数理解析研究所講究録
83巻 1970年 2-12

Introductory Talk

Korteweg - de Vries 方程式
数学の立場よりの歴史的概観

大阪市立大 工　亀高 惟倫
京大理　山口 昌哉

1895年 D. J. Korteweg と G. de Vries は Phil. Mag. に "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves" を発表し、この論文の表題に示される様な水の波を記述するいわゆる Korteweg - de Vries 方程式を導いた。すなわち

$$(1) \qquad D_t u + uDu + D^3 u = 0 \qquad \left(D_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

なる3階非線型方程式である。(1)は $u(x - Vt)$ の形の定常解を持つ。$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$ なる条件の下で

$$u(x) = u_0 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{u_0}{12}}\, x \right), \quad V = \frac{u_0}{3}, \quad u_0 > 0$$

これはふつう soliton と呼ばれている。

周期境界条件の下で

$$u(x) = \frac{2a}{s^2}\,dn^2\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\frac{x}{s}\right) + \gamma \;,\quad V = \frac{2a(2-s^2)}{3s^2} + \gamma$$

ただし $dn\,z$: elliptic Jacobi function with modulus s $(0 \leq s \leq 1)$ a, γ : 任意の定数。これは periodic wave である、波長は $\lambda = 2\sqrt{\frac{6}{a}}\,s\,K(s^2)$ ここで $K(s^2)$: complete elliptic integrals with modulus s

ついでながら $\gamma = 0$, $a = \frac{u_0}{2}$, $s \to 1$ とすると $K(s^2) \to +\infty$ となり $\lambda \to +\infty$ 又 $dn\,z \to sech\,z$ となるから

$$\frac{u_0}{s^2}\,dn^2\left(\sqrt{\frac{u_0}{12}}\frac{x}{s}\right) \longrightarrow u_0\,sech^2\left(\sqrt{\frac{u_0}{12}}\,x\right)$$

すなわち 周期 $\to +\infty$ とすると periodic wave は soliton に収束する。

最近1965年 N. J. Zabusky と M. D. Kruskal は "Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states" Phys. Rev. Letters Vol. 15 ('65) において KdV 方程式 (1) の差分近似解のふるまいを電子計算機による数値実験でくわしく調べ、興味ある事実をいくつか明らかにした

Zabusky : A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press (1967) によると KdV 方程式(1) は非調和格子振動の数学的モデルとも考えられ "Nonlinear dispersive wave propagation" を記述する最も簡単なモデル方程式として重要視されるに至っている。

ここで数学的にはすでに知られている定常解をそのなかに含む様な KdV 方程式に対する Cauchy 問題の解の大域的存在定理を作る事がまず第1歩である。最初の結果は 1967年 A. Sjöberg : On the Korteweg-de Vries equation, Uppsala Univ., Dept. of Computer Sci., Report, 1967 によっていわゆる line method (空間方向だけ差分化する) で周期境界条件の下での古典解の一意的大域的存在が示された。

1968年 R.M. Miura : Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, J. Math. Phys Vol. 9 (1968) 及び R.M. Miura, C.S. Gardner and M.D. Kruskal : Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion

J. Math. Phys. Vol. 9 (1968) によって KdV 方程式 (1) は可算無限個の conserved density ($D^k u$, $k=0,1,2,\ldots$ の多項式 T が $D_t T = DX$ なる X を持つとき T を conserved density という) を持つ事が示された。この結果を少し変形すると

【定理】

KdV 方程式 (1) は次の形の conserved density を持つ

$$T_0 = u^2$$

$$T_k = (D^k u)^2 + c_k u (D^{k-1} u)^2 + Q_k(u, \cdots, D^{k-2} u)$$

$$k = 1, 2, 3, \cdots$$

ただし Q_k は多項式

これらの conserved density を全 x-軸上で積分すると

(2)
$$\begin{cases} D_t u + uDu + D^3 u + g(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

なる Cauchy 問題の解の a priori estimate が次の様に得られる。(k にかんする帰納法で)

[定理]

Cauchy 問題 (2) の解 u は次の様な a priori estimate を持つ

$$\|D^k u\| \leq U_k(t, \|f\|, \cdots, \|D^k f\|, |||g|||_t, \cdots, |||D^k g|||_t)$$

ただし $|||g|||_t = \sup_{0 \leq s \leq t} \|g(s)\|$, $\|g(s)\| = \|g(s)\|_{L^2(R^1)}$

U_k は各 argument について正値単調増大なななめらかな函数である。

くわしくは後でのべるが

$$(3) \quad \begin{cases} D_t u_n + u_{n-1} D u_n + D^3 u_n + g(x,t) = 0 \\ u_n(x,0) = f(x) \end{cases}$$

なる線形方程式を解く事により、逐列 u_n を定義すると、適当な函数空間の位相で $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ の存在がいえ Cauchy 問題 (2) の解の局所存在定理を得る。a priori estimate と合わせて最終的に次の大域的存在定理を得る。

[定理]

$f(x) \in \mathcal{E}^\infty_{L^2}$, $g(x,t) \in \mathcal{E}^\infty_t(\mathcal{E}^\infty_{L^2})$ とすると Cauchy 問題 (2) は $0 \leq t < \infty$ $(-\infty < t \leq 0)$ において $u(x,t) \in \mathcal{E}^\infty_t(\mathcal{E}^\infty_{L^2})$ なる一意的な解を持つ

$f(x) \in \mathcal{E}_{L^2}^\infty$ は任意の自然数 k に対し $D^k f(x) \in L^2(R^1)$ を意味する。(D は distribution の意味の微分)
上の定理で $\mathcal{E}_{L^2}^\infty$ を $\mathcal{P}_l^\infty$ でおきかえてもよい。ただし $\mathcal{P}_l^\infty = \mathcal{E}_{L^2_{loc}}^\infty \cap \{\text{functions with period } l\}$ とする。
くわしい結果は Y. Kametaka : Korteweg-de Vries equation I, III, Proc. Japan Acad. Vol. 45 (1969) を参照。
最後に soliton を軸に KdV 方程式と近い関係にあると思われるいくつかの方程式にふれておく

(4) $\quad D_t v + v^p D v + D^3 v = 0$

$p=2$ の場合 KdV 方程式 ($p=1$) と次の様に結びつく
$v^2 + \sqrt{-6}\, D v = u$ とおくと (Miura の発見!)

$$D_t u + u D u + D^3 u = (2v + \sqrt{-6}\, D)(D_t v + v^2 D v + D^3 v)$$

したがって $p=1$ の場合の結果を使って $p=2$ の場合にも conserved density が可算無限個ある事がわかり a priori estimate が得られて $p=1$ の場合と同様の大域的存在定理を得る。Y. Kametaka : Korteweg-de Vries equation, IV, Proc. Japan Acad. Vol. 45 (1969) 参照。

次に棒の振動方程式 $D_t^2 y - D^2 y + D^4 y = 0$ の nonlinear perturbation と考えられる方程式

(5) $$D_t^2 y - \{1 + (Dy)^\gamma\} D^2 y + D^4 y = 0$$

又は $Dy = u$, $D_t y = v$ とおいて

(6) $$\begin{cases} D_t u - Dv = 0 \\ D_t v - (1+u^\gamma) Du + D^3 u = 0 \end{cases}$$

(6) で $\gamma = 1$ の場合 $u(x-at)$, $v(x-bt)$ の形の定常解を求める常微分方程式を導いてみると

$$-au' - v' = 0, \quad -bv' - u' - uu' + u''' = 0$$

したがって u にかんし

$$(ab-1)u' - uu' + u''' = 0$$

が得られ $\gamma = 1$ の場合 (6) は KdV 方程式 $D_t u - uDu + D^3 u = 0$ と共通の soliton を定常解として持つ。

存在定理に関しては $\gamma = 2p$, 周期境界条件の下で (5) の古典解の大域的存在が M. Tsutsumi and R. Iino によって得られている。又 $0 \le x \le 1$ で $y(0,t) = y(1,t) = 0$

なる両端境界条件を付けたときの大域的存在定理が T. Nisida によって得られている。$\gamma = 2p+1$ では初期値を小さく制限する必要がある。

以上で2,3の非常に簡単な non linear dispersive equation に対する Cauchy 問題の解の大域的存在定理を中心に紹介して来たが，存在定理以上（？）の事は数学的にほとんどわかっていない様である。（もちろん筆者に取って！） KdV 方程式にかんするさらに進んだ研究は P. D. Lax, Kay, Gardner - Green - Kruskal - Miura, ... 等々沢山あるが，これらを完全に数学的に解読する事はこれからの仕事の様に思われる。上に述べた仕事のうち P. D. Lax. 1968 年 Communications on pure and applied Mathematics Vol. XXI 467-490 の一部について紹介を試みる。尚後半部 Double Wave については、この講究録武笠氏の報告に含まれているので参照していただきたい。

この記事の最初に述べたように K-d-V 方程式(1)は $u(x-Vt)$ の形の travelling wave solution をもつ。くりかえせば任意の $V\ (>0)$ に対して，

$$S(x, V) = 3V \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2} x\sqrt{V}$$

をつくればそのとき $S(x-Vt, V)$ は V を伝播速度としてもつ，$x=\pm\infty$ で 0 となる travelling wave（ソリトン）をあらわす。この場合 $S(x, V)$ は平行移動を除いて一意にきまる。そこで $S(0, V)=3V$ になるものに正規化して考へる。

先づ，方程式(1)は x と t を explicite には含まないことに注目する，そのことから(1)の解の族は x および t による平行移動に対して不変である。今 $u(x, t)$ を(1)の一つの解として，（$x=\pm\infty$ では 0 となるもの）c を或る定数として，

$$(7) \qquad \lim_{t\to+\infty} u(x+ct, t) = S(x-\theta, c)$$

が x 空間上の任意の有界閉集合の上で一様に存在するとする。この極限は明らかに上述の travelling wave である。又 c は上述の速度 V にほかならない。この c を eigen-speed と称することにする。この量は x と t の平行移動によって不変であるが，Phase schift θ は x を a だけ，t を b だけずらせば $a-cb$ だけ変化する。

一方既に述べたごとく，方程式(1)の初期値問題は一意的に解けるので上のような c および θ は(1)の初期値により決定される。初期値 $f(x)$ の汎函数である。しかもとくに c については平行移動によって不変であるので Invariant な汎函数

と云ってよい。このようなものを方程式(1)の Integral と呼ぼう。くりかえせば integral $c(f) = c(f')$ である ただし f' は異なった時刻での $u(x,t)$ の値である。そこで次のように(1)の方程式について可算個の Integral を得る別の方法を述べる。

少し一般論にして，或る函数空間 $\mathcal{B}$ をとってきて，$u(t)$ はそこに値をもつ t の函数としておく。一方 $\mathcal{B}$ の各元 u には或る Hilbert 空間での self adjoint な線型写像 L_u が対応すると假定しよう。$K(u)$ を別の non linear operator で $(\mathcal{B} \to \mathcal{B})$ として非線型発展方程式

$$(8) \qquad u_t = K(u)$$

を一般に考える。$L(t) = L_{u(t)}$ は t によって変化するが常に unitary equivalent であるように変化すると假定しよう。そうとすれば $L(t)$ の固有値 λ_j は (8) の Integral である。

$L(t)$ が Unitary で変化するとは，$U(t)$ とよぶ unitary operator の族があって

$$U(t)^{-1} L(t)\, U(t) \quad \text{が } t \text{ に indep}$$

であることである。これを t で微分して

$$-U^{-1}U_t U^{-1} L U + U^{-1} L_t U + U^{-1} L U_t = 0$$

つまり unitary operator $U(t)$ は $B(t)$ をある Anti-symmetric operator として $U_t = BU$ をみたす

これから $L(t)$ のみたす方程式がでる。

(9) $L_t = [B, L]$

今, Gardner, Kruskal, と Miura の仕事を参考にして, 彼等は Schrödinger operator $L = D^2 + \frac{1}{6}u$ の固有値が K-d-V の integral である（u を K-d-V の解としたとき）ことを示した。この L について

$$B = 24\left(D^3 + \frac{u}{8}D + D\frac{u}{8}\right)$$

とおいて, $[B, D] = K(u)$ を計算すると

$$K(u) = -uu_x + u_{xxx}$$

つまり $u_t = K(u)$ は K-d-V に外ならないことになる。

P. D. Lax はこの固有値 $\lambda_j(u)$ が上の eigen speed $c_j(u)$ と次の関係にあることを示した。

$$c_j(u) = 4\lambda_j(u) \quad !$$