる行列 C が存在して

$$C'AC = B$$

となるとき A と B とは有理的に対等であるという。ところで、 A, B が有理的に対等である為に必要な且充分条件は

$$|A| \sim |B|, \quad A \text{ の指数} = B \text{ の指数}$$

更に凡ての有理素数(形式的量数座標も含めて) p に対して

$$C_p(A) = C_p(B)$$

となることである。これは H. Hasse の定理である [6]。

p -不変量の計算に有用な公式をいくつかのリストとしておく。

$$(1) \zeta_p(\omega A) = (-1, \omega)_p^{\frac{n(n-1)}{2}} (\omega, |A|)_p^{n-1} \zeta_p(A)$$

$$(2) \zeta_p(A+B) = (-1, -1)_p (|A|, |B|)_p \zeta_p(A) \zeta_p(B)$$

§3. 対称 $u \times v$ 行列 B の存在の必要条件.

一般に B はその合同行列 $N = \|n_{\alpha\beta}\|$, $\alpha = 1, \dots, v$; $\beta = 1, \dots, v$ によって記述される. 但し

$$n_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1, & \text{若し処理 } \alpha \text{ 及び } \beta \text{ の } \gamma \text{ に対して } \gamma > \beta; \\ 0 & \text{否らざれば.} \end{cases}$$

よって

$$NN' = (n-1)I_v + \lambda G_v$$

と u 及び v のスカラー分解をつくると

$$NN' = nk A_0'' + (n-1)A_1''$$

ここで $A_0'' = \frac{1}{v}G_v$, A_1'' は直交する零等行列 (有理的) である. これら

の一次独立な列ベクトルを $a_1''', a_2''', \dots, a_v'''$ として

$$S = \|a_1''' \ a_2''' \ \dots \ a_v'''\|$$

とあくと

$$S'NN'S = \begin{vmatrix} \frac{nk}{v} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n-1)a_{11}''' & \dots & (n-1)a_{1v}''' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (n-1)a_{v1}''' & \dots & (n-1)a_{vv}''' \end{vmatrix}$$

よって, $\|a_{ij}'''\|_{2 \leq i, j \leq v}$ は行列 NN' の固有値 $(n-1)$ に対応する固有

空間の基底ベクトルのグラミヤンである。従って例は

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

この基底ベクトルをとり、そのグラミヤンは

$$Q = \begin{pmatrix} v(u_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (u_1 u_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

であつて、 $|Q| \sim v$, $C_p(Q) = (-1 \cdot -1)_p$ であることは見易い。

$$NN' \sim \begin{pmatrix} \frac{2k}{v} & 0 \\ 0 & (n-1)Q \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{aligned} C_p(NN') &= (-1 \cdot nk)_p (nk, v(u_1))_p^{v(u_1)} (-1 \cdot n-1)_p^{\frac{v(u_1)}{2}} (v \cdot n-1)_p^v C_p(Q) \\ &= (-1 \cdot nk)_p (v \cdot n-1)_p (v \cdot nk)_p (nk, n-1)_p^{v(u_1)} (-1 \cdot n-1)_p^{\frac{v(u_1)}{2}} C_p(Q) \\ &= (-1 \cdot -1)_p (-1 \cdot nk)_p (-1 \cdot n-1)_p^{\frac{v(u_1)}{2}} (v \cdot n-1)_p (v \cdot nk)_p (nk, n-1)_p^{v(u_1)} \end{aligned}$$

もし配置が対称ならば、 $b = \frac{v}{n}$ と N は正方行列であつた。

$$(n-1)^{v(u_1)} = \text{完全平方}$$

従つて、 v が偶数ならば、 $n-1$ 自身も完全平方でなければならない。

更に $(-1, -1)_p = (-1, -1)_p$ となるべきが、この場合は明らか成立
 つ。 u が奇数で、 $u-1$ が完全平方でない場合は、 $u-1$ の素数 p で

$$(-1, u-1)_p \stackrel{u(u-1)}{=} (u, u-1)_p = 1$$

となるのは $u-1$ の [9]。例として (9) の場合は $u=29$ が奇数 $u-1=6$
 が完全平方でないから、 $u-1$ の素数 p で

$$(29, 6)_p = 1$$

となるべきが、 $p=3$ に対しては

$$(29, 6)_3 = (29, 2)_3 \cdot (29, 3)_3 = \left(\frac{29}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1$$

となるが、これは不可能である。

対称な $P B I B D$ の存在の必要条件 [10]

部分釣合型不完全アロツク配置 $-P B I B D-$ を成す k
 は、元が「アソシエーション」という概念を説明しなければならぬ
 1)。

u 箇の処理の間 k 次の三条件を満たす或同様な定義された
 とき、それをアソシエーションとす。

(1) 任意の二つの処理をとると、それは互に第 1 種のアソシエ
 ートであるか、第 2 種のアソシエートであるか、……、又は第 m 種
 のアソシエートである。

(2) 各処理は u 箇の第 i 種アソシエートである。

(3) k が第 i 種アソシエートである処理対 α, β k 対して α k
 対しては第 j 種アソシエートである。 β k 対しては第 l 種アソ

シートであるような処理 γ の数 n_γ 対 (α, β) に関する $p_{\beta\alpha}^i$ である。

更に各処理は、それ自身の 0 種アソシエートと考へらるゝ。

$$n_0 = 1, \quad p_{0k}^i = \delta_{ik}, \quad p_{ij}^0 = n_i \delta_{ij}.$$

アソシエーション径数の間には次の関係がある。

$$\sum_{i=0}^m n_i = 0,$$

$$p_{ij}^k = p_{ji}^k,$$

$$\sum_{j=0}^m p_{ij}^k = n_k,$$

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j = n_k p_{ij}^k.$$

第 i 種アソシエーション行列 A_i を次のように定義する。

$$a_{\alpha\beta}^i = \begin{cases} \text{若し } \alpha, \beta \text{ が第 } i \text{ 種アソシエートなら, } & 1 \\ \text{然らざれば,} & 0 \end{cases}$$

とて

$$A_i = \| a_{\alpha\beta}^i \|, \quad i=0, 1, \dots, m.$$

そうすれば、

$$\sum_{i=0}^m A_i = G$$

で又

$$A_i A_j = A_j A_i = \sum_{k=0}^m p_{ij}^k A_k$$

であることは見易い。つまり $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ は有理数体の上で階

数 $m+1$ の可換な多元環とつくす訳である。

さて、その大小な各長のアロツア b 箇あつて、それ対してアソシエーションの定義され b 箇の処理も新考の k 次条件及添とされて l 箇なら、それ $P B I B D$ とル。

- (1) 各アロツア b 箇の相異の処理も含む。
- (2) 各処理は l 度 b 箇のアロツアに含みぬ。
- (3) 等々種アソシエートである各処理対は l 度 b 箇のアロツアに含みぬ。

然らば $u_k = b_k$ で、更に $\lambda_0 = 1$ として

$$\sum_{i=0}^m n_i \lambda_i = n_k$$

とす。

$P B I B D$ の合行列を N とす。

$$N N' = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m$$

とす。つまり $N N'$ はアソシエーション代数に含みぬのである。アソシエーション代数の冪等行列を用いて

$$N N' = p_0 A_0^m + p_1 A_1^m + \dots + p_m A_m^m$$

とすれば、これは $N N'$ のスペクトル分解になつて

$$p_0 = n_k$$

である。 A_i^m の階数を α_i として、 A_i^m の一次独立な列ベクトルを

$$Q_{\alpha_0, \dots, \alpha_0, \alpha_1}^{(1)}, Q_{\alpha_0, \dots, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2}, \dots, Q_{\alpha_0, \dots, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2}^{(i)},$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

として、これを $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$ 箇の列ベクトルを並べて出来る正方形行列を S とし、 α_i 箇の列ベクトルの各行列を Q_i とすれば

$$S'S = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_m \end{vmatrix}$$

以下各々は $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ がすべて有理数である場合を考えておく。
 $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_m \neq 0$ の場合に正規であるということがある。

(i) 正規且対称の $PBI BD$ の場合:

$$S'NN'S \Rightarrow \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_1 Q_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_m Q_m \end{vmatrix} \sim I$$

より、次の条件を得る。

$$\prod_{i=1}^m \rho_i \sim 1,$$

$$\prod_{u=1}^m (-1, \rho_u)_p \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{\rho_i(\rho_j)}{\rho_j(\rho_i)} \cdot \prod_{u=1}^m (\rho_u | Q_u)_p = 1.$$

特に $m=1$ の場合 $BIBD$ のときは $\alpha_1 = v-1, \rho_1 = \frac{|Q_1| \cdot v}{k \cdot r}$

~~$$(-1, \rho_1)_p \cdot (v-1)^{v-1} \sim 1$$~~

$$(-1, \rho_1)_p \cdot \frac{v(v-1)}{2} (v-1, v)_p = 1$$

又、 $m=2$ とすれば

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \sim 1,$$

$$(-1, p_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}} \cdot (-1, p_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}} \cdot (p_1, p_1)_p^{\alpha_1} \cdot (p_1, |Q_1|)_p \cdot (p_2, |Q_2|)_p = 1$$

となる.[7][8]

(ii) $b < v$ の場合は NN' は正則で、 n 個の単純な固有値 κ $m=2$ と 1 である。

$$(iii) \quad b = v - \alpha_1, \quad p_1 = 0$$

の場合も考えて見よう。

$$S_1 = \| a_1^{(1)} a_2^{(1)} \dots a_{1+\alpha_1}^{(1)} \|$$

とすると、この場合は

$$NN' = \kappa A_0 + p_1 A_1$$

である。

$$S_1' N \cdot N S_1 = \begin{vmatrix} \frac{\kappa}{v} & 0 \\ 0 & p_1 Q_1 \end{vmatrix} \sim 1.$$

従って

$$b p_1^{\alpha_1} |Q_1| \sim 1,$$

$$(-1, p_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}} \cdot (p_1, |Q_1|)_p^{\alpha_1-1} \cdot \zeta_p(Q_1) = (-1, -1)_p$$

は必要条件を得る。

$$(iv) \quad b = v - \alpha_2, \quad p_2 = 0$$

のときは同様である。

$$b p_2^{\alpha_2} |Q_2| \sim 1$$

$$(-1, p_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}} \cdot (p_2, |Q_2|)_p^{\alpha_2-1} \cdot \zeta_p(Q_2) = (-1, -1)_p$$

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \sim 1$$

$$(-1, p_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}} (-1, p_2)_p^{\frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}} (p_1, p_2)_p^{\alpha_1 \alpha_2} (p_1, Q_1)_p (p_2, Q_2)_p = 1$$

とある。

(ii) $b < 0$ の場合は NN' は正則である。簡単のため $m=2$ として、

$$b = 0 - \alpha_1, \quad p_2 = 0$$

の場合を考えて見よう。

$$S = \| \alpha_1^{(0)^\#} \alpha_2^{(1)^\#} \cdots \alpha_{1+\alpha_1}^{(0)^\#} \|$$

とすれば、この場合

$$NN' = \alpha A_0^\# + p_1 A_1^\#$$

から

$$S'N \cdot NS = \begin{vmatrix} \frac{\alpha b}{p} & 0 \\ 0 & p, Q_1 \end{vmatrix} \sim 1$$

従って

$$b p_1^{\alpha_1} |Q_1| \sim 1,$$

$$(-1, p_1)_p^{\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}} (p_1, |Q_1|)_p^{\alpha_1-1} \zeta_p(Q_1) = (-1, -1)_p$$

が必要条件を得る。

§5. 非対称の $BIBD$ の双対配置。

$BIBD$ が k 次であるとき、その径数は v, b, r, k, λ とする。これについて T の処理を λ 次 k 次配置に双対とて、その径数は $v^* = b, b^* = v, r^* = k, k^* = r, \lambda^*$ とある。

§5. BIBD の双対配置 (Dual Design).

その径数 v, b, r, k, λ の BIBD を "プロット" と処理を λ 換えて生ずる配置を双対とす。双対配置の径数は

$$v^* = b, b^* = v, r^* = k, k^* = r$$

で、必ずしも BIBD であるとは必ずしもない。或る場合には $m=2$ の PBIBD である。例としては

$$v = b = \binom{n}{2} + 1, r = k = n, \lambda = 2$$

及び切捨法で生ずる。

$$v = \binom{n-1}{2}, b = \binom{n}{2}, r = n, k = n-2, \lambda = 2$$

の双対を取ると。

$$v = \binom{n}{2}, b = \binom{n-1}{2}, r = n-2, k = n, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

の $m=2$ の PBIBD である。 $n \neq 8, n > 5$ の v, b は三角型のアソシエーションをもつことを知つて [3]。この場合には Shrikhande, Raghavarao, Thanigaru [4] を参照。

次に

$$v = b = 111, r = k = 11, \lambda = 1$$

及び切捨法で生ずる。

$$v = 100, b = 110, r = 11, k = 10, \lambda = 1$$

の径数をもつ BIBD の不存性を証明しよう [3]。

さて、径数 $v, b, r, k, \lambda = 1$ の BIBD では任意の二つのプロットは高々一つしか処理を共有し得ない。事実：この双対配置は m

= 2 の P B I B D と なる。

共有処理のなりのプロックを双対配置にあげる第1種アソシエート処理対 k , 又共有処理を一つのプロックを双対配置にあげる第2種アソシエート処理対 k 対応させておける次のアソシエーション径数を得る。

$$n_1 = b-1-k(n-1), \quad n_2 = k(n-1)$$

$$\begin{vmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n-k)^2 + (k-1) - \frac{2(n-1)}{k} & k(n-k-1) \\ k(n-k-1) & k^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} p''_{11} & p''_{12} \\ p''_{21} & p''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{(k-1)(n-k)(2k+1)}{k} & (k-1)(n-k) \\ (k-1)(n-k) & n-2+(k-1)^2 \end{vmatrix}.$$

$v = mn$ で、各グループは凡箇の処理より成り、凡箇のグループは k 分らぬて n 箇、 k 箇グループは k 層する = 処理は第1種アソシエート、異るグループは k 層する = 処理は第2種アソシエートとすれば、Group-Divisible のアソシエーションをなす。その径数は

$$n_1 = n-1, \quad n_2 = (n-1)n.$$

$$\begin{vmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & (n-1)n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p''_{11} & p''_{12} \\ p''_{21} & p''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & (n-1)n \end{vmatrix}$$

勿論 $n_2 p'_{11} = n_1 p'_{12}$ である。 $p'_{12} = 0$ なら、 $p'_{11} = 0$ である。 $n=2$ なら $p'_{12} = 0$ となるアソシエーションは Group-Divisible の KPG であると示すことができる [2]。さて

$$v=100, b=110, n=11, k=10, \lambda=1$$

の存在は

$$v^*=110, b^*=100, n^*=10, k^*=11, \lambda_1=0, \lambda_2=1$$

$$n_1=9, \quad n_2=100$$

$$\begin{vmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 100 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p''_{11} & p''_{12} \\ p''_{21} & p''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 90 \end{vmatrix}$$

であるが、 $n=10, m=11$ の Group Divisible PVI-III である

$$\delta, \epsilon \text{ について } \alpha_0=1, \alpha_1=v-1=99, \alpha_2=10$$

$$b^*=100 = v^* - \alpha_2 = 110 - 10.$$

$$N'N = nA_0 + o.A_1 + A_2$$

$$p_1 = nk^* - v\lambda_2 = k\lambda - b\lambda_2 = 0, \quad p_2 = n^* - \lambda_2 = k - \lambda_2 = 10.$$

$$Q \sim (nI_{m-1} - nG_{m-1}) \times I_m \quad [8]$$

$$|Q_1| \sim n^m$$

$$b^* p_2^m |Q_1| \sim 1$$

であるが、 $v \neq k^*$ のとき、 $v p_2^m |Q_1| \sim 100 \cdot 10^{10} \cdot 10^{10} \sim 10^{20}$ であるから、これは充分に大きい値である。従って、 $v^*=100, b^*=100, n^*=10, k^*=11, \lambda_1=0, \lambda_2=1$ の Group Divisible PVI 構造は不可能である。従って $v=100, b=110, n=11, k=10, \lambda=1$ の B / B D は不可能である。従って $v=b=111, n=k=11, \lambda=1$ も不可能である。一般に m の素数 p の西の有限体の存在である。 $v = \frac{m^2-1}{m-1}$ 箇の点と、 $b = \frac{m^2-1}{m}$ 箇の直線とを成す有限射影平面が存在して、各直線は $m+1$ 箇の点を含み、各点を通る $m+1$ 箇の直線と

k がある。したがって k のことである。 $m=10=2 \cdot 5$ かつ $1 \leq k < 2$ である。
 Configuration は存在する。と証明される。

参考文献

- [1] Bose, R.C. and Connor, W.S., Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs, Ann. Math. Statist., 23 (1952), 367-383.
- [2] Connor, W.S. and Clatworthy, W.H., Some theorems for partially balanced designs, Ann. Math. Statist., 25 (1954), 100-112.
- [3] Clatworthy, W. H., The subclass of balanced incomplete block designs with $r=11$ replications, Review of the I.S.I. 26 (1968), 7-11.
- [4] Fisher, R. A., An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks, Annals of Eugenics, 10 (1940), 52-75.
- [5] Fisher, R.A. and Yates, F., Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Hafner Publishing Co. New York, 1949
- [6] Hasse, H., Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper rationalen Zahlen, J. Reine Angew. Math. 152 (1923), 205-229.
- [7] Ogawa, J., On a unified method of deriving necessary conditions for existence of symmetrical partially balanced incomplete block designs of certain types, Bull. I.S.I. 38 (1961). Part 10. 43-57.
- [8] Ogawa, J., On the non-existence of certain block designs, Proceedings of the Conference on Combinatorial Mathematics and its Applications, The University of North Carolina Monograph Series in Probability and Statistics No. 4, 200-230.

- [9] Shrikhande, S.S., The impossibility of certain symmetrical balanced incomplete block designs, Ann. Math. Statist. 21 (1950), 106-111.
- [10] Shrikhande, S.S., Raghavarao, D. and Firthare S.K., Non-existence of some unsymmetrical PBIB designs, Canad. J. Math., 15 (1963), 686-701.