

回路網による格子ソリトンの実験

RCA基礎研 鈴木公男
広田良吾

1. 序

非線型の鎖や連続体の波動を扱う研究は、計算機と解析的方法とを併用する事によって最近いちじるしく発達して来た。計算機を利用する事により、今まで解けなかった問題も解ける様になり、その結果より、又新しい問題が提起されるという様な、理論的研究において、計算機の占める役割は、壇々大きくなってきている。Zabusky¹⁾等によって発見されたソリトンは、その代表的な成果の一つとして上げられるのはおかしくないと思われる。

この一次元非線型格子の解析的研究は、その後 Toda²⁾によって精力的に研究され、KdV方程式だけでなく、非線型の格子振動においても、孤立波が衝突して互いに通り抜けるなどの波の形に戻る事が解析的に示された。

我々は、昔からよく知られている、格子や分子の振動と、

LC 共振回路の振動の類似性に注目し、多数の同種類の原子が一直線上に並んだ、一次元の結晶格子を L と C を梯子型に連ねた、伝導通過回路と対応させ、非線形格子ソリトンの性質を、この電気回路を使用して実験的に調べた。

β.2. 運動方程式

非線形格子の運動方程式は、Toda によれば、原子間の相互作用ポテンシャルの形として

$$\Phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar \quad (a, b > 0)$$

とすると

$$m \frac{d^2}{dt^2} r_n = a (2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}) \dots \quad (1)$$

である。 ($n = \dots, 1, 2, \dots$)

ここで r_n は、 n 番目と $(n-1)$ 番目の原子の相対的変位であり、この特解として

$$e^{-br_n} - 1 = \sinh^2 \alpha \cdot \operatorname{sech}^2(\alpha n \mp \beta t)$$

が得られている。

ここで α は波の高さを与える定数で正とし、 α と β と

β は $\beta = \sqrt{\frac{ab}{m}} \sinh \alpha$ で定められる。

一方 L と C とをつなぐれば、次の様な梯子型電気回路を考
える。

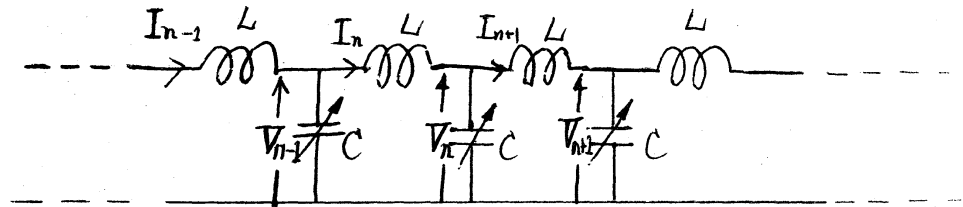


Fig. 1

ここで C は電圧の関数である。

上の回路で、電圧と電流との関係式は

$$\left. \begin{aligned} V_n - V_{n-1} &= L \frac{\partial I_n}{\partial t} \\ I_n - I_{n+1} &= \frac{\partial}{\partial t} C(V_n) V_n \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

(2)式より

$$2V_n - V_{n-1} - V_{n+1} = L \frac{\partial^2}{\partial t^2} C(V_n) V_n \dots \dots (3)$$

今 $C(V) = -Q_0 \log V/V_0$ とすれば

ここで $V = V_0 + V_n$

n 番目の Capacitance に蓄えられた電荷

$Q_n = -Q_0 \log(1 + V_n/V_0)$ は次の式で与えられる

$$L \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q_n = V_0 (2e^{-Q_n/Q_0} - e^{-Q_{n+1}/Q_0} - e^{-Q_{n-1}/Q_0}) \dots (4)$$

(4)式と(1)式とを比較すれば明らかな様に、(1)式で与えら
れた結果が、すべて図1で示した 非線型電気回路で得られ
よう。

§3 実験結果

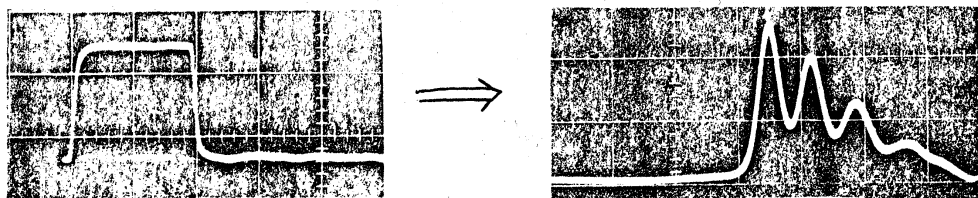
実験は $L = 22 \mu\text{H}$ のインダクタンスと、与える電圧でその容量が変化する市販のバリキャップを、約千個連ねて、Fig 1 に示す様な回路を作り、この非線型回路を電磁波が、伝播していく向に、その波形がどの様な変化するかを、一対の LC 素子ごとの、シンクロナスコープで追跡し、これを 8mm 映画に写した。この実験に使用した $C(V)$ の電圧依存性は

$$C(V) \approx 27 V^{-0.48} \text{ pF}$$

で表わされ、前々と同じ $\log(1 + V/V_0)$ ではないが、ほぼ近似出来る形と考へられる。

8mm 映画で、お見せするのは次の項目である。

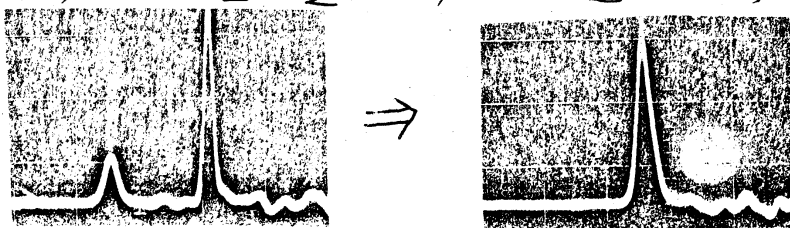
a) 矩形波パルスに変化する様子



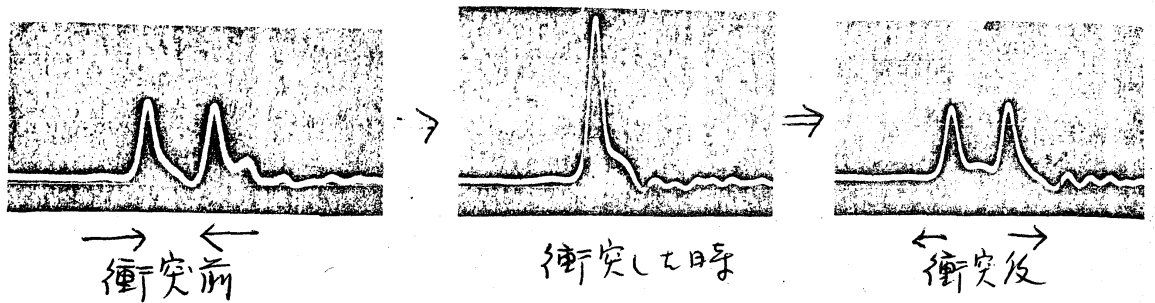
b) ソリトンとソリトンの相互作用

i) 早く走るソリトンが遅く走るソリトンに追いつき、

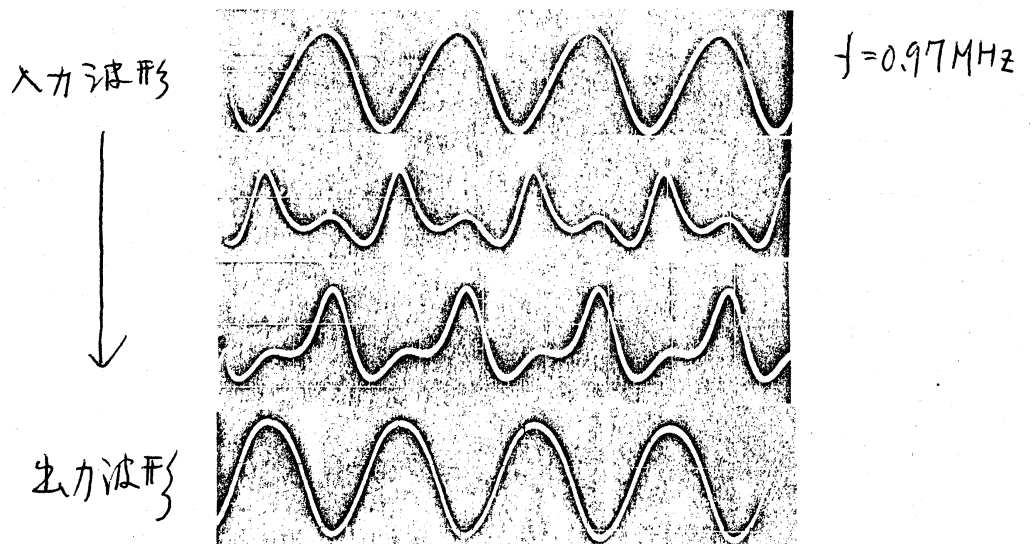
追いつく



□) 進行方向が逆の、二つのソリトンが衝突する様子



○) サイン波がソリトンに分解し、又それがサイン波に戻ったという再帰現象



以上、我々は電気回路を用いたソリトンを作ること成功した。
 これらの実験において、ソリトンの生成に必要な条件は、非線形相互作用と Cut off Frequency の存在でありと考えられる。
 又 phonon の Lifetime のついても、このソリトンのような考え方が
 再考する余地があるのではないかと思われる。

- Reference
- 1) Zabusky and Kruskal (Phys. Rev. Letters 15(1965)241)
 - 2) M. Toda ; J. of phys. Soc. Japan 22 (1967) 431
 - 3) M. Toda ; J. of phys. Soc. Japan 23 (1967) 501