

Dirichlet L-函数について

東大教養学部教授 竜沢周雄

$k$  を正整数,  $\chi$  を次の条件をみたし整数全体を定義域とする函数とする。(1)  $(n, k) > 1$  ならば  $\chi(n) = 0$ , (2)  $n_1 \equiv n_2 \pmod{k}$  ならば  $\chi(n_1) = \chi(n_2)$ , (3)  $\chi(n_1 n_2) = \chi(n_1) \chi(n_2)$ .

このとき,  $\chi$  を  $\text{mod } k$  の剰余指標という。(1)  $(n, k) = 1$  ならば  $\chi_0(n) = 1$  となる剰余指標  $\chi_0$  を  $\text{mod } k$  の principal character という。 $\chi$  を  $\text{mod } k$  の剰余指標,  $f$  が  $k$  の約数で

$$\left[ \begin{array}{l} (n, k) = 1, \\ n \equiv 1 \pmod{f} \end{array} \text{ なる } n \text{ だけ} \right] \chi(n) = 1$$

が成立するとき,  $\chi$  は  $\text{mod } f$  で定義されるという。 $\chi$  を定義する最小正整数の  $f$  を  $\chi$  の conductor という。 $\chi$  の conductor が  $k$  自身のとき,  $\chi$  は  $\text{mod } k$  の primitive character という。 $\chi_0$  の conductor は 1 である。 $\chi$  の conductor を  $f$  とし,  $(k, n) = 1$  なる  $n$  だけ  $\chi^0(n) = \chi(n)$  となる  $\text{mod } f$  の剰余指標  $\chi^0$  を  $\chi$  に属する一つの原始指標という。 $\zeta$  を 1 の原始  $n$  乗根とし

$$G(a, \chi) = \sum_{n \pmod{k}} \chi(n) \zeta^{an}$$

をとり, Gauss の和という。(1)  $(b, k) = 1$  ならば  $G(ab, \chi) = \bar{\chi}(b) G(a, \chi)$ ,

$G(a, \chi)$ ,  $\chi$  が  $\text{mod } k$  の primitive character  $(a, k) > 1$  ならば

$G(a, \chi) = 0$ ,  $\chi$  が  $\text{mod } k$  の primitive character ならば  $G(a, \chi)$

$= \bar{\chi}(a) G(1, \chi)$ ,  $\chi$  は  $\text{mod } k$  の primitive character ならば

$$|G(1, \chi)| = \sqrt{k}$$

$s = \sigma + it$  を複素変数とし,  $\sigma > 1$  では  $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)/n^s$  によって定義される解析関数を  $L(s, \chi)$  で表す。この Dirichlet 級数は  $\sigma > 1$  では確かに正則であり, Euler の乗積公式

$$L(s, \chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}$$

を満足する。  $\chi^0$  を  $\chi$  の一つの原始指標とするとき

$$L(s, \chi) = \prod_{p|k} (1 - \chi^0(p)p^{-s}) L(s, \chi^0)$$

が成立つ。特に

$$L(s, \chi_0) = \prod_{p|k} (1 - p^{-s}) \zeta(s)$$

で,  $\zeta(s)$  は Riemann の zeta 関数となる。  $\chi$  を  $\text{mod } k$  の原始指標とする。  $L(s, \chi)$  は  $k=1$  ならば  $\zeta(s)$  となり  $s=1$  で 1 次の pole をもつほか, その他のすべての真に正則となり,  $k \neq 1$  ならばすべての真に正則となる。また  $\chi(-1) = 1$  或  $-1$  により  $a=0$  或  $1$  と定めると

$$\phi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+a}{2}} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi)$$

とするとき, 函数等式

$$\phi(s, \chi) = \varepsilon(\chi) \phi(1-s, \bar{\chi})$$

が成立つ。ただし,

$$\varepsilon(\chi) = \frac{(-i)^a}{\sqrt{k}} G(1, \chi)$$

$\Gamma$  関数の公式を利用して

$$L(\delta, \chi) = 2(2\pi)^{\delta-1} \cdot k^{\frac{1}{2}-\delta} \varepsilon(\chi) \frac{\sin}{\cos} \left( \frac{\pi\delta}{2} \right) \Gamma(1-\delta) L(1-\delta, \bar{\chi})$$

( $a=0$  のとき  $\sin$ ,  $a=1$  のとき  $\cos$ )

と表わける。したがって、 $L(\delta, \chi)$  の零点は  $\sigma > 1$  にはなく

$\sigma \leq 0$  では次のようにある。

$k=1$  の場合  $-2, -4, \dots$

$k > 1$  の場合 ( $a=0$ )  $0, -2, -4, \dots$

$k > 1$  の場合 ( $a=1$ )  $-1, -3, -5, \dots$

したがって、 $0 < \sigma < 1$  にある  $L(\delta, \chi)$  の零点を  $\rho$  で表わすとき、

Hadamard の定理によつて、

$$(\delta-1) L(\delta, \chi) = \frac{e^{A+B\delta}}{\delta \Gamma(\frac{\delta}{2})} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) e^{\frac{\delta}{\rho}} \quad k=1$$

$$L(\delta, \chi) = \frac{e^{A+B\delta}}{\Gamma(\frac{\delta}{2})} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) e^{\frac{\delta}{\rho}} \quad k > 1 \quad a=0$$

$$L(\delta, \chi) = e^{A+B\delta} \frac{\Gamma(\frac{\delta}{2})}{\Gamma(\delta)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{\delta}{\rho}\right) e^{\frac{\delta}{\rho}} \quad k > 1 \quad a=1$$

対数微分をとれば

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\delta) = B - \frac{1}{\delta-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\delta}{2} + 1 \right) + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{\delta-\rho} + \frac{1}{\rho} \right)$$

$$\frac{L'}{L}(\delta, \chi) = B - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\delta+a}{2} \right) + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{\delta-\rho} + \frac{1}{\rho} \right)$$

( $\chi$  primitive,  $k > 1$ )

なる公式がえられる。ただし  $B$  は  $\chi$  に関係するある定数。

算術級数によける素数分布の定理を証明する場合, mod  $k$  に關する剰余指標  $\chi$  から  $L(s, \chi)$  をつくり それを利用するので Dirichlet 以来の伝統になつてゐる. このとき  $L(1, \chi) \neq 0$  の証明ができればあとは簡単はことは, 次の Shapiro の方法(多少かえり)を併せても介る.  $L(1, \chi) \neq 0$  はさば

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} &= \sum_{d|n} \chi(d) \log \frac{x}{d} = \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \Lambda(d)}{d} \log \frac{x}{d} = O(\log^2 k) \\ &= \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \Lambda(d)}{d} \sum_{m \geq \frac{x}{d}} \frac{\chi(m)}{m} = \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \Lambda(d)}{d} (L(1, \chi) + O(\frac{k}{x})) \\ &= L(1, \chi) \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \Lambda(d)}{d} + O(k) \quad \text{よ} \quad \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \Lambda(d)}{d} = O(\frac{k}{L(1, \chi)}) \end{aligned}$$

$L(1, \chi) = 0$  はさば

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} &= \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{x}{d} = \sum_{d \leq x} \left( \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{x}{n} + \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} \right) \frac{\chi(n)}{n} \\ &= \log x + \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n} \quad \text{一方左辺} = \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d) \chi(d)}{d} \log \frac{x}{d} = \sum_{m \geq \frac{x}{d}} \frac{\chi(m)}{m} \\ &= O\left(\sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \log \frac{x}{d} \cdot k \frac{d}{x}\right) = O(k) \quad \text{よ} \quad \sum_{m \geq \frac{x}{d}} \frac{\chi(m)}{m} = -\log x + O(k) \end{aligned}$$

$\chi$  は mod  $k$  の  $\varphi(k)$  個の剰余指標を動くとき  $N$  個の  $\chi$  についで  $L(1, \chi) = 0$  とはるとすれば上記によ

$$\varphi(k) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{k}}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, k)=1}} \frac{\Lambda(n)}{n} + \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n}$$

$$= \log x + (-N) \log x + O(1) \quad (\text{この } O(1) \text{ は } k \text{ に depend})$$

とはるとよ,  $L(1, \chi) = 0$  とはるとよあつても  $\chi$  は real な場合しかも一つだけとよとよにたはる。したがつて,  $\chi$  を real primitive character mod  $k$  として  $L(1, \chi) \neq 0$  を証明され

よって, Suetina によれば Kronecker の記号を使って

$$\chi(n) = \left(\frac{k}{n}\right) \quad (\chi(-1)=1) \quad \text{or} \quad \left(\frac{-k}{n}\right) \quad (\chi(-1)=-1)$$

よって, fundamental discriminant  $\neq k$  の二次体の class number を  $h$  とするときは

$$\chi(-1)=1 \text{ のとき} \quad h = \frac{\sqrt{k}}{2 \log \eta} h(1, \chi), \quad \eta = \frac{a+b\sqrt{k}}{2} (>1) \text{ は}$$

fundamental unit

$$\chi(-1)=-1 \text{ のとき} \quad h = \frac{w\sqrt{k}}{2\pi} h(1, \chi) \quad w=6 (k=3), 4 (k=4), 2 (k>4)$$

よける (Hecke).  $\eta - \eta^{-1} = a \text{ or } b\sqrt{k} \geq 1$  より  $\eta + \eta^{-1} \geq \sqrt{5}$

$$\text{よって } \eta \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ よって } \chi(-1) \text{ のとき } h(1, \chi) \geq 2 \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$$

また  $\chi(-1)=-1$  ならば  $h(1, \chi) \geq \frac{\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{k}}$  となる。  $h(1, \chi) \neq 0$

の外ならば下からの  $k$  に関するおさえを作ることは、素数定理を深める際更に重要となる。

上記は Dirichlet の  $L$  函数には有効であるが, Hecke の  $L$  函数に対しても有効な Fogels の方法を簡単に紹介しておく。

$$\sigma > 1 \text{ のとき } \zeta(\sigma) h(\sigma, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} \text{ とするときはよく知られている}$$

よって  $a_n = \sum_{d|n} \chi(d)$ ,  $a_1=1$ ,  $a_n \geq 0$ ,  $a_{n^2} \geq 1$ 。 Mellin 変換は

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{-nx} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{1-\delta} \Gamma(\delta-1) \zeta(\delta) h(\delta, \chi) d\delta$$

$1 > c > 0$  と  $L$  積分路をうつして

$$= (-h(1, \chi) \log x + h'(1, \chi)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{1-\delta} \Gamma(\delta-1) \zeta(\delta) h(\delta, \chi) d\delta$$

$$C = \frac{1}{\log k} \text{ とおいて}$$

$$= (-h(1, \chi) \log 2 + h'(1, \chi)) + O\left(\chi^{-1} \frac{1}{\log k} k^{\frac{1}{2}} \log^2 k\right)$$

$x = k^{-a}$ ,  $\frac{1}{2} k^{-a}$  とおいて差を作ると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left( e^{-\frac{n}{2k^a}} - e^{-\frac{n}{k^a}} \right) = h(1, \chi) \log 2 + O\left(k^{\frac{1}{2}-a} \log^2 k\right)$$

よって  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  のとき

$$e^{-x}(1 - e^{-x}) \geq \frac{1}{2} x(1-x)$$

よって

$$\begin{aligned} \text{左辺} &\geq \frac{1}{2} \sum_{n \leq k^a} \frac{a_n}{n} \frac{n}{2k^a} \left(1 - \frac{n}{2k^a}\right) \geq \frac{1}{8} \frac{1}{k^a} \sum_{n \leq k^a} a_n \\ &\geq \frac{1}{8 k^a} \sqrt{k^a} = \frac{1}{8 k^{\frac{a}{2}}} \end{aligned}$$

よって

$$h(1, \chi) \log 2 > \frac{1}{8 k^{\frac{a}{2}}} - O\left(\frac{\log^2 k}{k^{a-\frac{1}{2}}}\right)$$

よって

$$a = 1 + \frac{4 \log \log k}{\log k} + \frac{b}{\log k}$$

よって,  $b$  を十分大にすれば

$$h(1, \chi) > \frac{c}{\sqrt{k} \log^2 k} \quad (c \text{ は } k \text{ に無関係な定数})$$

これらの結果を更に深めたものととして Siegel の定理があるが筆者は多少変形して述べる。  $\chi$  を mod  $k$  の剰余指標とし  $k|m$  とする。このとき  $\chi$  から

$$\chi^*(m) = \chi(m) \quad (n, m) = 1, \quad 0 \quad (n, m) \neq 1$$

として mod  $m$  の剰余指標をつくることもできる。  $\chi_1, \chi_2$  がそれぞれ mod  $k_1, \text{ mod } k_2$  の character,  $k_1|m, k_2|m$  のとき上記

のように  $\chi_1, \chi_2$  から  $\text{mod } m$  の 剰余指標  $\chi_1^*, \chi_2^*$  をつくり

$$\chi^*(n) = \chi_1^*(n) \chi_2^*(n)$$

により  $\text{mod } m$  の character  $\chi^*$  を作る。これは  $\chi_1, \chi_2$  の積という。特に  $\chi_1, \chi_2$  をそれぞれ  $\text{mod } k_1, \text{mod } k_2$  の real primitive character と  $\chi_1 \neq \chi_2$  とする。  $k_1 | m, k_2 | m$  なる  $m$  をとって  $\chi_1, \chi_2$  との積である  $\text{mod } m$  の real character  $\chi^*$  を作る。当然のことながら  $\chi^*$  は principal character になる。  $k_1 = k_2$  のときは  $\chi_1 \neq \chi_2$  であるから あきらかであるから  $k_1 \neq k_2$  とし証明しよう。  $(k_1, k_2) = k$  とし、  $k_1 = k \cdot k_1', k_2 = k \cdot k_2'$  としよう。 仮定により

$$(n, k_1) = 1, \quad n \equiv 1 \pmod{k}, \quad \chi(n) \neq 1$$

なる  $n$  がある。 さて

$$l \equiv n \pmod{k_1}, \quad l \equiv 1 \pmod{k_2}, \quad (l, m) = 1$$

なる  $l$  を求める。 これは  $m$  の素因子で  $k_1, k_2$  に含まれないものがあつたらその積を  $q$  とし  $l \equiv 1 \pmod{q}$  とてつければよい。 求めるときは

$$\chi_1(l) = \chi_1(n) \neq 1, \quad \chi_2(l) = 1, \quad \chi^*(l) = \chi_1(l) \chi_2(l) \neq 1$$

と故つて  $\chi^*$  は principal ではない。(Takagi)

$\chi, \chi_1$  をそれぞれ  $\text{mod } k, \text{mod } k_1$  に属する real primitive non-principal character かつ  $\chi \neq \chi_1$  とする。 このとき  $\text{mod } k k_1$  の character  $\chi \chi_1$  をつくり

$$F(s) = \zeta(s) L(s, \chi) \quad G(s) = \zeta(s) L(s, \chi) L(s, \chi_1) L(s, \chi_2)$$

$\frac{7}{8} < \sigma < 1$

$$(1) \quad F(s) \geq \frac{1}{2} - \frac{c_1 L(s, \chi)}{1-s} K^{8c(1-s)}$$

$$(2) \quad G(s) \geq \frac{1}{2} - \frac{c_2 L(s, \chi) L(s, \chi_1) L(s, \chi_2)}{1-s} (K K_1)^{4c(1-s)}$$

$F(s), G(s) \leq \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$   $\frac{7}{8} < \sigma < 1$   $a_1 = 1, a_n \geq 0$ ,  $\psi(s)$  は  $s=1$

$s=1$  の pole と  $s=0$  の residue  $\lambda$  がある  $\chi$  は  $L(s, \chi), L(s, \chi) L(s, \chi_1)$

$L(s, \chi_2)$ ,  $|s-2| < 2$

$$\psi(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (s-2)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (b_m - \lambda) (s-2)^m$$

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log^m n}{n^2 m!}, \quad b_0 \geq 1, \quad b_m \geq 0$$

$\psi$  Taylor 展開せよ,  $|s-2| = \frac{3}{2}$  上  $\psi$  便宜上

$$\psi(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \begin{cases} O(K^{2c}) & \psi(s) = \zeta(s) L(s, \chi) \\ O((K K_1)^c) & \psi(s) = \zeta(s) L(s, \chi) L(s, \chi_1) L(s, \chi_2) \end{cases}$$

$\psi$  評価してよ。  $\psi$  から Siegel ( $\psi$  は  $\chi$  Estermann) のよ

$\frac{7}{8} < \sigma < 1$

$$\psi(s) \geq 1 - 4 \left(\frac{3}{4}\right)^m C_3 K^A - \lambda \frac{(2-s)^n}{1-s}$$

$A$  は  $\psi(s) = F(s)$  のとき  $2c$ ,  $\psi(s) = G(s)$  のとき  $c$  とする また

$\chi$  は  $\chi$  に応じて  $K = K, K = K K_1$  とする

$$n = \left\lceil \frac{\log 8 C_3 K^A}{\log \frac{4}{3}} \right\rceil + 1$$

よって (1), (2) が成り立つ。上記  $C$  は  $C \geq \frac{1}{2}$  のよ

よって  $\frac{\varepsilon}{8C} < \frac{1}{8}$  である。このとき  $0 < \varepsilon < \frac{1}{\lambda}$  であるから  $\frac{\varepsilon}{8C} < \frac{1}{8}$

(1) によって

$$F\left(1 - \frac{\varepsilon}{8C}\right) \geq \frac{1}{2} - \frac{8C_1 C}{\varepsilon} h(1, \lambda) k^\varepsilon$$

これより

$$h(1, \lambda) < \frac{1}{16C_1 C} \frac{\varepsilon}{k^\varepsilon}$$

仮定  $\lim_{\delta \rightarrow 1-0} F(\delta) = -\infty$  に注意して、 $1 - \frac{\varepsilon}{8C} < \delta < 1$  であるとき

も  $-\infty$   $h(\delta, \lambda)$  の零点がある。  $\delta = \delta_0 \equiv \frac{1}{16C_1 C}$  なる  $\delta_0$  まで

1,  $h(1, \lambda) \leq a \frac{\varepsilon}{k^\varepsilon}$ ,  $h(1, \lambda_1) \leq a \frac{\varepsilon}{k_1^\varepsilon}$  が同時に成立する

として示すことができる。上記考察の結果

$$1 - \frac{\varepsilon}{8C} < \delta < 1$$

に  $h(\delta, \lambda)$  と  $h(\delta, \lambda_1)$  の零点が少なくとも一つずつ存在する

から  $G(\delta)$  は  $0 < \delta < 1$  であるとき 2 つの根をもつ。(2) により

$\frac{7}{8} < \delta < 1$  であるとき

$$G(\delta) \geq \frac{1}{2} - H(\delta), \quad H(\delta) = \frac{C_2 h(1, \lambda) h(1, \lambda_1) h(1, \lambda \lambda_1)}{1 - \delta} (k k_1)^{4C(1-\delta)}$$

である

$$\delta_1 = 1 - \frac{\eta}{\log k k_1}, \quad \delta_2 = 1 - \frac{\varepsilon}{8C}$$

である。もし  $G(\delta_1) > 0$ ,  $G(\delta_2) > 0$  ならば  $H(\delta)$  は  $0 < \delta < 1$  である

convex function であるから  $\delta_2 \leq \delta \leq \delta_1$  or  $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_2$  である

$G(\delta) > 0$  となる。したがって

$$1 - \frac{\eta}{\log k k_1} < \delta < 1$$

に  $G(\delta)$  は少なくとも 2 つの根をもつが、 $\eta$  が十分小にできる

仮らば Page の理論により不可能なことはなる。したがって  
適当に正数  $a$  に対しては高々一つの例外を除き

$$(3) \quad h(1, k) > a \frac{\varepsilon}{k\varepsilon} \quad (0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$$

となる。  $a$  をどの程度小さくすればよいかを調べてみる。

$$h(1, k) \leq c_+ \log k k_1$$

であるから

$$\begin{aligned} H(\delta_1) &< c_2 \frac{\log k k_1}{\eta} a^2 \frac{\varepsilon^2}{(k k_1)^\varepsilon} c_+ \log(k k_1) (k k_1)^{\frac{4c_+\eta}{\log k k_1}} \\ &= \frac{a^2 c_2 c_+}{\eta} e^{4c_+\eta} \log^2(k k_1) \frac{\varepsilon^2}{(k k_1)^\varepsilon} \end{aligned}$$

一般に  $x > 0, \varepsilon > 0$  ならば  $\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon^2} \geq \frac{e^2}{4} \log^2 x$  によって  $x = k k_1 \geq L$

$$H(\delta_1) < \frac{a^2}{\eta} c_2 c_+ e^{4c_+\eta} \frac{4}{e^2}$$

右辺は  $\eta$  が十分小ならばあり  $a$  が十分小にすれば  $\frac{1}{2}$  以下となる。  $G(\delta_1) > 0$  が保証される。

$$\begin{aligned} H(\delta_2) &< c_2 \frac{8c_+}{\varepsilon} a^2 \frac{\varepsilon^2}{(k k_1)^\varepsilon} c_+ \log(k k_1) (k k_1)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\ &= 16 a^2 c_2 c_+ \log(k k_1) \frac{\varepsilon}{(k k_1)^{\frac{\varepsilon}{2}}} \end{aligned}$$

一般に  $x > 0, \varepsilon > 0$  ならば  $\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon} \geq e \log x$  によって  $x = k k_1 \geq L$

$$H(\delta_2) < \frac{16 a^2 c_2 c_+}{\varepsilon}$$

よって  $a$  が十分小にすれば右辺  $\frac{1}{2}$  以下にして  $G(\delta_2) > 0$ 。

以上により (3) が証明された。

以上の前置きとして Linnik 第二基本定理 (Prachar, Primzahlverteilung, 1957, X, §2) の Turan-Knapowski 流による簡明化を紹介する。以下 Knapowski の絶筆となった論文

On Siegel's theorem, Acta Arithmetica, Bd 14 (1968), 417-424 の紹介であり幾分簡明化し幾分注を付した。 $\chi$  は real non-principal primitive character mod.  $k$  とし  $h(\delta, \chi)$  を exceptional zero  $\beta = 1 - \delta$  を持つとする。Page の理論により絶対定数  $C$  が存在して

$$0 < \delta < \frac{C}{\log k}$$

$\chi_1$  を primitive character mod.  $k_1$  とする。  $a > 1$  を任意に与え  $\varepsilon > 0$  を  $\frac{1}{C} > \varepsilon$  なるように与える。このとき

主定理  $k \geq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$  とし  $h(\delta, \chi)$  を exceptional zero  $\beta = 1 - \delta$  を持つとする。  $k_1 \leq k$  なる  $h(\delta, \chi_1)$  を  $\beta = 1 - \delta_1$  なる zero  $\beta_1 + i\delta_1$  を

$$1 - \varepsilon < \beta_1 < 1 \quad e^{k^{a\varepsilon}} \geq |\gamma_1|$$

なる範囲は少くとも一つは

$$\delta \geq \frac{1}{k^{(a+2\log a + C_0)\varepsilon}} \quad (C_0 \text{ はある絶対定数})$$

注意 仮定により  $k \geq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}} > e^{\frac{C}{\varepsilon}}$  よって  $\log k > \frac{C}{\varepsilon}$ ,

$$\text{よって } \varepsilon > \frac{C}{\log k} > \delta$$

以下証明に入るが、数段に分れる。

$\chi_1$  を principal とするとき

$$f(s) = L(s, \chi_1) L(s+\delta, \chi_1)$$

ととき,  $\chi_1$  を principal のとき

$$f(s) = L(s, \chi_1) L(s-\delta, \chi_1)$$

とすれば  $f(s)$  は整函数である。  $s = \sigma + it$  とし  $\sigma > 1 + \delta$  ならば

$$\begin{aligned} \frac{f'(s)}{f(s)} &= \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} + \frac{L'(s \pm \delta, \chi_1)}{L(s \pm \delta, \chi_1)} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n) \Lambda(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n) \Lambda(n)}{n^{s \pm \delta}} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \Lambda(n)}{n^s} \quad b_n = \chi_1(n) (1 + \chi_1(n) n^{\mp \delta}) \end{aligned}$$

ただし,  $\Lambda(n)$  は Mangoldt の函数で

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

よって Rodoskii によって導入された次の積分を考える。

$y > 0$ ,  $a$  任意実数,  $s = a + it$ ,  $\beta = 2ay - \log n$  とし

$$\begin{aligned} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} n^{-s} e^{-s^2 y} ds &= i n^{-a} e^{a^2 y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y t^2 + i \beta t} dt = i n^{-a} e^{a^2 y} \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{1}{4y} \beta^2} \\ &= i \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{1}{4y} \log^2 n} \end{aligned}$$

よって  $n$  の代り  $n e^{-z}$  とする

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} n^{-s} e^{y s^2 + z s} ds = i \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{1}{4y} \log^2 (n e^{-z})}$$

よって

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{b_n}{n^{s+3\epsilon}} e^{y s^2 + z s} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{1}{4y} \log^2 (n e^{-z})} \frac{b_n}{n^{3\epsilon}}$$

$a \geq 4\varepsilon$  ならば (この  $a$  は (3) の  $a$  とは異なる, 主定理  $a$  と異なる)

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f'(s)}{f(s)} (\delta + 1 + i\delta_1 - 3\varepsilon) e^{y\delta^2 + z\delta} ds = -\frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n) (1 + \chi(n)n^{\frac{F\delta}{2}}) \Lambda(n)}{n^{1+i\delta-3\varepsilon}}$$

$$\times e^{-\frac{1}{4y} \log^2(n e^{-z})}$$

$$|I| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \sum_n \frac{\Lambda(n) (1 + \chi(n)n^{\frac{F\delta}{2}})}{n^{1-3\varepsilon}} e^{-\frac{1}{4y} \log^2(n e^{-z})}$$

ここで  $\omega$  は後に定める正整数とし

$$y = A\omega, \quad z = B\omega, \quad A = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad B = \frac{30}{\varepsilon}$$

と置き, そのときの  $I$  を  $I_\omega$  とおく。始めに右辺の和を場合分けして評価する。

1)  $n < e^{\frac{B\omega}{2}}$  のとき このとき

$$e^{-\frac{1}{4A\omega} \log^2(n e^{-B\omega})} \leq e^{-\frac{1}{4A\omega} \left(\frac{B\omega}{2}\right)^2} = e^{-\frac{900}{16}\omega} < e^{-56\omega}$$

$$|I_\omega| \text{ への contribution } \ll \frac{B\omega}{\sqrt{A\omega}} e^{-50\omega} \sum_{n < e^{\frac{B\omega}{2}}} \frac{1}{n^{1-4\varepsilon}} \ll \frac{B\omega}{\sqrt{A\omega}} e^{4\omega}$$

$$\times \sum_{m < e^{\frac{B\omega}{2}}} \frac{1}{m} \ll \frac{(B\omega)^2}{\sqrt{A\omega}} e^{4\omega} \ll \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} e^{4\omega} \ll \frac{e^{5\omega}}{\varepsilon}$$

2)  $n > e^{2B\omega}$  のとき このとき

$$|I_\omega| \text{ への contribution } \ll \frac{1}{\sqrt{A\omega}} \int_{e^{2B\omega}}^{\infty} \frac{\log z}{z^{1+4\varepsilon}} e^{-\frac{1}{4A\omega} \log^2(z e^{-B\omega})} dz$$

$$\ll \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}} \int_{e^{2B\omega}}^{\infty} \frac{\log u}{u^{1+4\varepsilon}} e^{-\frac{\log u}{4A\omega}} du \quad (z e^{-B\omega} = u \text{ とおいた})$$

$$\ll \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}} \int_{B\omega}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{4A\omega} + 4\varepsilon t} dt \quad (\log u = t \text{ とおいた})$$

$$t \geq B\omega \text{ より } t \equiv \frac{3c}{\varepsilon} \omega \equiv \frac{144}{5} \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{144}{5} \varepsilon A \omega \text{ より}$$

$$4\varepsilon t - \frac{t^2}{4A\omega} \leq -\frac{t^2}{9A\omega}$$

よって  $|I_\omega|$  の contribution は

$$\ll \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}} \int_{B\omega}^{\omega} t e^{-\frac{t^2}{9A\omega}} dt = \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}} e^{-\frac{B^2\omega^2}{9A\omega}} 5A\omega$$

$$\ll \sqrt{A\omega} e^{120\omega} e^{-100\omega} \ll \frac{e^{21\omega}}{\varepsilon}$$

以上を応用して

(4)  $f(s)$  は前述のよりに定義し,

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f'}{f}(s+1+i\delta, -3\varepsilon) e^{A\omega s^2 + B\omega s} ds \quad (a \geq 4\varepsilon)$$

とする。  $A = \frac{1}{\varepsilon^2}$ ,  $B = \frac{3c}{\varepsilon}$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ),  $\omega$  正整数,  $\chi$  real character

mod  $k$  とする

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi A\omega}} \sum_{\frac{B\omega}{2} \leq n \leq 2B\omega} \frac{N(n)(1+\chi(n)n^{-\delta})}{n^{1-3\varepsilon}} e^{-\frac{1}{4A\omega} \log^2(n e^{-B\omega})} \right|$$

$$> |I_\omega| - c_1 \frac{e^{21\omega}}{\varepsilon} \quad (\text{以下 } c_1, c_2, \dots \text{ はある絶対定数})$$

始の 12 のべた Hadamard の定理より,  $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{2} < 17$

$$\frac{f'}{f}(s) = \frac{h'}{h}(s, \chi_1) + \frac{h'}{h}(s \pm \delta, \chi_1)$$

$$= \sum_{|\sigma_1 - t| < 1} \frac{1}{s - \sigma_1} + O(\log k_1(1+|t|))$$

$$+ \sum_{|\delta - t| < 1} \frac{1}{s \pm \delta - \sigma} + O(\log k_1(1+|t|))$$

左に、 $\rho_i = \beta_i + i\delta_i$ ,  $\rho = \beta + i\delta$  はそれぞれ  $h(\delta, \chi_1)$ ,  $h(\delta, \chi_2)$  の zero 点とする。この証明はかんたんではないが後に同じような手法を使うときはあるから省略しておく。基本となる：  
 $\sigma$  は  $0 < \beta_1 < 1$ ,  $|t - \delta_1| < 1$  を満たす  $h(\delta, \chi_1)$  の zero 点の個数を  $N$   $O\{\log(k_1(1+|t|))\}$  とおけるようにとだけ注意しておく。

一般に  $\sigma > 1$  として

$$-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\sigma}} < \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \int_1^{\infty} \frac{\log u}{u^{\sigma}} du < 1 + \left[ \frac{\log u}{(1-\sigma)u^{\sigma-1}} \right]_1^{\infty}$$

$$-\int_1^{\infty} \frac{du}{(1-\sigma)u^{\sigma}} = 1 + \frac{1}{(\sigma-1)^2} \quad \text{また} \quad \frac{1}{\sigma-1} < S(\sigma) \text{ より}$$

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{S} < \sigma - 1 + \frac{1}{\sigma-1} \quad (\text{Landau})$$

$\delta = 1 + 3\varepsilon + i\delta_1$  とおくと

$$\Re \frac{h'(\delta, \chi_1)}{h(\delta, \chi_1)} + \Re \frac{h'(\delta \pm \delta, \chi_2)}{h(\delta \pm \delta, \chi_2)} \leq \sum \frac{\Lambda(n)}{n^{1+3\varepsilon}} + \sum \frac{\Lambda(n)}{n^{1+3\varepsilon \pm \delta}}$$

$$\leq 2 \left( -\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon) \right) \leq 2 \left( \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \leq \frac{4}{\varepsilon}$$

また  $1-4\varepsilon \leq \sigma \leq 1+\delta$ ,  $|t - \delta_1| \leq 30\varepsilon$  内にある  $f(\delta)$  の zero  $\rho_i, \rho$  のみ考えその個数の total を  $N$  とすれば

$$\Re \frac{1}{\delta - \rho_i} = \frac{\Re(\delta - \rho_i)}{|\delta - \rho_i|^2} \geq \frac{2\varepsilon}{36\varepsilon^2 + 900\varepsilon^2} = \frac{1}{468\varepsilon}$$

$$\Re \frac{1}{\delta \pm \delta - \rho} = \frac{\Re(\delta \pm \delta - \rho)}{|\delta \pm \delta - \rho|^2} \geq \frac{\varepsilon}{49\varepsilon^2 + 900\varepsilon^2} = \frac{1}{949\varepsilon}$$

以上より

$$\frac{4}{\varepsilon} \geq \frac{N}{1000\varepsilon} + O(\log k(1+|\delta_1|))$$

$$\text{or} \quad \frac{4}{\varepsilon} + C_2 \log k(1+|\delta_1|) \geq \frac{N}{1000\varepsilon}$$

$$\text{or} \quad N \leq 4000 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon} C_2 (\log 2k + k^{a\varepsilon}) \right)$$

これより

- (5)  $K: 1-4\varepsilon \leq \sigma \leq 1+\delta, |t-\delta_1| \leq 3C\varepsilon$  内に ある  $f(s)$  の zero の個数を  $N$  とすれば

$$N \leq c_3 k^{a\varepsilon} \quad (a \geq 1)$$

この  $a$  は主定理の  $a$  である。(4) の  $a$  とは意味が異なる。したがって  $a \geq 1$ 。つまりぬこことあるが、ここで次のことを使った。それは後にも使うのであけておく

(6)  $x \geq e^{\frac{1}{x^2}}$  ならば  $\eta x^\eta \geq \frac{1}{6} \log x$

(7)  $x \geq e^{\frac{1}{x^2}}$  ならば  $x^2 \geq \frac{1}{24} (\log x)^2$

いずれも学生の演習問題程度。

次の 2 つは Knapowski の方法の中にもすぐれたものといえる。

(8)  $1-3\varepsilon \leq \exists \theta \leq 1-2\varepsilon, |t-\delta_1| \leq 21\varepsilon$

such that  $\left| \frac{f'}{f}(\theta+it) \right| \leq c_4 k^{(2a+1)\varepsilon}$

(9)  $20\varepsilon \leq \exists \theta' \leq 21\varepsilon, 1-3\varepsilon \leq \sigma \leq 1+\delta+\varepsilon$

such that  $\left| \frac{f'}{f}(\sigma+i\delta_1+i\theta') \right| \leq c_5 k^{(2a+1)\varepsilon}$

同じように (8) を証明する。(5) の矩形  $K$  において strip  $(1-3\varepsilon, 1-2\varepsilon)$  を縦割, 等間隔  $(1/N)$  等分する。その一つのせまい strip には zero がないようにできるから, その strip の中間に縦線をひき実数部分を  $\theta$  とする。ここで  $s = \theta + it$  として, 再び前の Hadamard の公式を使って

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f}(\delta) - \frac{f'}{f}(2+it) &= \frac{h'}{h}(\delta, \chi_1) - \frac{h'}{h}(2+it, \chi_1) \\ &\quad + \frac{h'}{h}(\delta \pm \delta, \chi \chi_1) - \frac{h'}{h}(2+it \pm \delta, \chi \chi_1) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\delta+a_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{2+it+a_1}{2} \right) + \sum_{\substack{\sigma \\ \delta-f_1}} \frac{2-\sigma}{(2+it-f_1)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{\delta \pm \delta + a_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{2 \pm \delta + it + a_1}{2} \right) + \sum_{\substack{\sigma \\ \delta \pm \delta - f_1}} \frac{2-\sigma}{(2 \pm \delta + it - f_1)} \\ &= O(\log(|t|+2)) + \sum_{\substack{\sigma \\ \delta}} + \sum_{\substack{\sigma \\ \delta}} \end{aligned}$$

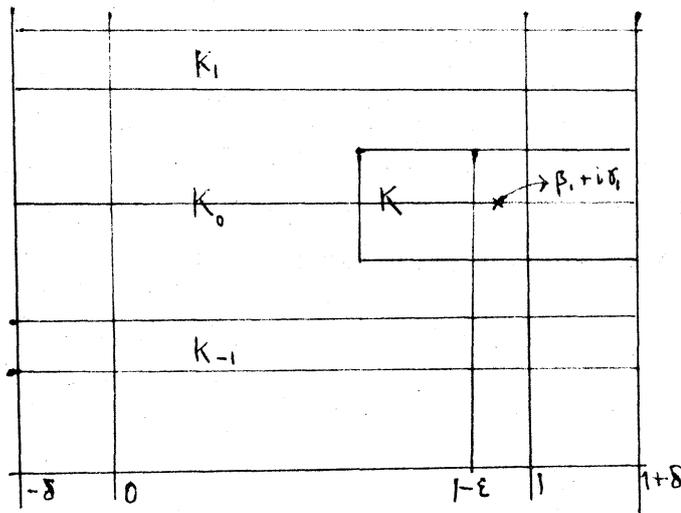
∴ strip  $(-\delta, 1+\delta)$  上の次のような区間の矩形に分割する。

$K$  :  $1-4\varepsilon \leq \sigma \leq 1+\delta$  ε定義

$K_0 + K$  :  $-\delta \leq \sigma \leq 1+\delta, |t-\delta_1| \leq 3\varepsilon$  ( $\varepsilon$  により  $K_0$ )

$K_j, K_{-j} (j \neq 0)$  :  $-\delta \leq \sigma \leq 1+\delta, (2j+1)\varepsilon \leq |t-\delta_1| \leq (3\varepsilon+j)$

右図の  $\rho_1 + i\delta_1$  は  
主定理 12 のべられ  
た  $h(\delta, \chi_1)$  の zero  
で  $h(\delta, \chi_1)$  の一般  
的 zero の意味  
ではない。  $\rho$  又は  
 $\rho_1$  が  $K_j (j \neq 0)$  に  
あるとき



$$\left| \frac{2-\sigma}{(\delta-\rho_1)(2+it-\rho_1)} \right| \leq \frac{2}{h^2} \quad h = |\delta \rho_1 - t|$$

が成立する。なぜなら  $\rho_1, \delta, 2+it$  のつくる二等辺三角形の  
3辺を  $a = |\rho_1 - 2 - it|, b = |t - \delta_1|, c = |\rho_1 - \delta_1|$  とし、 $b$  を底辺とし

高さ \$h\$ の正等辺三角形の等辺の長さを \$d\$, 頂角を \$\alpha\$ とする

$$\left| \frac{z - \sigma}{(\delta - \rho_1)(z + it - \rho_1)} \right| \leq \frac{b}{ac} \leq \frac{b}{d^2} = \frac{b \sin 2\alpha}{d^2 \sin 2\alpha} \leq \frac{2b \sin \alpha}{bh} \leq \frac{2 \tan \alpha}{h}$$

$$\leq 2 \frac{\frac{b}{2}}{h} \frac{1}{h} = \frac{b}{h^2} \leq \frac{2}{h^2}$$

このことから

$$\sum_{j \neq 0} \sum_{\rho \in K_j} \ll \sum \log k (|\delta_1| + |j| + 30) \cdot \frac{1}{j^2} \ll k^{aE}$$

また

$$\sum_{\rho \in K} \ll \frac{k^{aE}}{\varepsilon} k^{aE} \ll k^{(2a+1)E} \quad (k \geq e \text{ かつ } k^E \gg \log k \geq \frac{1}{\varepsilon})$$

\$= k^{12}\$

$$\sum_{\rho \in K_0} \ll \frac{1}{\varepsilon} k^{aE} \ll k^{(a+1)E}$$

以上により (8) を示すことができる。

さて \$4\varepsilon + \delta + i\omega\$

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{4\varepsilon + \delta - i\omega}^{4\varepsilon + \delta + i\omega} \frac{f'(s)}{f(s)} (\delta + 1 + i\delta_1 - 3\varepsilon) e^{A\omega s^2 + B\omega s} ds, \quad A = \frac{1}{\varepsilon^2}, B = \frac{3\sigma}{\varepsilon}$$

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{h'}{h}(s, \chi_1) + \frac{h'}{h}(s \pm \delta, \chi \chi_1)$$

により積分路を移動し留数の定理を用いる

$$I_\omega = I_1 + I_2 + I_3 + (K^* \text{ における } \text{residue})$$

と分かる。ここで \$I\_j, K^\*\$ は次のように

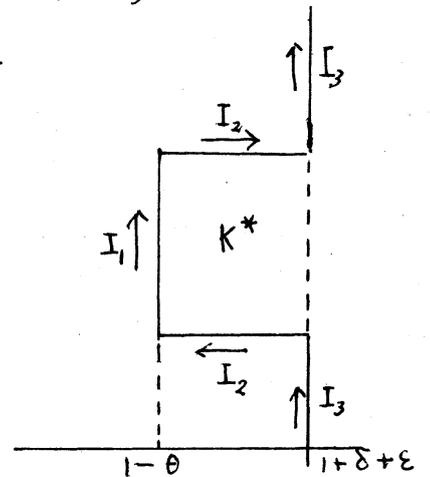
して定まる。

$$I_1: s = \theta - 1 + 3\varepsilon + it, \quad |t| \leq \theta'$$

$$I_2: s = \sigma \pm i\theta', \quad \theta - 1 + 3\varepsilon \leq \sigma \leq 4\varepsilon + \delta$$

$$I_3: s = 4\varepsilon + \delta + it, \quad \theta' \leq |t| < \infty$$

以下 \$I\_j\$ の評価。



$$I_1 \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{A\omega\varepsilon^2 + B\omega\varepsilon} \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{31\omega}$$

$$I_2 \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{A\omega(4\varepsilon^2 - \theta'^2) + B\omega 4\varepsilon} \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{4\omega - 400\omega + 120\omega} \\ = k^{(2a+1)\varepsilon} e^{-240\omega}$$

$$I_3 \ll \int_{20\varepsilon}^{\infty} \log^2 k (|t|+2) e^{A\omega(25\varepsilon^2 - t^2) + B\omega 5\varepsilon} dt \quad \left(\frac{1}{\varepsilon} \leq \log k\right)$$

$$\ll \int_{20\varepsilon}^{\infty} (\log^2 k + \log^2 t) e^{A\omega(25\varepsilon^2 - \frac{1}{2}400\varepsilon^2 - \frac{1}{2}t^2) + 150\omega} dt$$

$$\ll \int_{20\varepsilon}^{\infty} (\log^2 k + \log^2 t) e^{-25\omega} e^{-\omega \frac{t^2}{2\varepsilon^2}} dt \quad (t = 20\varepsilon u)$$

$$\ll \int_1^{\infty} (\log^2 k + \log^2 20\varepsilon + \log^2 u) e^{-25\omega} e^{-200\omega u^2} 20\varepsilon du$$

$$\ll e^{-25\omega} \log^2 k \ll e^{-25\omega} k^\varepsilon \ll k^{a\varepsilon} e^{-25\omega}$$

よって

$$I_\omega = \sum_{\rho \in K^*} \left\{ e^{A\omega(\rho_1 - 1 + 3\varepsilon - i\delta_1)^2 + B\omega(\rho_1 - 1 + 3\varepsilon - i\delta_1)} \right. \\ \left. + e^{A\omega(\rho_1 - \delta - 1 + 3\varepsilon - i\delta_1)^2 + B\omega(\rho_1 - \delta - 1 + 3\varepsilon - i\delta_1)} \right\} \\ + O(k^{(2a+1)\varepsilon} e^{31\omega})$$

{ } 内の各項を  $z_j$  とおくと  $\rho_1 = \beta_1 + i\delta_1$  かつ  $K^*$  内にあるから

$z_j$  の set は空ではないから

$$\text{Max } |z_j| \geq e^{A\omega(\beta_1 - 1 + 3\varepsilon)^2 + B\omega(\beta_1 - 1 + 3\varepsilon)} \\ > e^{4A\varepsilon^2 + 2B\omega} = e^{64\omega}$$

こゝで有名な Turan の基本定理を使う。

Turan の基本定理:  $z_j$  complex,  $|z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$   
 $g, M$  positive,  $N$  は  $M$  より小なる正整数。これらより  $g \geq 2M$  と  
 次のような正整数  $\omega$  が存在する

$$g \leq \omega \leq g + M$$

$$|z_1^\omega + z_2^\omega + \dots + z_N^\omega| \geq \left(\frac{M}{g+M}\right)^M |z_1|^\omega$$

この定理を上記  $I_\omega$  の右辺に適用するため

$$g = d\varepsilon \log k, \quad M = d\varepsilon \log k$$

とおく。  $d > 1$  は後で適当に条件のつけられる定数とする。

$$|I_\omega| > e^{6d\omega} \left(\frac{1}{16}\right)^{d\varepsilon \log k} - c_6 k^{(2a+1)\varepsilon} e^{31\omega}$$

よって

$$d\varepsilon \log k \leq \omega \leq 2d\varepsilon \log k$$

であるから

$$|I_\omega| > k^{\varepsilon 61d} - k^{\varepsilon(2a+1 + \log c_6 - 62d)}$$

$$\text{よって } c_6 = e^{\log c_6} \leq e^{\varepsilon \log k \cdot \log c_6} = k^{\varepsilon \log c_6} \quad \text{よって}$$

$$61d \geq 2a+1 + \log 2c_6 - 62d, \quad d \geq \frac{2a+1 + \log 2c_6}{123}$$

なるように  $d \varepsilon$  とする

$$|I_\omega| > \frac{1}{2} k^{\varepsilon 61d}$$

(4) により

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{\pi A\omega}} \sum_{e^{\frac{3\omega}{2}} \leq m \leq e^{2B\omega}} \frac{\Lambda(m)(1 + \Lambda(m) n^{-\beta\delta})}{n^{1-\beta\varepsilon}} e^{-\frac{1}{4A\omega} \log^2(m e^{-B\omega})} \right|$$

$$> \frac{1}{2} k^{\varepsilon 61d} - c_1 \frac{e^{21\omega}}{\varepsilon}$$

∴ なる

$$+ C_1 \frac{e^{2B\omega}}{\varepsilon} \leq k^{\varepsilon \log 4C_1 + \varepsilon + 42d\varepsilon} \leq k^{\varepsilon(\log 4C_1 + 1 + 42d)} \leq k^{\varepsilon 61d}$$

$$\text{if } d \geq \frac{\log 4C_1 + 1}{29}$$

∴ < 2

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi A\omega}} e^{2B\omega(\delta+3\varepsilon)} \sum_{\substack{e^{\frac{B\omega}{2}} \leq n \leq e^{2B\omega} \\ n=p^m}} \frac{1 + \chi(n)n^{-\delta}}{n} > \frac{1}{4} k^{\varepsilon 61d}$$

∴ なる

$$\frac{B\omega}{\sqrt{A\omega}} \leq 30\sqrt{\omega}, \quad e^{2B\omega(\delta+3\varepsilon)} \leq e^{60 \cdot 2d\varepsilon \log k} = k^{\varepsilon 120d}$$

∴ ある

$$\sum_{\substack{e^{\frac{B\omega}{2}} \leq n \leq e^{2B\omega} \\ n=p^m}} \frac{1 + \chi(n)n^{-\delta}}{n} > \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{30\sqrt{\omega}} k^{-59d\varepsilon} > \frac{1}{80 k^{60d\varepsilon}}$$

∴ < 2

(10)  $C_7$  は十分大なる絶対定数  $\times$   $\nu$ ,  $a$  は  $\nu$  について  $d \geq \frac{a}{60} + C_7$

∴ なる

$$\sum_{k^{15d} \leq p^m \leq k^{120d}} \frac{1 + \chi(p^m)p^{-m\delta}}{p^m} > \frac{1}{80 k^{60d\varepsilon}}$$

∴ なる

$$\delta \leq \frac{1}{k^{6\varepsilon}}$$

∴  $C_7$  は十分大なるは矛盾を生ずる  $\times$   $\nu$  である。また

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k^{15d} \leq n \leq k^{120d} \\ \chi(n) = -1 \\ n=p^m}} \frac{1 + \chi(n)n^{-\delta}}{n} &= \sum \frac{1 - \frac{1}{n^\delta}}{n} \leq \sum \frac{1 - e^{-\delta \log n}}{n} \\ &\leq \sum \frac{\delta \log n}{n} \leq \sum \frac{\delta 120d \log k}{n} \end{aligned}$$

$$\leq \delta 120d \log k (120d \log k - 15d \log k + O\left(\frac{1}{k^{15d}}\right))$$

$$\leq \frac{120^2 d^2 \log^2 k}{k^{1+\varepsilon}} \leq \frac{k^\varepsilon (1 + \log(120^3 \cdot 24d^2))}{k^{6\varepsilon}} \frac{1}{120}$$

$$\leq \frac{1}{120} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}} \quad \text{if } b \geq 60d + 1 + \log(120^3 \cdot 24 \cdot d^2)$$

(10) による

$$\sum_{\substack{k^{15d} \leq n \leq k^{120d} \\ n = p^m \\ \chi(n) = 0 \text{ or } 1}} \frac{1 + \chi(p^m) p^{-md}}{p^m} > \frac{1}{240} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}}$$

周知のよる  $\sigma > 1$  として  $\zeta(\sigma) L(\sigma, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} > 0$

$$a_n = \sum_{d|n} \chi(d), \quad n = p^m \text{ のときは } a_n = 1 + \chi(p) + \dots + \chi(p)^m$$

したがって  $\chi(p^m) = 0$  又は  $1$  ならば

$$a_n \geq 1 \quad (\chi(p) = -1 \text{ ならば } \chi(p)^m = 1 \text{ なるためは } m \text{ even})$$

故に

$$\sum_{k^{15d} \leq n \leq k^{120d}} \frac{a_n}{n} > \frac{1}{240} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}}$$

まとめると

$$(11) \quad b \geq 60d + 1 + \log(120^3 \cdot 24d^2), \quad \delta \leq \frac{1}{k^{6\varepsilon}} \text{ ならば}$$

$$\sum_{k^{15d} \leq n \leq k^{120d}} \frac{a_n}{n} > \frac{1}{480} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}}$$

したがって次の式が成立する。

C は Euler の定数とする

$$(12) \quad \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n} = h(1, x) (\log x + C) + h'(1, x) + O\left(k \frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)$$

一般に  $\phi(t)$  は smooth な函数  $\chi$  なる  $A(t) = \sum_{n \leq t} a_n$  なる  $\chi$

$$A(x)\phi(x) - \sum_{n \leq x} a_n \phi(n) = \sum_{n \leq x} \int_n^x a_n \phi'(t) dt = \int_1^x \left(\sum_{n \leq t} a_n\right) \phi'(t) dt$$

これより  $x, y \geq 1$  なる  $\chi$

$$\sum_{n \leq x} a_n \phi(n) = - \int_1^x A(t) \phi'(t) dt + A(x) \phi(x)$$

$$\sum_{y < n \leq x} a_n \phi(n) = - \int_y^x A(t) \phi'(t) dt + A(x) \phi(x) - A(y) \phi(y)$$

これを用いて

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \log n}{n} = -h'(1, x) + O\left(xk \frac{\log x}{x}\right)$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} = h(1, x) + O\left(\frac{2k}{x}\right), \quad \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{2}{x}\right)$$

右の  $\frac{2}{x}$  を  $\chi$  する  $\chi = \chi$

$$\sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n} = \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{d} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} \frac{1}{m} + \sum_{\sqrt{x} < d \leq \frac{x}{m}} \frac{\chi(d)}{d}$$

上記の結果を代入し整理すれば (12) となる。

(12) により  $d$  を十分大にすれば

$$\sum_{k^{15d} \leq m \leq k^{120d}} \frac{a_m}{m} \leq 120 d \log k L(1, x)$$

よって (11) の条件の下に

$$120 d \log k L(1, x) > \frac{1}{480} \frac{1}{k^{60d\delta}}$$

$$\chi \text{ して } \delta \leq \frac{1}{k^{60\epsilon}} \text{ として}$$

$$\frac{L(1, x)}{\delta} > \frac{k^{60\epsilon}}{120 \cdot 480 d \log k \cdot k^{60d\epsilon}} > \frac{\epsilon(1 + \log(120 \cdot 4d^2))}{120^2 \cdot 4d \log k}$$

よって

$$\frac{h(1, x)}{\delta} = \frac{h(1, x) - h(\beta, x)}{1 - \beta} = h'(\alpha, x) \ll c_\delta \log^2 k \quad (1 - \delta < \alpha < 1)$$

よって

$$120^2 + d c_8 \log^3 k > k^{\varepsilon(1 + \log(120^3 + 24d^2))}$$

$$(6), (7) \text{ によつて左辺は } k \geq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}} \text{ ならば}$$

$$< 120^2 + d c_8 \cdot 6 \cdot 29 \varepsilon k^{2\varepsilon} < k^{\varepsilon(2 + \log(120^3 c_8 d))}$$

したがつて  $d$  を十分大きくとれば矛盾が生ずる。以上を整理して主定理の結果がえられる。今までの計算を更に細部にわたつて反省してみると次のように述べた方がよさう。

**主定理**の整理した形:  $\chi$  を non-principal primitive real character to the modulus  $k$ . Page の理論によれば絶対定数  $c$  が存在して

$$1 - \frac{c}{\log k} \leq \delta \leq 1 \quad (\text{勿論 } c < 1)$$

の実軸の部分には  $L(\delta, \chi)$  の zero  $\rho$  があつて  $\delta$  を高々 1 つてある。そのような zero を exceptional or Siegel zero とする。

そのような zero が存在するとして  $\delta = 1 - \beta$  とおく。  $\chi_1$  を primitive character mod  $k_1$  として  $k_1 \leq k$ . そのような一つの  $L(\delta, \chi_1)$  が  $\rho_1$  以外の zero  $\beta_1 + i\gamma_1$  を

$$1 - \varepsilon < \beta_1 < 1 \quad e^{k^{a\varepsilon}} \geq |\gamma_1|$$

なる範囲に 1 つてもあつたとする。  $\varepsilon$  は任意に与えられた正数 (たゞし  $0 < \varepsilon < 1$ ),  $a$  は十分大きな正数とする。そのとき  $k \geq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$  として

$$\delta > \frac{1}{k^{a\varepsilon}} \quad (a \text{ は絶対定数})$$

この結果が  $h(\beta, \lambda)$  の評価 (下からの) と関連をとつことは次のようにしてわかる。(1)より

$$0 = \delta(\beta) h(\beta, \lambda) \geq \frac{1}{\lambda} - \frac{c_1 h(\beta, \lambda)}{1-\beta} k^{\delta_0(1-\beta)} \quad (c \in c_0, \lambda \geq 2)$$

したがって

$$h(\beta, \lambda) \geq \frac{1}{2c_1} (1-\beta) k^{-\delta_0(1-\beta)} \geq \frac{1}{2c_1} (1-\beta) k^{-\frac{\delta_0}{\delta} \frac{c}{\log k}}$$

これは  $\frac{7}{8} < \beta < 1$  と考えよ。よって

$$\frac{h(\beta, \lambda)}{1-\beta} \geq \frac{1}{2c_1} e^{-\delta_0 c}$$

したがって  $\delta = 1-\beta > \frac{1}{k^{a\epsilon}}$  ならば  $h(\beta, \lambda) \geq \frac{1}{2c_1 e^{\delta_0 c} k^{a\epsilon}}$

最後に Turan の基本定理の証明をつけ加えておく。

(13)  $\alpha, \beta$  complex それを結ぶ内線分を  $[\alpha, \beta]$  とかく。

$p_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$  は complex coefficients, そのとき

$$\max_{z \in [\alpha, \beta]} |p_n(z)| \geq \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{|\beta - \alpha|}{4} \right)^n$$

proof (Tsuji)

$$p_n(a \cos x) = a_n \cos nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + \dots + a_1 \cos x + a_0$$

$$\text{よおくと } a_n = \frac{a^n}{2^{n-1}}$$

$$2 \max_{0 \leq x \leq \pi} |p_n(a \cos x)| = \max_{0 \leq x \leq \pi} |p_n(a \cos x)| \int_0^\pi |\cos nx| dx$$

$$\geq \left| \int_0^\pi p_n(a \cos x) \cos nx dx \right| = \left| a_n \frac{\pi}{2} \right| = \pi \left( \frac{a}{2} \right)^n$$

$$\text{故に } \max_{z \in [-a, a]} |p_n(z)| \geq \frac{\pi}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^n, \quad z - \alpha = (x+a) \frac{\beta - \alpha}{2a} \text{ とおけば}$$

よって  $[\alpha, \beta]$  は  $x$  によって  $[-a, a]$  に変換され上記。

(14) (Nörhnd)  $\Gamma$ : Jordan 閉曲線,  $g(z)$  は  $\Gamma$  の外部から  $\infty$  へ向いて正則かつ  $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ ,  $\Gamma$  の外部に  $l (\geq 2)$  個の点  $w_1, \dots, w_l$  次数高々  $l-1$  次 の多項式  $f(z)$  で  $f(w_j) = g(w_j) (1 \leq j \leq l)$  と対応するものは左に一つ存在するが, それを次の形に表わせる.

$$f(w) = e_0 + e_1(w-w_1) + \dots + e_{l-1}(w-w_1) \dots (w-w_{l-1})$$

$$e_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{(z-w_1) \dots (z-w_{j+1})} \quad (0 \leq j \leq l-1)$$

proof.  $2 \leq j \leq l$  に対して

$$\frac{1}{z-w} \left\{ \frac{(w-w_1) \dots (w-w_{j-1})}{(z-w_1) \dots (z-w_{j-1})} - \frac{(w-w_1) \dots (w-w_j)}{(z-w_1) \dots (z-w_j)} \right\} = \frac{(w-w_1) \dots (w-w_{j-1})}{(z-w_1) \dots (z-w_{j-1})(z-w_j)}$$

は恒等的に成立つたが, それらを加えて

$$\sum_{j=2}^l = \frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-w_1} - \frac{(w-w_1) \dots (w-w_l)}{(z-w)(z-w_1) \dots (z-w_l)}$$

$f(w)$  を上記のようになおくと

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z) \left\{ \frac{1}{z-w} + \frac{w-w_1}{(z-w_1)(z-w_2)} + \dots + \frac{(w-w_1) \dots (w-w_{l-1})}{(z-w_1) \dots (z-w_{l-1})(z-w_l)} \right\} dz$$

上の関係より

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z) \left\{ \frac{1}{z-w} - \frac{(w-w_1) \dots (w-w_l)}{(z-w)(z-w_1) \dots (z-w_l)} \right\} dz$$

故に

$$\begin{aligned} f(w_j) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{z-w_j} dz \quad (1 \leq j \leq l) \\ &= g(w_j) \end{aligned}$$

ただし積分路は時計の針の方向にとる。  $g(z) \rightarrow 0 (|z| \rightarrow \infty)$  を利用する。

これらの準備のもとに

(15) P. Turan: Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, 1953.

$b_1, b_2, \dots, b_k$  complex,  $1 = |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_k|$

$$\max_{m \leq \nu \leq m+n} |b_1 z_1^\nu + \dots + b_k z_k^\nu| \geq \frac{\pi}{2} \left( \frac{n}{8e(m+n)} \right)^n \min_{1 \leq l \leq k} |b_l + \dots + b_k|$$

$m \geq 0, n \geq k$  is real,  $\nu$  is integer

proof 
$$P(z) = \prod_{j=1}^k (z - |z_j|)$$

$0 < t < 1$  なる  $t$  を任意  $\frac{t}{4}$  に等しくするとき (13) により

$$\max_{1-t \leq z \leq 1} |P(z)| \geq \frac{\pi}{2} \left( \frac{t}{4} \right)^k$$

左辺を最大ならしめる  $z$  を  $\tau = \tau(t)$  とおく。そのような  $\tau$  が 2 つ以上あれば便宜上一番大きいものときめる。そのような  $\tau$  に対して、 $z_1, \dots, z_k$  の中から任意に一部分  $l$  をとって

$$Q(z) = \prod (z - z_l)$$

を作ると

$$\min_{|z|=\tau} |Q(z)| \geq \prod (\tau - |z_l|) \geq \prod_{j=1}^k (\tau - |z_j|) = |P(\tau)| \geq \frac{\pi}{2} \left( \frac{t}{4} \right)^k$$

あと "極限操作をほど" にせば "よいか" なる

$$1 = |z_1| > \dots > |z_l| > |z_{l+1}| > \dots > |z_k|$$

としてよい。上記  $\tau$  はたゞかに 1 より小 によって

$$|z_l| > \tau > |z_{l+1}|$$

なる  $l$  がある。このとき

$$f_l(z) = (z - z_{l+1}) \dots (z - z_k) = C_0^{(l)} z^{k-l} + C_1^{(l)} z^{k-l-1} + \dots + C_{k-l}^{(l)}$$

$C_0^{(l)} = 1$  とおく。  $f_l(z) = 1$  の場合もありうる。  $|z_j| < 1$  ( $l+1 \leq j \leq k$ )

であるから

$$|C_j^{(1)}| \leq \binom{k-l}{j} \quad (0 \leq j \leq k-l)$$

(14) によって  $z_1, \dots, z_l$  でそれぞれ

$$\frac{1}{z_1^{m+1} f_1(z_1)}, \dots, \frac{1}{z_l^{m+1} f_l(z_l)}$$

なる値をとる高々  $l-1$  次の多項式  $f_2(x)$  を次のように作る。

$$f_2(x) = C_0^{(2)} + C_1^{(2)}(x-z_1) + \dots + C_{l-1}^{(2)}(x-z_1) \cdots (x-z_{l-1})$$

$$C_j^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z^{m+1} f_1(z)(z-z_1) \cdots (z-z_{j+1})} \quad (0 \leq j \leq l-1)$$

前の  $Q(z)$  として  $f_1(z)(z-z_1) \cdots (z-z_{j+1})$  を使うと

$$|C_j^{(2)}| \leq \frac{1}{2r} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{r^{m+1}} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{4}\right)^k} \leq \frac{1}{\frac{\pi}{2} (1-t)^m \left(\frac{t}{4}\right)^k}$$

$t$  は適当に定めるが  $m=0$  のときは  $t=1$  ととるとよい。

$f_2(x)$  を

$$C_0^{(3)} + C_1^{(3)}x + \dots + C_{l-1}^{(3)}x^{l-1}$$

と表す。

$$\begin{aligned} C_j^{(3)} &= C_j^{(2)} - C_{j+1}^{(2)} \sum_{1 \leq r_1 \leq j+1} z_{r_1} + C_{j+2}^{(2)} \sum_{1 \leq r_1 < r_2 \leq j+2} z_{r_1} z_{r_2} - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{l-j-1} C_{l-1}^{(2)} \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_{l-j-1} \leq l-1} z_{r_1} z_{r_2} \cdots z_{r_{l-j-1}}. \end{aligned}$$

故に

$$|C_j^{(3)}| \leq |C_j^{(2)}| + |C_{j+1}^{(2)}| \binom{j+1}{1} + |C_{j+2}^{(2)}| \binom{j+2}{2} + \dots + |C_{l-1}^{(2)}| \binom{l-1}{l-j-1}$$

上記評価により

$$\leq \frac{1}{\frac{\pi}{2} (1-t)^m \left(\frac{t}{4}\right)^k} \left\{ 1 + \binom{j+1}{1} + \binom{j+2}{2} + \dots + \binom{l-1}{l-j-1} \right\}$$

一般に

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r+1} + \binom{k}{r}$$

であるから連立帰納法で

$$1 + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+n}{n} = \binom{k+n+1}{n}$$

が証明されるので

$$|c_j^{(3)}| \leq \frac{1}{\frac{\pi}{2} (1-t)^m \left(\frac{t}{4}\right)^k} \binom{l}{l-j-1} = \dots \binom{l}{j+1} \quad (0 \leq j \leq l-1)$$

よって  $m$  を整数とし

$$f_3(z) = z^{m+1} f_1(z) f_2(z) = c_{m+1}^{(4)} z^{m+1} + \dots + c_{m+k}^{(4)} z^{m+k}$$

とかく、作り方を

$$f_3(z_1) = \dots = f_3(z_l) = 1$$

$$f_3(z_{l+1}) = \dots = f_3(z_k) = 0$$

これらの両辺に

$$b_1, \dots, b_l$$

$$b_{l+1}, \dots, b_k$$

をそれぞれ加える

$$c_{m+1}^{(4)} (b_1 z_1^{m+1} + \dots + b_k z_k^{m+1}) + \dots + c_{m+k}^{(4)} (b_1 z_1^{m+k} + \dots + b_k z_k^{m+k}) = b_1 + \dots + b_l$$

$$\text{よって } \left\{ |c_{m+1}^{(4)}| + \dots + |c_{m+k}^{(4)}| \right\} \max_{v=m+1, \dots, m+k} |b_1 z_1^v + \dots + b_k z_k^v| \geq |b_1 + \dots + b_l|$$

よって

$$c_{m+1}^{(4)} + c_{m+2}^{(4)} z + \dots + c_{m+k}^{(4)} z^{k-1} = (c_0^{(1)} z^{k-l} + \dots + c_{k-l}^{(1)}) (c_0^{(3)} + c_1^{(3)} z + \dots + c_{l-1}^{(3)} z^{l-1})$$

であるから

$$\begin{aligned}
 & |C_{m+1}^{(4)}| + |C_{m+2}^{(4)}| + \dots + |C_{m+k}^{(4)}| \leq (|C_0^{(1)}| + \dots + |C_{k-1}^{(1)}|) (|C_0^{(2)}| + \dots + |C_{k-1}^{(2)}|) \\
 & \leq \left\{ 1 + \binom{k-1}{1} t + \dots + \binom{k-1}{k-1} t^{k-1} \right\} \frac{1}{\frac{\pi}{2} (1-t)^m \left(\frac{t}{4}\right)^k} \left\{ \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k} \right\} \\
 & \leq \frac{2^k}{\frac{\pi}{2} (1-t)^m \left(\frac{t}{4}\right)^k}
 \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}
 \text{Max}_{\substack{v=m+1, \dots, m+k \\ n \geq 0 \text{ integer}}} |b_1 z_1^v + \dots + b_k z_k^v| & \geq \frac{\pi}{2} \frac{1}{8^k} (1-t)^m t^k \text{Min}_{1 \leq l \leq k} |b_l| \\
 & \geq C \text{Min}_{1 \leq l \leq k} |b_l|
 \end{aligned}$$

故に  $m \geq 0$  と任意の real,  $n \geq k$  と任意の real とすれば

$$\text{Max}_{m \leq v \leq m+n} |b_1 z_1^v + \dots + b_k z_k^v| \geq \text{Max}_{[m]+1 \leq v \leq [m]+k} | \quad | \geq C \text{Min}_{1 \leq l \leq k} |b_l|$$

よって  $C$  は次のように  $n \geq k$  なる

$$C = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{1}{8^k} \left(\frac{[m]}{n+[m]}\right)^{[m]} \left(\frac{n}{n+[m]}\right)^k & m \geq 1 \quad (t = \frac{n}{n+[m]} \geq \frac{1}{2}) \\ \frac{\pi}{2} \frac{1}{8^k} & m \geq 0 \quad (t = 1 \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$m \geq 1, n \geq k \text{ ならば } \left(\frac{n}{n+[m]}\right)^k \geq \left(\frac{n}{n+m}\right)^k \geq \left(\frac{n}{n+m}\right)^m$$

$$m \geq 1 \text{ ならば } \left(\frac{[m]}{n+[m]}\right)^{[m]} \geq e^{-n}$$

以上より  $m \geq 1$  ならば

$$C \geq \frac{\pi}{2} \frac{1}{8^k} e^{-n} \left(\frac{n}{n+m}\right)^n = \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{8e(n+m)}\right)^n$$

$$m \geq 0 \text{ ならば } C \geq \frac{\pi}{2} \frac{1}{8^k} \geq \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{8e(n+m)}\right)^n$$

Turan の原証明では (13) の代りに古典函数論にてくる Cartan の lemma を使っている。以上をよむための文献として

Prachar の書物のほかに, A. Page: On the number of the primes in an arithmetic progression; Proc. London Math. Soc. (1935)