

解析的手法と篩法

名大. 中井 喜信

§1 large sieve についてのくわしい解説及び良い応用については本稿代の話の中で示される事でしょうから. ここでは Bombieri の平均値定理 <4> 等を改良する可能性と考えてみる. Riemann 予想その他と仮定しているため効果の程は疑問であるが.

次の記号を用意する.

$a_n$  : 複素数  $M < n \leq M+N$   $n$ : 整数

$$\mathcal{M}(x) = \sum_{n \leq x} a_n$$

$\mathcal{O}$  : modulus  $f$  の有限集合  $f \geq 1$

$\chi$  : character defined mod.  $f$

$G(f), G(\chi)$  : 複素定数  $G(\chi) = \overline{G(\bar{\chi})}$

$\sum_{\chi: \text{mod } f}$  : mod.  $f$  で定義される character  $\chi$  についての和

$\sum_{\chi: \text{mod } f}^*$  : mod.  $f$  で定義される 原始-character についての和

$\sum_{\substack{(a,b)=1 \\ \text{mod } b}} : (a,b)=1 \text{ なる } \text{mod } b \text{ での代素系についての和}$

又通例のように

$$e(x) = e^{2\pi i x} \quad x: \text{実数}$$

$$s = \sigma + it \quad : \text{複素変数}$$

$$A = O(B) \quad |A| \ll B \quad : \text{Landau, Vinogradov の記号}$$

とする。

さて、次の和

$$\sum_{b \in \mathcal{O}_b} \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ \text{mod } b}} \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n e\left(\frac{an}{b}\right) \right|^2 \quad \dots (1.1)$$

は、large sieve において大切な意味を有し

$$(1.1) \ll (X^2 + N) \cdot \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2 \quad \dots (1.2)$$

(1.2) (1.1)  $X = \max_{b \in \mathcal{O}_b} b$ ) なる評価が「最良」である事。又、Gallagher

の不等式 (<3> 式 (5))

$$\phi(n)^{-1} \sum_{\chi \text{ mod } b}^* \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \leq \phi^7 \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ \text{mod } b}} \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n e\left(\frac{an}{b}\right) \right|^2 \quad \dots (1.3)$$

により

$$\sum_{b \leq X} \sum_{\chi \text{ mod } b}^* \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \chi(n) \right|^2 \ll (X^2 + N) \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2 \quad \dots (1.4)$$

である事もわかる。(1.3) (数列  $a_n$  を特殊のものにすれば) (1.2)

の評価より良いものが期待される。以下それについて考えて

みよう。特に (4.15), (4.15'), (5.34) を見られたら。

§2. 今  $C_g(n)$  を Ramanujan の和とする。即ち

$$C_g(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } g}} e\left(\frac{an}{g}\right) \quad \dots(2.1)$$

$$= \begin{cases} \sum_{\substack{d|g \\ d|n}} d \cdot \mu\left(\frac{g}{d}\right) & n \neq 0 \\ \phi(g) & n = 0 \end{cases}$$

ただし  $\mu(m)$  は Möbius の函数で

$$\mu(m) = \begin{cases} 1 & m=1 \text{ の時} \\ 0 & m \text{ は平方因子を有する時} \\ (-1)^r & m = p_1 \cdots p_r, p_j \text{ 素数, } p_j \neq p_{j'} \end{cases} \quad \dots(2.2)$$

である。これに §4)

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} G(g) \cdot \sum_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } g}} \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \cdot e\left(\frac{an}{g}\right) \right|^2 \quad \dots(2.3)$$

$$= \sum_{g \in \mathcal{G}} G(g) \cdot \phi(g) \times \sum_n |a_n|^2 + \sum_{g \in \mathcal{G}} G(g) \cdot \sum_{\substack{-N < k < N \\ k \neq 0}} \sum_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } g}} e\left(\frac{ak}{g}\right) \cdot \sum_{n_1, n_2 = k} a_{n_1} \bar{a}_{n_2}$$

$$= \sum_{g \in \mathcal{G}} G(g) \cdot \phi(g) \times \sum_n |a_n|^2 + \int_0^1 d\alpha \cdot \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \cdot e(n\alpha) \right|^2 \cdot \sum_{g \in \mathcal{G}} G(g) \cdot \sum_{1 \leq k < N} 2 \cdot C_g(k) \cdot \omega(2\pi k\alpha) \quad \dots(2.4)$$

とある。  $\mathcal{M}(\alpha) = \sum_{n \leq T} a_n$  ( §4) Lebesgue-Stieltjes 積分を用いる

更に

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \phi(\beta) \cdot \sum |a_n|^2 + \iint_{M}^{M+N} d\pi(\alpha_1) \cdot d\overline{\pi}(\alpha_2) \cdot \int_0^1 d\alpha \cdot e^{(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha} \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \sum_{1 \leq k < N} 2 \cdot g(k) \cdot \cos 2\pi k\alpha \\
 &= \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \phi(\beta) \cdot \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2 + \iint_{M}^{M+N} d\pi(\alpha_1) \cdot d\overline{\pi}(\alpha_2) \times f(\alpha_1 - \alpha_2) \quad \dots (2.5)
 \end{aligned}$$

$$\text{E: E: } f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \sum_{1 \leq k < N} 2 \cdot g(k) \cdot \left( \frac{|x|}{k+|x|} \cdot \frac{\sin 2\pi(k-|x|)}{2\pi(k-|x|)} + i \frac{x}{k+|x|} \cdot \frac{1 - \cos 2\pi(k-|x|)}{2\pi(k-|x|)} \right) \quad (2.6)$$

を得る。ここに  $a_n$  の代わりに実数  $\alpha$  を用いると、上式の代りに

$$\sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \phi(\beta) \cdot \sum_{M < n \leq M+N} |a_n|^2 + \iint_{M}^{M+N} d\pi(\alpha_1) \cdot d\overline{\pi}(\alpha_2) \times f(\alpha_1 - \alpha_2) \quad \dots (2.5')$$

$$f(x) = \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} G(\beta) \cdot \sum_{1 \leq k < N} 2 \cdot g(k) \cdot \frac{|x|}{k+|x|} \cdot \frac{\sin 2\pi(k-|x|)}{2\pi(k-|x|)} \quad \dots (2.6')$$

を用いてよい。(2.3) と同様の形式と呼ぶ。

乗法的形式

$$\sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} \sum_{\chi \bmod \beta} G(\chi) \cdot \left| \sum_{M < n \leq M+N} a_n \cdot \chi(n) \right|^2 \quad \dots (2.7)$$

について類似の事を行くと、上式は

$$\begin{aligned}
 &= \iint_0^1 d\alpha_1 \cdot d\alpha_2 \cdot \sum_{M < n_1 \leq M+N} a_{n_1} \cdot e^{(n_1, \alpha_1)} \cdot \overline{\sum_{M < n_2 \leq M+N} a_{n_2} \cdot e^{(n_2, \alpha_2)}} \times \\
 &\quad \times \sum_{\beta \in \mathcal{O}_K} \sum_{\chi \bmod \beta} G(\chi) \cdot \sum_{M < k_1, k_2} \chi(k_1) \cdot \overline{\chi(k_2)} \cdot e^{(-k_1, \alpha_1)} \cdot e^{(k_2, \alpha_2)} \\
 &= \iint_{M}^{M+N} d\pi(\alpha_1) \cdot \overline{d\pi(\alpha_2)} \times F(\alpha_1, \alpha_2) \quad \dots (2.8)
 \end{aligned}$$

$$f. l. ( \quad ) \quad F(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{\substack{\text{def.} \\ \int \in \mathcal{O}_f}} \sum_{\chi \bmod f} G(\chi) \cdot \sum_{\substack{M < k_j \leq M+N \\ j=1,2}} \chi(k_1) \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{2\pi i(\lambda_1 k_1)} - 1}{2\pi i(\lambda_1 - k_1)} \cdot \frac{e^{-2\pi i(\lambda_2 k_2)} - 1}{-2\pi i(\lambda_2 - k_2)} \quad \dots (2.9)$$

を得る。

## § 3.

(lemma  $\alpha$ ) Dirichlet 級数  $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n^{-s}$  ( $s = \sigma + it$ ) は  $\sigma \geq 1 + \Delta$  なる所で絶対収束 (この時  $T \geq 2$  として

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\sigma-iT}^{1+\sigma+iT} \frac{x^s}{s} g(s) \cdot ds \\ &+ O\left(\sum_{|t-\tau| > \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1+\Delta} \frac{|a_n|}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}\right) \\ &+ O\left(\sum_{|n-\tau| < \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1+\Delta} \cdot |a_n| \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{n}|}, \log T\right)\right) \end{aligned}$$

となる。積分路は垂直の線分である。

$$(lemma \beta) \quad \sum_{|n-\tau| > \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1+\frac{1}{3\Delta}} \cdot \left|\log \frac{x}{n}\right|^{-1} \ll x \cdot \log 3x$$

$$\sum_{|n-\tau| > \frac{1}{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^{1+\frac{1}{3\Delta}} \cdot \frac{\log n}{|\log \frac{x}{n}|} \ll x \cdot (\log 3x)^2.$$

証明は例之ほ <6> の附録を見られたら。

§ 4  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  を Riemann の  $\zeta$ -函数とする。

$\zeta(s)^{-1}$  は  $\sigma > 1$  なる所で  $\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$  ( $\mu(n)$  については (2.2)) と表わされる。  $s=1$  は  $\zeta(s)$  の一位の極であり、この留数は 1 である。他に特異点はない。  $\zeta(s)$  の零点は  $-2, -4, -6, \dots$  か (これ等を自明な零点と呼ぶ) あるいは、零点  $\rho = \beta + i\gamma$  は  $0 < \beta < 1$  となるか (これ等を critical zeroes と呼ぶ) である。 critical な零点については  $\beta = \frac{1}{2}$  であるという予想されているがこれは未解決の問題である。この予想を (狭義の) Riemann 予想と呼ぶ。この節では次の仮定を設けよう。

仮定 (M):  $\square$  critical な零点  $\rho = \beta + i\gamma$  について

$$1-\theta \leq \beta \leq \theta ; \quad \frac{1}{2} \leq \theta < 1 \text{ (定数)}$$

であり、更に任意の自然数  $N$  に対し適当な正数  $T$  が存在して  $N < T < N+1$  であり

$$\zeta(s) \neq 0 \quad : -\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, \quad t = \pm T$$

$$|\zeta(s)|^{-1} \ll T^{\frac{1}{2}} \quad : -\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, \quad t = \pm T \quad \dots (4.2)$$

$$\sum_{\substack{\rho \text{ critical} \\ |\sigma| < T}} \text{Res}_{s=\rho} (\chi^s \zeta(s)^{-1}) \ll \begin{cases} \chi^{\theta+\varepsilon} T^{\varepsilon} & : \mu(n) \neq 0 \text{ と } \gamma \text{ が } T \text{ の } n \text{ について} \\ & |x-n| > \frac{1}{T} \\ & \text{と } \gamma \text{ が } T \text{ 時} \\ \chi^{\theta+\varepsilon} T^{\varepsilon+T} & : \mu(n) \neq 0, |x-n| < \frac{1}{T} \\ & \text{と } \gamma \text{ が } n \text{ の } \rho \text{ が存在する時} \end{cases} \dots (4.3)$$

と仮定する。

したがって (  $\varepsilon$  は任意に小さく取れる正定数であり )  $\text{Res}_{s=\rho}$  は

$\lambda = \rho$  における留数の事である。④ =  $\frac{1}{2}$  は Riemann 予想を意味する。

三節の lemma 達により

$$\begin{aligned} \pi(x) &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n \leq x} \mu(n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1 + \frac{1}{\log 3x} - iT}^{1 + \frac{1}{\log 3x} + iT} \frac{ds}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} + O\left(\frac{x \cdot \log 3x}{T}\right) \\ &\quad + O\left(\sum_{\substack{|\mu - \pi| < \frac{1}{2} \\ \mu(n) \neq 0}} \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{T}|}, \log T\right)\right) \quad \dots (4.4) \end{aligned}$$

とあるが今積分路を

$$1 + \frac{1}{\log 3x} - iT, \quad -\frac{1}{2} - iT, \quad -\frac{1}{2} + iT, \quad 1 + \frac{1}{\log 3x} + iT$$

と結ぶ折線  $C$  (右子わり)  $\wedge$  と持つ事に依り

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{\rho: |\rho| < T} \operatorname{Res}_{s=\rho} \frac{x^s}{s \cdot \zeta(s)} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} \\ &\quad + O\left(\frac{x \cdot \log 3x}{T}\right) + O\left(\sum_{|\mu - \pi| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{T}|}, \log T\right)\right) \end{aligned}$$

と得る。さて

$$|\zeta(s)|^{-1} \ll \frac{1}{1 + |t|} \quad \sigma = -\frac{1}{2}$$

である事と (4.2) とから

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ds}{\zeta(s)} \cdot \frac{x^s}{s} \right| \ll \frac{x}{T^{\frac{1}{2}}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

を得。従って

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{\rho: |\rho| < T} \operatorname{Res}_{s=\rho} \frac{x^s}{s \cdot \zeta(s)} + O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O(x^{-\frac{1}{2}}) \\ &\quad + O\left(\sum_{|\mu - \pi| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{T}|}, \log T\right)\right) \quad \dots (4.5) \end{aligned}$$

を得る。

これに \$N\$ 次の \$S\$ を評価しよう。

$$S = \sum_{q \leq X} \sum_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } q}} \left| \sum_{n \leq N} \mu(n) \cdot e\left(\frac{an}{q}\right) \right|^2 \quad \dots (4.6)$$

(2.5') と (2.6') とから (4.5) の \$\mathcal{DT}(x)\$ は \$N\$ より

$$S = \sum_{q \leq X} \phi(q) \cdot \sum_{n \leq N} |\mu(n)|^2 + \iint_0^N \mathcal{DT}(x_1) \cdot \mathcal{DT}(x_2) \cdot f(x_1 - x_2)$$

と \$f(x)\$

$$f(x) = \sum_{q \leq X} \sum_{1 \leq k < N} c_q(k) \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{k + |x_1 - x_2|} \cdot \frac{\sin 2\pi(k - |x_1 - x_2|)}{2\pi(k - |x_1 - x_2|)} \quad \dots (4.7)$$

となる。今

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Res}_{s=p} \frac{x^s}{s \zeta(s)} = \left( \operatorname{Res}_{s=p} \frac{x^s}{\zeta(s)} \right) \cdot \frac{1}{x}$$

であるから、上の事から

$$\begin{aligned} S &= \sum_{q \leq X} \phi(q) \cdot \sum_{n \leq N} |\mu(n)|^2 + \\ &+ \iint_0^N \left( \frac{dx_1}{x_1} \cdot \sum_{|k| < T} \operatorname{Res}_{s=p} \frac{x_1^s}{\zeta(s)} + d_{x_1} O\left(\frac{x_1}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + d_{x_1} O(x_1^{\frac{1}{2}}) \right) \times \\ &\quad \cdot \left( + d_{x_2} O\left(\sum_{|m-x_2| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x_2}{m}|}, \log T\right)\right) \right) \\ &\quad \times \left( \frac{dx_2}{x_2} \cdot \sum_{|k| < T} \operatorname{Res}_{s=p} \frac{x_2^s}{\zeta(s)} + d_{x_2} O\left(\frac{x_2}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + d_{x_2} O(x_2^{\frac{1}{2}}) \right) \times \\ &\quad \cdot \left( + d_{x_2} O\left(\sum_{|m-x_2| < \frac{1}{2}} \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x_2}{m}|}, \log T\right)\right) \right) \\ &\quad \times f(x_1 - x_2) \quad \dots (4.8) \end{aligned}$$

となる。(4.7) の \$f(x)\$ の評価をしておくと次のようにである。

$$f(x) = \sum_{d \leq X} d \cdot \sum_{\substack{b \leq X \\ q=0 \text{ mod } d}} \mu\left(\frac{b}{d}\right) \cdot \sum_{\substack{1 \leq k < N \\ k \equiv 0 \text{ mod } d}} \frac{|x|}{k + |x|} \cdot \frac{\sin 2\pi(k - |x|)}{2\pi(k - |x|)} =$$

$$= \sum_{d \leq x} d \times O\left(\frac{x}{d}\right) \times O\left(\frac{1}{d} \log \frac{N}{d}\right)$$

$$= O(x \cdot \log x \cdot \log N) \quad \dots (4.9)$$

同様に  $\tau$  に対して

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot f(x_1 - x_2) = O(x \cdot \log x \cdot \log N) \quad \dots (4.10)$$

$\tau$  あり。又

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1 - x_2) = - \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1 - x_2) \quad \dots (4.11)$$

$\tau$  あり。又 (13) と (18) <6> 54 1°-2° (13) 20)

$$\sum_{\delta \leq x} \phi(\delta) \ll x^2 \quad \dots (4.12)$$

$\tau$  あり。(4.10), (4.11), (4.12), (4.8) の 5 部分積分により

$$S = O(x^2 \cdot N)$$

$$+ \int_0^N \left( \frac{dx_1}{x_1} \cdot \sum_{\substack{\text{Re } s < \frac{1}{2} \\ \sigma = \rho}} \frac{x_1^\sigma}{\zeta(s)} + d_{x_1} O\left( \sum_{|m-x_1| < \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{T \log \frac{x_1}{m}} \cdot \log T \right) \right) \right) \times$$

$$\times \left( \frac{dx_2}{x_2} \cdot \sum_{\substack{\text{Re } s < \frac{1}{2} \\ \sigma = \rho}} \frac{x_2^\sigma}{\zeta(s)} + d_{x_2} O\left( \sum_{|m_2-x_2| < \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{T \log \frac{x_2}{m_2}} \cdot \log T \right) \right) \right) \times$$

$$\times f(x_1 - x_2)$$

$$+ O\left( \frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}} \right)^2 \times O(x \cdot \log x \cdot \log N)$$

$$+ O\left( \int_0^N \left| \frac{dx_1}{x_1} \cdot \sum_{\substack{\text{Re } s < \frac{1}{2} \\ \sigma = \rho}} \frac{x_1^\sigma}{\zeta(s)} + d_{x_1} O\left( \sum_{|m-x_1| < \frac{1}{2}} \left( \frac{1}{T \log \frac{x_1}{m}} \cdot \log T \right) \right) \right| \times \right.$$

$$\left. \times \left( \frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}} \right) \times x \cdot \log x \cdot \log N \right)$$

を得る。  $\therefore \tau$

$$\int_0^N dx \cdot O\left( \sum_{|m-x| < \frac{1}{2}} \min\left( \frac{1}{T \log \frac{x}{m}}, \log T \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \leq N} \int_{|x-n| < \frac{1}{2}} O\left(\min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{T}|}, \log T\right)\right) dx \\
&= \sum_{n \leq N} \left( \int_{T^{-1} < |x-n| < \frac{1}{2}} O\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{T}|}\right) dx + \int_{|x-n| < \frac{1}{T}} O(\log T) dx \right) \\
&= \sum_{n \leq N} \left( \int_{T^{-1} < |x-n| < \frac{1}{2}} O\left(\frac{n}{T \cdot |x-n|}\right) dx + \int_{|x-n| < \frac{1}{T}} O(\log T) dx \right) \\
&= \sum_{n \leq N} O\left(\frac{n \cdot \log T}{T}\right) = O\left(\frac{N^2 \log T}{T}\right) \quad \dots (4.13)
\end{aligned}$$

よって (4.3) のよ

$$\begin{aligned}
&\int_0^N \frac{dx}{x} \left| \sum_{|k| < T} \operatorname{Re}_{s=1} \frac{\chi^k}{\zeta(s)} \right| \ll \\
&\ll \int_0^N \frac{dx}{x} \cdot x^{\theta+\varepsilon} T^\varepsilon + \sum_{n \leq N} \int_{|x-n| < \frac{1}{T}} x^{-1} T dx \\
&\ll N^{\theta+\varepsilon} T^\varepsilon \quad \dots (4.14)
\end{aligned}$$

よって (4.9) のよ

$$\begin{aligned}
S &\ll X^2 N + \left(N^{\theta+\varepsilon} T^\varepsilon + \frac{N^2 \log T}{T}\right)^2 X \cdot \log X \cdot \log N \\
&\quad + \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}}\right)^2 X \cdot \log X \cdot \log N \\
&\quad + \left(N^{\theta+\varepsilon} T^\varepsilon + \frac{N^2 \log T}{T}\right) \left(\frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}}\right) X \cdot \log X \cdot \log N \\
&\ll X^2 N + N^{2(\theta+\varepsilon)} X \cdot \log X \quad (T = N^{\frac{1}{2}} \text{ とおくと})
\end{aligned}$$

よって、よければ  $\theta \geq \frac{1}{2}$  と考慮して

$$\sum_{b \leq X} \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ \text{mod } b}} \left| \sum_{n \leq N} \mu(n) \cdot e\left(\frac{an}{b}\right) \right|^2 \ll X^2 N^{2(\theta+\varepsilon)} \quad \dots (4.15)$$

を得. (1.3) から 更に

$$\sum_{\delta \leq X} \sum_{\chi \pmod{\delta}}^* \left| \sum_{n \leq N} \mu(n) \chi(n) \right|^2 \ll X^2 N^{2(\theta + \varepsilon)} \quad \dots(4.15')$$

を得る.

今  $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$  を Dirichlet の L-函数とす  
る時. Schwartz の不等式 を使う事に 89 (4.15') から

$$\sum_{\delta \leq X} \sum_{\chi \pmod{\delta}}^* |L(s, \chi)|^2 \ll X^2 |\delta|^2, \quad \sigma \geq \theta + \varepsilon \quad \dots(4.16)$$

を得る. 即ち

[定理] 仮定 (u) の  $\theta$  に

$$\sum_{\delta \leq X} \sum_{\chi \pmod{\delta}}^* \left| \sum_{n \leq N} \mu(n) \chi(n) \right|^2 \ll X^2 N^{2(\theta + \varepsilon)}$$

および

$$L(s, \chi) \neq 0 \quad (\sigma > \theta)$$

を得る.

§5  $\Lambda(n)$  を Mangoldt の函数とする.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^e, p \text{ 素数}, e \geq 1 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad \dots(5.1)$$

Bombieri の平均値定理

$$\sum_{\delta \leq X} \max_{y \leq N} \max_{\substack{(a, \delta) = 1 \\ \pmod{\delta}}} \left| \sum_{\substack{a \leq y \\ n \equiv a \pmod{\delta}}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(\delta)} y \right| \ll \frac{N}{(\log N)^A} \quad \dots(5.2)$$

ただし  $X \leq N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{-B}$ ,  $A > 0$ ,  $B = B(A) > 0$  について  
 4節と類似の事を行おう。(5.2) は現在最高の結果である  
 が、一見 Dirichlet の L-函数を含めた結果のようであるが、実  
 は Riemann の z-函数で説明出来るのではなからかと考へられ  
 る事と示そう。次の仮定を置く。

仮定(1)  $\square$  Riemann の z-函数  $\zeta(s)$  について

$$\zeta(s) \neq 0 \quad (\sigma > \theta) \quad ; \quad 1 > \theta \geq \frac{1}{2} \quad (\text{定数})$$

であり、その critical 点  $\rho = \beta + i\gamma$  については  
 任意の自然数  $N$  に対し 適当な正数  $T$  が存在して

$$N < T < N+1 \quad \dots (5.3)$$

$$\sum_{\sigma \pm i\tau} \ll T^{\frac{1}{2}} \quad -\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2 \quad \dots (5.4)$$

$$\sum_{\substack{\rho \neq 0 \\ |\rho| < T}} \chi^{\rho} \ll \begin{cases} \chi^{\theta} \log \chi \cdot \log T & : \Lambda(n) \neq 0 \text{ と } T \leq T_1 \leq 2\theta n \\ & \text{について} \\ & |\chi^{-n}| > \frac{1}{T} \\ & \text{となる時} \\ \chi^{\theta} \log \chi \log T + T \log \chi & : \Lambda(n) \neq 0, |\chi^{-n}| < \frac{1}{T} \text{ と} \\ & \text{ある } n \text{ が存在する時} \end{cases} \quad \dots (5.5)$$

としよう

$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  は  $\sigma=1$  で極を有し、 $\rho=1$  は留数 1,  $\rho=\rho$  は留数 -1 である事に留意されたい。  $N \geq 2X$  とし

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \leq X} \max_{y \leq N} \max_{\substack{(a,2)=1 \\ \text{mod } y}} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{y}} \Lambda(n)} - \frac{1}{\phi(y)} y \right| \quad \dots (5.6)$$

とおく。

定義から

$$\begin{aligned}
E &\ll \sum_{1 \leq x} \max_{2^j \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{b} \\ 2^j \leq n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(b)} \sum_{\substack{(n,1)=1 \\ 2^j \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right| \\
&+ \sum_{1 \leq x} \max_{2^j \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| -\frac{1}{\phi(b)} \sum_{\substack{(n,1) \neq 1 \\ 2^j \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right| \\
&+ \sum_{1 \leq x} \max_{2^j \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \frac{1}{\phi(b)} \left( y - \sum_{n \leq y} \Lambda(n) \right) \right| \\
&+ \sum_{1 \leq x} \max_{2^j \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \frac{1}{\phi(b)} \sum_{n \leq 2^j} \Lambda(n) \right| \\
&+ \sum_{q \leq x} \max_{y < 2^j} \max_{(a,1)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{b} \\ n \leq y}} \Lambda(n) \right| \quad \dots (5.7)
\end{aligned}$$

であるから、第二項の項には  $\Lambda(n)$ ,  $\phi(b)$  のよく知られた性質を使い、又  $\theta < 1$  から

$$y = \sum_{n \leq y} \Lambda(n) + O(y^\theta \cdot \lg^2 y)$$

であるから

$$\begin{aligned}
E &\ll \sum_{q \leq x} \max_{2^j \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{b} \\ 2^j \leq n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(b)} \sum_{\substack{(n,1)=1 \\ 2^j \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right| \\
&+ \lg^2 x \cdot (\lg \lg x)^2 + \lg x \cdot N^\theta \cdot \lg^2 N \\
&+ x \cdot \lg \lg x + x \cdot \lg x \\
&\ll \sum_{1 \leq x} \max_{2^j \leq y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{b} \\ 2^j \leq n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(b)} \sum_{\substack{(n,1)=1 \\ 2^j \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right| +
\end{aligned}$$

$$+ N^{\theta} \cdot \log N \cdot \log X + X \cdot \log X \quad \dots (5.8)$$

とある。今  $\chi$  は  $\text{mod } f$  の character と動く時

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{f} \\ 2f \leq n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(f)} \sum_{\substack{(n, f)=1 \\ 2f \leq n \leq y}} \Lambda(n) \\ &= \frac{1}{\phi(f)} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \text{mod } f}} \bar{\chi}(a) \cdot \sum_{2f \leq n \leq y} \Lambda(n) \cdot \chi(n) \end{aligned}$$

(P.S.  $\chi_0$  は 単位指標) であるので

$$E' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \max_{\substack{(a, f)=1 \\ \text{mod } f}} \left| \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{f} \\ 2f \leq n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{1}{\phi(f)} \sum_{\substack{(n, f)=1 \\ 2f \leq n \leq y}} \Lambda(n) \right|$$

$$= \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(f)} \max_{\substack{(a, f)=1 \\ \text{mod } f}} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \cdot \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|$$

$$\leq \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(f)} \max_{\substack{(a, f)=1 \\ \text{mod } f}} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|$$

$$= \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(f)} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \text{mod } f}} \left| \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|$$

とある。Schwartz の不等式より

$$\leq \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \frac{1}{\phi(f)} \left( \sum_{\chi \neq \chi_0} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$< \sum_{f \leq X} \max_{2f \leq y \leq N} \left( \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\phi(f)} \left| \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

を得る。よって

$$E_g^2 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{2f \leq y \leq N} \left( \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\phi(f)} \left| \sum_{2f \leq n \leq y} \chi(n) \cdot \Lambda(n) \right|^2 \right) \quad \dots (5.9)$$

とある時

$$E' < \sum_{j \leq X} E_j \quad \dots (5.10)$$

$$E \ll E' + N^{\Theta} \log^2 N \cdot \log X + X \cdot \log X \quad \dots (5.10')$$

と成る。

以下、次の事を目指にしよう。即ち仮定(1)の $\chi$ と

$$\begin{aligned} E_0^2 &\ll \max_{\substack{2j \leq v_j \leq N \\ j=1,2}} \left| \sum_{\substack{\chi \neq \bar{\chi}_0 \\ \text{mod } j}} \frac{1}{\phi(j)} \cdot \sum_{\substack{2j \leq k_j \leq N \\ j=1,2}} \chi(k_1) \cdot \bar{\chi}(k_2) \right| \cdot \log^2 N \\ &+ \max_{\substack{2j \leq v \leq N \\ 2j \leq u \leq N}} \left| \sum_{\substack{\chi \neq \bar{\chi}_0 \\ \text{mod } j}} \frac{1}{\phi(j)} \cdot \sum_{2j \leq k_2 \leq N} \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{-2\pi i(u-k_2)} - 1}{-2\pi i(u-k_2)} \cdot \sum_{2j \leq k_1 \leq v} \chi(k_1) \right| \cdot \\ &\quad \times N^{\Theta} \cdot \log^3 N \\ &+ \phi(j)^{-1} \cdot (N^{\Theta} \log^3 N)^2 \quad \dots (5.11) \end{aligned}$$

と成るはず。

(5.11)の成立を認めれば、(5.11)の第一項には character の直交性を使い、第二項の $k_1$ についての和に character の直交性を使い、それから $k_2$ については自明な評価を行う事になり

$$E_0^2 \ll \phi(j) \cdot \log^2 N + N^{\Theta} \log^3 N \times \log N + \frac{1}{\phi(j)} \cdot (N^{\Theta} \log^3 N)^2$$

従って

$$E_0 \ll \log N \cdot (\phi(j)^{\frac{1}{2}} + \phi(j)^{-\frac{1}{2}} \cdot N^{\Theta} \log^2 N) \quad \dots (5.12)$$

を得る。従って(5.10)、(5.10')から $2X \leq N$ の時仮定(1)の $\chi$ と

に

$$E \ll \log N \cdot (X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{1}{2}} \cdot N^{\Theta} \log^2 N) \quad \dots (5.13)$$

を得る。

さて (5.11) によりわかる。三つ lemma から

$$\begin{aligned}
 \pi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1 + \frac{1}{\log 3x} - iT}^{1 + \frac{1}{\log 3x} + iT} \frac{x^s}{s} \cdot \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds \\
 &\quad + O\left(\sum_{|x-u| > \frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{1 + \frac{1}{\log 3x}} \log u}{T \cdot |\log \frac{x}{u}|}\right) \\
 &\quad + O\left(\sum_{|x-u| < \frac{1}{2}} \log u \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{u}|}, \log T\right)\right)
 \end{aligned}$$

である。積分路を  $1 + \frac{1}{\log 3x} - iT$ ,  $-\frac{1}{2} - iT$ ,  $-\frac{1}{2} + iT$ ,  $1 + \frac{1}{\log 3x} + iT$  と結ぶ折線  $\Gamma$  とする (5.4) 及び

$$\left| -\frac{\zeta'}{\zeta}(-\frac{1}{2} + it) \right| \ll \log(2+|t|)$$

を用いる。又 lemma  $\beta$  を使う事にしよう

$$\begin{aligned}
 \pi(x) &= x + \sum_{|x| < T} \operatorname{Res}_{s=p} \left( \frac{x^s}{s} \cdot \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \right) \\
 &\quad + O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \log^2 T\right) \\
 &\quad + O\left(\sum_{|x-u| < \frac{1}{2}} \log x \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{u}|}, \log T\right)\right) \\
 &= x + \sum_{|x| < T} x^p \cdot p^{-1} + O\left(\frac{x}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(x^{-\frac{1}{2}} \log^2 T\right) \\
 &\quad + O\left(\sum_{|x-u| < \frac{1}{2}} \log x \cdot \min\left(\frac{1}{T \cdot |\log \frac{x}{u}|}, \log T\right)\right)
 \end{aligned}$$

を得る。従、 $\tau$

$$d\pi(\alpha) = d\lambda - \sum_{|\nu| < \tau} \lambda^\rho \cdot \frac{d\lambda}{\lambda} + d\lambda \left( O\left(\frac{\lambda}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right) + O(\lambda^{-\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|\mu-\nu| < \frac{1}{2}} \log \lambda \cdot \min\left(\frac{1}{\tau \cdot |\log \frac{\lambda}{\mu}|}, \log T\right)\right) \right) \quad \dots (5.14)$$

より (2.7), (2.8) より

$$E_b^2 = \max_{2 \leq y \leq N} \left( \int_{2b}^y \left( d\lambda_1 - \sum_{|\nu| < \tau} \lambda_1^\rho \cdot \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} + d_{\lambda_1} \left( O\left(\frac{\lambda_1}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right) + O(\lambda_1^{-\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|\mu-\nu| < \frac{1}{2}} \log \lambda_1 \cdot \min\left(\frac{1}{\tau \cdot |\log \frac{\lambda_1}{\mu}|}, \log T\right)\right) \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \left( d\lambda_2 - \sum_{|\nu| < \tau} \lambda_2^\rho \cdot \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} + d_{\lambda_2} \left( O\left(\frac{\lambda_2}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right) + O(\lambda_2^{-\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|\mu-\nu| < \frac{1}{2}} \log \lambda_2 \cdot \min\left(\frac{1}{\tau \cdot |\log \frac{\lambda_2}{\mu}|}, \log T\right)\right) \right) \right) \right) \times F(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \prod_{\lambda \neq \lambda_0} \frac{1}{\Phi(\lambda)} \cdot \sum_{2 \leq k_1 \leq y} \sum_{2 \leq k_2 \leq y} \chi(k_1) \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{2\pi i(\lambda_1 k_1)} - 1}{2\pi i(\lambda_1 k_1)} \cdot \frac{e^{-2\pi i(\lambda_2 k_2)} - 1}{-2\pi i(\lambda_2 k_2)} \quad \dots (5.15)$$

を得。従、 $\tau$

$$E_b^2 = \max_{2 \leq y \leq N} \left\{ \int_{2b}^y d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 \cdot F(\lambda_1, \lambda_2) \quad \dots (5.16) \right. \\ + \int_{2b}^y \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \cdot \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} \cdot (\sum \lambda_1^\rho) (\sum \lambda_2^\rho) \cdot F(\lambda_1, \lambda_2) \quad \dots (5.17) \\ + \int_{2b}^y d_{\lambda_1} \left( O\left(\frac{\lambda_1}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right) + O(\lambda_1^{-\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|\mu-\nu| < \frac{1}{2}} \log \lambda_1 \cdot \min\left(\frac{1}{\tau \cdot |\log \frac{\lambda_1}{\mu}|}, \log T\right)\right) \right) \times \\ \times d_{\lambda_2} \left( O\left(\frac{\lambda_2}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right) + O(\lambda_2^{-\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|\mu-\nu| < \frac{1}{2}} \log \lambda_2 \cdot \min\left(\frac{1}{\tau \cdot |\log \frac{\lambda_2}{\mu}|}, \log T\right)\right) \right) \times \\ \times |F(\lambda_1, \lambda_2)| \quad \dots (5.18) \\ + 2 \cdot \int_{2b}^y d\lambda_1 \cdot d_{\lambda_2} \left( O\left(\frac{\lambda_2}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right) + O(\lambda_2^{-\frac{1}{2}} \log^2 T) + O\left(\sum_{|\mu-\nu| < \frac{1}{2}} \log \lambda_2 \cdot \min(\dots)\right) \right) \cdot F(\lambda_1, \lambda_2) \quad \dots (5.19) \\ \left. + \dots \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & -2 \iint_{\mathcal{Z}_j^2} d\lambda_1 \left( \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} \cdot \Sigma \lambda_2^{\rho} \right) \cdot F(\lambda_1, \lambda_2) \quad (S.20) \\ & -2 \iint_{\mathcal{Z}_j^2} \left( \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} \cdot \Sigma \lambda_2^{\rho} \right) \cdot d\lambda_1 \left( O\left(\frac{\lambda_1}{T^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\lambda_1^{\frac{1}{2}} \log^2 T\right) + O\left(\sum_{N-\lambda_1 < \frac{1}{2}} \log \lambda_1 \cdot \min(\dots)\right) \right) \cdot F(\lambda_1, \lambda_2) \quad (S.21) \end{aligned} \right\}$$

となる。character の直交性から

$$\begin{aligned} |F(\lambda_1, \lambda_2)| &\ll \sum_{\substack{2j \leq k_j \leq y \\ k_1 \equiv k_2 \pmod{y}}} \min\left(1, \frac{1}{|\lambda_1 - k_1|}\right) \times \min\left(1, \frac{1}{|\lambda_2 - k_2|}\right) \\ &\quad + \sum_{\substack{2j \leq k_j \leq y \\ k_1 \not\equiv k_2 \pmod{y}}} \frac{1}{\phi(y)} \cdot \min\left(1, \frac{1}{|\lambda_1 - k_1|}\right) \times \min\left(1, \frac{1}{|\lambda_2 - k_2|}\right) \\ &\ll \begin{cases} \phi(y)^{-1} \log^2 N + 1 & : k_1 \equiv k_2 \pmod{y}, |\lambda_j - k_j| < \frac{1}{2} \quad j=1,2 \text{ と} \\ & \text{ある } k_1, k_2 \text{ の存在するとき} \\ \phi(y)^{-1} \log^2 N & : \text{それ以外の場合} \end{cases} \quad (S.22) \end{aligned}$$

なる評価が成立する。\$F(\lambda\_1, \lambda\_2)\$ の各導函数についても同じ評価が成立する。

(5.18) は部分積分を行, (5.22) 及び (4.13) から

$$(5.18) \ll \phi(y)^{-1} \log^2 N \cdot \left( \frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}} \log^2 T + \frac{N^2 \log N \log T}{T} \right)^2 \quad (S.23)$$

を得る。これより (5.24) と類似の計算による。

(5.16) と評価しよう。まず

$$g(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \neq \lambda_0} \phi(y)^{-1} \sum_{\substack{2j \leq k_j \leq v_j}} \chi(k_1) \cdot \bar{\chi}(k_2) \quad (S.24)$$

$$h_+(z) = \frac{e^{2\pi i z} - 1}{2\pi i z}$$

$$h_-(z) = \frac{e^{-2\pi i z} - 1}{-2\pi i z} \quad (S.25)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{2b}^y dx_1 \cdot dx_2 \cdot F(x_1, x_2) &= \int_{2b}^y dx_1 \cdot dx_2 \cdot \int_{2b}^y dv_1 \cdot dv_2 \cdot g(v_1, v_2) \cdot h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \\
 &= \int_{2b}^y dx_1 \cdot dx_2 \cdot \left( g(v_1, v_2) \cdot h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \Big|_{v_1=2b}^{v_1=y} \Big|_{v_2=2b}^{v_2=y} \right. \\
 &\quad + \int_{2b}^y dv_1 \cdot dv_2 \cdot g(v_1, v_2) \cdot h'_+(x_1 - v_1) \cdot h'_-(x_2 - v_2) \\
 &\quad - \int_{2b}^y dv_1 \cdot \left[ h_-(x_2 - v_2) \cdot (-h'_+(x_1 - v_1)) \cdot g(v_1, v_2) \right]_{v_2=2b}^{v_2=y} \\
 &\quad \left. - \int_{2b}^y dv_2 \cdot \left[ h_+(x_1 - v_1) \cdot (-h'_-(x_2 - v_2)) \cdot g(v_1, v_2) \right]_{v_1=2b}^{v_1=y} \right) \\
 &= \int_{2b}^y dx_1 \cdot dx_2 \cdot \left( g(v_1, v_2) \cdot h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \Big|_{v_1=2b}^{v_1=y} \Big|_{v_2=2b}^{v_2=y} \right) \\
 &\quad + \int_{2b}^y dv_1 \cdot dv_2 \cdot g(v_1, v_2) \cdot \left( h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \Big|_{x_1=2b}^{x_1=y} \Big|_{x_2=2b}^{x_2=y} \right) \\
 &\quad + \int_{2b}^y dx_1 \cdot \int_{2b}^y dv_2 \cdot \left( h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \cdot g(v_1, v_2) \Big|_{x_2=2b}^{x_2=y} \Big|_{v_1=2b}^{v_1=y} \right) \\
 &\quad + \int_{2b}^y dx_2 \cdot \int_{2b}^y dv_1 \cdot \left( h_+(x_1 - v_1) \cdot h_-(x_2 - v_2) \cdot g(v_1, v_2) \Big|_{x_1=2b}^{x_1=y} \Big|_{v_2=2b}^{v_2=y} \right) \quad \dots (5.26)
 \end{aligned}$$

$$\int_{2b}^y |h_{\pm}(x-v)| \cdot dx \ll \log y \quad \dots (5.27)$$

$$\int_{2^j}^y |h_{\pm}(x-v)| \cdot dx \ll \log y \quad \dots (5.27)$$

とある事から

$$(5.16) \ll \max_{2^j \leq y \leq N} \max_{\substack{2^j \leq v_j \leq y \\ j=1,2}} |g(v_1, v_2)| \cdot \log^2 y$$

$$\ll \max_{2^j \leq v_j \leq N} |g(v_1, v_2)| \cdot \log^2 N \quad \dots (5.28)$$

を得る。

(5.17) を評価しよう。(5.22) の途中から

$$|F(x_1, x_2)| \ll \sum_{\substack{2^j \leq k_j \leq y \\ k_1 \equiv k_2 \pmod{2} \\ |k_j - x_j| < \frac{y}{2} \\ j=1,2}} \min(1, \frac{1}{|x_1 - k_1|}) \cdot \min(1, \frac{1}{|x_2 - k_2|}) + \frac{\log^2 y}{\phi(2)}$$

とあり。(5.5) から

$$(5.17) \ll \left( \int_{2^j}^N \frac{dx_1}{x_1} \cdot \frac{dx_2}{x_2} \left( x_1^{\theta} \log x_1 \log T + \sum_{|x_1 - x_1| < \frac{1}{T}} T \right) \right) \times$$

$$\times \left( x_2^{\theta} \log x_2 \log T + \sum_{|x_2 - x_2| < \frac{1}{T}} T \right) \times$$

$$\times \left( \frac{\log^2 N}{\phi(2)} + \sum_{\substack{2^j \leq k_j \leq N \\ |k_j - x_j| < \frac{1}{2} \\ k_1 \equiv k_2 \pmod{2}}} \min(1, \frac{1}{|x_1 - k_1|}) \cdot \min(1, \frac{1}{|x_2 - k_2|}) \right)$$

$$\ll \left\{ \int_{2^j}^N \frac{dx}{x} \left( x^{\theta} \log x \log T + \sum_{|x - x| < \frac{1}{T}} T \right) \right\}^2 \cdot \frac{\log^2 N}{\phi(2)}$$

$$+ \sum_{\substack{2^j \leq k_j \leq N \\ k_1 \equiv k_2 \pmod{2}}} \left( \int_{2^j}^N \frac{dx_1}{x_1} \cdot \frac{dx_2}{x_2} \left( x_1^{\theta} \log x_1 \log T + \sum_{|x_1 - x_1| < \frac{1}{T}} T \right) \cdot \left( x_2^{\theta} \log x_2 \log T + \sum_{|x_2 - x_2| < \frac{1}{T}} T \right) \right) \times$$

$$\times \min(1, \frac{1}{|x_1 - k_1|}) \times \min(1, \frac{1}{|x_2 - k_2|})$$

とある。そこで (4.13) から更に

$$\ll \left( N^{\Theta} \log N \log T + T \times \frac{\log N}{T} \right)^2 \frac{\log^2 N}{\Phi(1)}$$

$$+ \sum_{\substack{21 \leq k_1, k_2 \leq N \\ k_1 \neq k_2, \text{ mod } T}} \left( T \cdot \frac{\log T}{T} \cdot \frac{1}{k_1} + k_1^{\Theta-1} \log N \log T \right) \left( T \cdot \frac{\log T}{T} \cdot \frac{1}{k_2} + k_2^{\Theta-1} \log N \log T \right)$$

$$\ll \Phi(1)^{-1} \cdot \left( N^{\Theta} \log N \log T + \log N \right)^2 \log^2 N \quad \dots (5.29)$$

と再び従って

$$(5.17) \ll \Phi(1)^{-1} \left( N^{\Theta} \log^2 N \log T \right)^2 \quad \dots (5.30)$$

を得る。

(5.20) を評価しよう。(5.26), (5.29) を求める際のと同様の評価をして (5.27), (5.27') を使うと

$$(5.20) \ll \max_{\substack{21 \leq y \leq N \\ 21 \leq u \leq y}} \max_{\substack{21 \leq u \leq y \\ 21 \leq k_1 \leq y}} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\Phi(1)} \cdot \sum_{\substack{21 \leq k_2 \leq N \\ 21 \leq k_1 \leq y}} \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{-2\pi i(u-k_2)} - 1}{-2\pi i(u-k_2)} \cdot \sum_{21 \leq k_1 \leq y} \chi(k_1) \right| \times$$

$$\times y^{\Theta} \log y \log T \times \log y$$

$$\ll \max_{\substack{21 \leq u \leq N \\ 21 \leq u \leq N}} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\Phi(1)} \cdot \sum_{\substack{21 \leq k_2 \leq N \\ 21 \leq k_1 \leq u}} \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{-2\pi i(u-k_2)} - 1}{-2\pi i(u-k_2)} \cdot \sum_{21 \leq k_1 \leq u} \chi(k_1) \right| \times N^{\Theta} \log^2 N \log T$$

$$\dots (5.31)$$

を得る。

(5.19) について (5.15)  $\int_{21}^y dx_1 F(x_1, x_2)$  について (5.26) の計算と同様に行い後部分積分を行えば

$$(5.19) \ll \max_{\substack{21 \leq u \leq N \\ 21 \leq u \leq N}} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \frac{1}{\Phi(1)} \cdot \sum_{\substack{21 \leq k_2 \leq N \\ 21 \leq k_1 \leq u}} \bar{\chi}(k_2) \cdot \frac{e^{-2\pi i(u-k_2)} - 1}{-2\pi i(u-k_2)} \cdot \sum_{21 \leq k_1 \leq u} \chi(k_1) \right| \times \log N \times$$

$$\times \left( \frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}} \log^2 T + \frac{N^2 \log N \log T}{T} \right) \quad \dots (5.32)$$

を得る。

(5.21) については部分積分と、(5.29) を求めた際のと類似の計算により

$$(5.21) \ll \frac{1}{\phi(12)} \log^2 N \times N^{\theta} \log N \cdot \log T \times \left( \frac{N^2}{T^{\frac{1}{2}}} + N^{\frac{1}{2}} \log^2 T + \frac{N^2 \log N \log T}{T^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (5.33)$$

を得る。

(5.23), (5.28), (5.30), (5.31), (5.32), (5.33) において  $T = N^3$  とおき、 $\theta \geq \frac{1}{2}$  である事を考慮すれば (5.11) を得る。

従って

[定理] 仮定 (A) の  $\psi$  とに  $\psi \leq X \leq \frac{N}{2}$  の時

$$\sum_{\psi \leq X} \max_{y \leq N} \max_{\substack{(a,1)=1 \\ \text{mod } y}} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{y}} \Lambda(n) - \frac{y}{\phi(12)} \right| \ll X^{\frac{1}{2}} \log N \cdot (X + N^{\theta} \log^2 N) \quad (5.34)$$

を得る。特に  $\theta \leq \frac{2}{3}$  であれば

$$\sum_{\psi \leq N^{\frac{2}{3}}} (\log N)^{-2(A+3)} \max_{y \leq N} \max_{(a,1)=1} \left| \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv a \pmod{y}} \Lambda(n) - \frac{y}{\phi(12)} \right| \ll N \cdot (\log N)^{-A} \quad (5.35)$$

を得る。

## §6 註

恐らく、 $\zeta(s) \neq 0$  ( $\sigma > \theta$ )  $1 > \theta \geq \frac{1}{2}$  と仮定するのみで仮定 (A), 仮定 (A) の事は得られるのではなからかと思われるが今の所は未知である。又、現在肯定的に知られている  $\zeta$ -函数の評価からだけでは四節五節と類似の計算により肯定的な結果と得られるよりには見えなから。Dirichlet の L-函数達す

すべてに対して  $L(\lambda, X) \neq 0$  ( $\lambda > 0$ ) ( $\lambda$  は共通) とする事を仮定すれば

$$\sum_{y \leq X} \max_{y \leq N} \max_{(a, y) = 1} \left| \sum_{\substack{n \leq a \\ n \leq y}} \Lambda(n) - \frac{y}{\phi(y)} \right| \ll \log X \cdot (X + X^{\frac{1}{2}} N^{\theta} \log^2 N)$$

が得られるのではなかと考えられる。

なお、仮定(1)の根拠は Landau <5> により次の事が知られているからである。仮定(1)に、 $x \geq 1$  の時

$$\sum_{|n| < T} x^n = \begin{cases} -\Lambda(n) \cdot 2T + O(x \cdot \log T) & x = n \text{ の時} \\ O(x \cdot \log T) & x \neq n \text{ の時} \end{cases}$$

$x \neq n$  の時については

ここに  $O(\quad)$  の中の定数は  $x$  が  $\Lambda(n) \neq 0$  とする自然数を含む任意に固定した閉区間に入るかどうかにより、そのみ定まる。仮定(1)はその類似である。

## 文献

- <1> Davenport-Halberstam : Mathematika 13 (1966) pp 91/96  
the values of a trigonometrical polynomials at well spaced points
- <2> Davenport : Markham (Chicago 1967)  
multiplicative number theory
- <3> Gallagher : Mathematika 14 (1967) pp 14/20  
the large sieve

- <4> Gallagher : Mathematika 15 (1968) pp 1/6  
Bombieri's mean value theorem
- <5> Landau : Mathematische Annalen 71 (1911) pp 548/564  
über die Nullstellen der Zetafunktion
- <6> Prachar : Springer (Berlin 1957)  
Primzahlverteilung
- <7> Titchmarsh : Oxford (at the Clarendon Press 1951)  
the theory of the Riemann Zeta-function

LX I.