

Goldbach - Rényi の定理 について

信州大理 内山 三郎

§ 1. 序

1948 年に A. Rényi [15] は, Viggo Brun の sieve method と Ju. V. Linnik の創案にかかる the large sieve の精密化とによって, つぎの定理を証明した:

定理 すべての偶数  $N$  は素数  $p$  と概素数  $P$  との和,  $N = p + P$ , として表わされる.

こゝに, 概素数  $P$  とは整数  $P > 1$  で  $P$  に含まれる素因数の総数 (重複度を数える)  $V(P)$  が有界,

$$V(P) \leq K,$$

であるものをいう.

充分大きな偶数  $N$  だけを対象とするならば  $K$  の値は具体的に定められる. この場合  $K$  の値について現在知られてい

る最良の結果は 3 である。(陳景潤 [6] は  $K \leq 2$  であることが証明できたという報告をしているけれども、詳しい証明はまだ発表されていないようである。) これは A. A. Buhštab [12, 13] に負うもので、その証明は(それ自身たいへん興味あるものであるが)非常に複雑な sieve method とそれにとまなう数値計算によっている。この Buhštab の証明は、H. Halberstam, W. Jurkat and H.-E. Richert [7] および筆者 [11] らによってかなり簡易化され、とくに、数値計算は全く不要となった。以下、われわれの方法にしたがって(充分大きな偶数  $N$  に対して)

$$K \leq 3$$

の証明を述べる。

Buhštab の証明においてもわれわれの証明においても the large sieve はきわめて重要であって、それはずきの '平均値定理' の形で用いられる。

整数  $k \geq 1$ ,  $l$  に対して,  $p \equiv l \pmod{k}$ ,  $p \leq X$  をみたす素数  $p$  の個数を  $\pi(X, k, l)$  で表わし,

$$R(X, k) = \max_{\substack{l \\ (k, l) = 1}} \left| \pi(X, k, l) - \frac{\text{li } X}{\phi(k)} \right|$$

とおく。  $\text{li } X$  は対数積分で  $\phi(k)$  は Euler の函数である。このとき、定数  $A > 0$  がどんなに大きくても

$$\sum_{m \leq X^\nu} \mu^2(m) 2^{v(m)} R(X, m) = O\left(\frac{X}{\log^A X}\right)$$

が成立する。ただし

$$\nu = \frac{1}{2} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0, \text{任意})$$

とする (A. I. Vinogradov [14], E. Bombieri [1])。

ここで、 $\mu(m)$  は Möbius の函数を、 $v(m)$  は  $m$  の相異なる素因数の個数をあらわす。記号  $O$  に含まれる定数は  $A, \varepsilon$  に依存する。

猶、Buhštab [13] は、 $\nu = 0.531$  とすることができれば  $K \leq 2$  が得られること、Halberstam-Jurkat-Richert [7] は、 $\nu > \frac{4}{7}$  ( $> 0.571$ ) ならば同じく  $K \leq 2$  となること、を注意している。

注意 1 Bombieri [1] の平均値定理は上に記したものよりも稍、強い形に述べられている。ただし、そこでは因子  $2^{v(m)}$  がないけれども、この因子を挿入しても、容易にわかるように、Bombieri の定理はそのまま成り立つ。

注意 2 Rényi [15] はまた、素数の双子の問題に関連して、 $P = p + 2$  が概素数であるような素数  $p$  が無限に多く存在することを証明している。Rényi もそこで注意しているように、われわれはこの結果をつぎの形に拡張し精密化する

ことが出来る。すなわち、任意の整数  $k \neq 0$  に対して  
 $V(p+2k) \leq 3$  をみたす無限に多くの素数  $p$  が存在する。

## § 2. 函数 $g(u)$ , $\theta(u)$ , $\omega(u)$

次節以下の計算で必要となる標記の3つの函数の各：について、その定義と性質を簡単に述べる。これらの詳細については [2, 3, 4, 5] を参照。

定義 つぎの3条件により  $u \geq 0$  において一意的に定まる函数を  $g(u)$  とする：

- (i)  $g(u)$  は  $u > 0$  において連続；
- (ii)  $g(u) = 1$  ( $0 \leq u \leq 1$ )；
- (iii)  $u g'(u) = -g(u-1)$  ( $u > 1$ )。

$g(u)$  についてはつぎのことが知られている。

$$g(u) > 0 \quad (u \geq 0), \quad g(u) \downarrow 0 \quad (u \uparrow \infty);$$

$$g(u) = \exp(-u \log u - u \log \log u + O(u)) \quad (u > 3).$$

$k < 1$

$$g(u) = O(e^{-2u}) \quad (u \geq 0).$$

定義  $\theta(u) = \int_0^u g(v) dv \quad (u \geq 0).$

$\theta(u)$  はつぎの3条件をみたす:

(i)  $\theta(u)$  は  $u > 0$  において連続;

(ii)  $\theta(u) = u \quad (0 \leq u \leq 1);$

(iii)  $u\theta'(u) = \theta(u) - \theta(u-1) \quad (u > 1).$

これを用いて

$$\theta(u) = e^C + O(e^{-2u}) \quad (u \geq 0)$$

を示すことが出来る.  $C$  は Euler の定数である.

定義 つぎの3条件により  $u > 0$  において一意的に定まる函数を  $\omega(u)$  とする:

(i)  $\omega(u)$  は  $u > 0$  において連続である;

(ii)  $\omega(u) = 1/u \quad (0 < u \leq 2);$

(iii)  $u\omega'(u) = -\omega(u) + \omega(u-1) \quad (u > 2).$

この函数  $\omega(u)$  については

$$\omega(u) > 0 \quad (u > 0), \quad \omega(u) = e^{-C} + O\left(\frac{1}{\Gamma(u+1)}\right) \quad (u \geq 1)$$

が成り立つ.

さて,  $g(u) = 1$  ( $-1 < u < 0$ ) により  $g(u)$  の定義域を  
 $u > -1$  に拡大して

$$\begin{cases} g(u) = e^c \left( w(u) - \frac{g(u-1)}{u} \right) \\ G(u) = e^c \left( w(u) + \frac{g(u-1)}{u} \right) \end{cases} \quad (u > 0)$$

とおく. このとき,

$$g(u) = 0, \quad G(u) = \frac{2e^c}{u} \quad (0 < u \leq 2)$$

は明らかであるが, さらに

$$G(u) = \frac{2e^c}{u} \quad (2 \leq u \leq 3),$$

$$g(u) = \frac{2e^c \log(u-1)}{u} \quad (2 \leq u \leq 4);$$

$$g(u) = 1 + O(e^{-2u}), \quad G(u) = 1 + O(e^{-2u}) \quad (u \geq 1),$$

$$G(u) - g(u) = \frac{2e^c}{u} g(u-1) > 0 \quad (u > 0),$$

$$g(u) \uparrow 1, \quad G(u) \downarrow 1 \quad (u \uparrow \infty)$$

であることがわかる ([8] 参照). また

$$(uG(u))' = g(u-1), \quad (ug(u))' = G(u-1) \quad (u > 1)$$

は見やすい. よって

$$\begin{cases} \int_v^u g(t-1) dt = uG(u) - vG(v) \\ \int_v^u G(t-1) dt = ug(u) - vg(v) \end{cases} \quad (2 \leq v \leq u).$$

## § 3. Selberg の方法および Brun の方法の応用

$N$  は充分大きな偶数として、以後これを固定する。そしてつぎの記号を用いる。

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \phi\left(\frac{n}{d}\right) \quad (\phi(n) \text{ の整数論的導関数});$$

$$y > 2, z > 2 \text{ に対し}$$

$$Z_k(y, z) = \sum_{\substack{n \leq y \\ p(n) < z \\ (n, k) = 1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)}, \quad Z(y, z) = Z_N(y, z)$$

$= 1$ ,  $p(1) = 1$ ,  $n > 1$  に対し  $z$  は  $p(n) = n$  の最大の素因数, とする;

$$\lambda_n = \mu(n) \frac{\phi(n)}{f(n)} \frac{Z(y/n, z)}{Z(y, z)};$$

$$S_d(z) = \sum_{\substack{p \leq N \\ N-p \equiv 0(d) \\ (N-p, P_z) = 1}} 1, \quad P_z = P_{z, N} = \prod_{\substack{p < z \\ p \nmid N}} p.$$

定理 1  $(d, NP_z) = 1$  ならば

$$S_d(z) \leq \frac{\text{li } N}{\phi(d)} \frac{1}{Z(y, z)} + R_d,$$

$$|R_d| \leq \sum_{\substack{n_i \leq y \\ n_i | P_z \\ (i=1, 2)}} \left| \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} R(N, d[n_1, n_2]) \right|,$$

が成り立つ。  $\lambda_n = 1$  なら、  $[n_1, n_2]$  は  $n_1, n_2$  の最小公倍数を表わす。

(証) これは良く知られた Selberg の sieve method による評価である。 実際、  $\lambda_1 = 1$  に注意すれば

$$S_d(z) \leq \sum_{p \leq N} \left( \sum_{\substack{n \\ N-p \equiv 0 \pmod{dn} \\ n|P_z}} \lambda_n \right)^2$$

これから容易に上の結果をえる。

補題 1  $n|P_z$  ならば  $|\lambda_n| \leq |\mu(n)|$ .

(証) 略

$$S_k(y, z) = \sum_{\substack{n \leq y \\ p(n) < z \\ (n, k) = 1}} \frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}$$

とおくと、

補題 2  $S_1(y, z) = \theta(u) \log z + O(1)$ ,

ただし  $u = (\log y) / \log z$ .

(証) [10] 参照.

補題 3



$$\frac{\phi(k)}{k} S_1(y, z) \leq S_k(y, z) \leq \frac{\phi(k)}{k} S_1(y, z) + O(\log \log 3k)$$

(証) 略

補題 4  $k$  は偶数とする.  $\log z = O(y (\log \log y)^{-2})$  に対し

$$Z_k(y, z) \geq \frac{\phi(k)}{k} \prod_{p|k} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \cdot \theta(u) \log z + O\left(\frac{\phi(k)}{k}\right)$$

が成立し, またつねに

$$Z_k(y, z) \leq \frac{\phi(k)}{k} \prod_{p|k} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \cdot \theta(u) \log z + O(\log \log 2k)$$

が成立する. ただし  $u = (\log y) / \log z$ .

(証) 補題 2, 3 による.

補題 4 の第一の不等式は以下において必要としたい.

すなわち,

$$\begin{aligned} x &= N^{1/(2+\varepsilon)}, \\ d_0(c) &= x \exp(-c(\log x)^\alpha), \\ z_0 &= \exp(\log x)^\beta \end{aligned}$$

とおく. ただし

$$\varepsilon > 0, \quad c > 0, \quad \frac{1}{2} < \beta < \alpha < 1$$

とする. さらに, 偶数  $k$  に対し

$$P_k(z) = \prod_{\substack{p < z \\ p|k}} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

とおき,  $P(z) = P_N(z)$  とする.

定理 1 にあいて  $y = (x/d)^{1/2}$  とおき補題 4 の第一の不等式を用いるとつぎの定理をえる.

定理 2  $(d, NP_z) = 1$ ,  $1 \leq d \leq d_0(c)$  とする.  $z_0 < z < x/d$  ならば

$$S_d(z) \leq \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \left( \frac{e^c}{\theta(u/z)} + O\left(\frac{1}{\log z}\right) \right) + R_d(z).$$

== 1 =  $u = (\log(x/d)) / \log z$  である

$$R_d(z) = \sum_{\substack{n \leq x/d \\ p(n) < z}} \mu^2(n) z^{v(n)} R(N, dn).$$

注意 任意の定数  $A > 0$  に対して  $R_d(z) = O\left(\frac{N}{\log^A N}\right)$ .

定理 3  $(d, NP_z) = 1$ ,  $1 \leq d \leq d_0(c)$  とする.  $2 < z \leq z_0$  ならば

$$S_d(z) = \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \left( 1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right) \right) + r_d(z).$$

== 1 =

$$|r_d(z)| \leq \sum_{\substack{n \leq x/d \\ p(n) < z}} \mu^2(n) R(N, dn).$$

(註) これは Brun の sieve method により証明される。

先ず

$$u = \frac{\log(x/d)}{\log z} \geq \frac{\log(x/d_0)}{\log z_0} \geq c (\log x)^{\alpha-\beta}.$$

より小で  $N$  をわらな素数が全部で  $r$  個あるとして、これを

$$p_1 < p_2 < \dots < p_r$$

とする。  $l, 1 \leq l < \frac{u}{2} - 1$ , はあとで定める整数とし、

$$v = \frac{u - 2l + 1}{u - 2l - 1}$$

とおく。そして、整数列

$$r \geq r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_s \geq 1$$

をつぎのように定める。充分小でな  $\varepsilon_1 > 0$  をとる。  $\delta_1 =$

$\delta_1(\varepsilon_1) > 1$  が存在して  $\delta \geq \delta_1$  ならば

$$\sum_{\substack{\delta < p \leq \delta^v \\ p \nmid N}} \frac{1}{p-1} < \log(v + \varepsilon_1) = \tau,$$

$$\prod_{\substack{\delta < p \leq \delta^v \\ p \nmid N}} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^{-1} < v + \varepsilon_1 = \lambda.$$

そこで  $r = r_1 = \dots = r_l$  とし、  $l < i \leq t+1$  に対して

$r_i$  は  $p_j \leq p_r^{1/v^{i-l}}$  をみたす最大の  $j$  とする。 二に

$p_{r_{t+1}}^{1/v} < \delta_1 \leq p_{r_{t+1}}$   $2(s-t) > r_{t+1}$  をみたす  $s$  をと

って  $r_{t+1} = r_{t+2} = \dots = r_s$  とおく。

このようにすると

$$\begin{aligned}
P_r P_{r_1}^2 P_{r_2}^2 \cdots P_{r_s}^2 &\ll P_r^{2l+1 + \sum_{i=l+1}^{\infty} 1/v^{i-l}} \\
&= P_r^{2l+1 + 2/(v-1)} = P_r^u \\
&< z^u = \frac{x}{d}
\end{aligned}$$

であるから (記号  $\ll$  に含まれる定数は  $\varepsilon_1$  に依存する),

$$\begin{aligned}
S_d(z) &\geq (1-c) \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) + r_d(z), \\
c &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu} (\nu \tau)^{2l+\nu}}{(2l+2\nu)!},
\end{aligned}$$

とえる. 容易に分るよゝに,  $\lambda \tau^2 < 4e^{-2}$  ならば

$$(0 <) c < \frac{e^2 \lambda \tau}{2\sqrt{\pi} (4 - e^2 \lambda \tau^2)} \left( \frac{e\sqrt{\lambda} \tau}{2} \right)^{2l}.$$

$z = z^{\alpha}$   $l = [u/4]$  とすれば 適当な定数  $c_1 > 0$  に対して

$$0 < \frac{e\sqrt{\lambda} \tau}{2} < \frac{1}{2}, \quad c = O\left(\exp(-c_1 (\log x)^{\alpha-\beta})\right).$$

これにより  $S_d(z)$  の下からの評価が得られる. 上からの評価の仕方は下からの場合と殆ど同様である.

定理 4  $(d, NP_2) = 1$  とする.  $1 \leq d \leq d_0(c)$  ならば

$1 \leq \log z \leq \log(x/d)$  に対して

$$S_d(z) \leq \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \left( 1 + O(e^{-u}) + O\left(\frac{1}{\log z}\right) \right) + R_d(z).$$

== 即ち  $u = (\log(x/d)) / \log z$ . さらには,  $1 \leq d \leq d_0(zc)$

ならば  $\log z \leq (\log(x/d))/2 \log \log(x/d)$  に対して

$$S_d(z) = \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \left( 1 + O\left(\frac{1}{\log^\delta x}\right) \right) + O(R_d(z)).$$

ただし  $\delta = 2\beta - 1 > 0$ .

(証) 第一の不等式は

$$e^c / \theta(u/2) = 1 + O(e^{-u}) \quad (u \geq 1)$$

に注意すれば定理2より直ちに出る. 第二の不等式は

$$\begin{aligned} S_d(z) - \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \\ = S_d(z_0) - \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z_0) - \sum_{\substack{z_0 \leq p < z \\ p \neq N}} \left( S_{dp}(p) - \frac{\text{li } N}{\phi(dp)} P(p) \right) \end{aligned}$$

において右辺に定理2, 3を適用し左辺に対する下からの評価をとると, 第一の不等式とを組合せれば導かれる.

#### § 4. Buhštab の方法

補題 5  $2 < z_1 \leq z \leq \sqrt{y}$  とし

$$y_j = \frac{y}{p_1 \cdots p_j} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

とおく.  $(d, NP_z) = 1$  ならば, 任意の正整数  $r$  に対してつぎの式が成り立つ:

$$S_d(z) = S_d(z_1) + \sum_{1 \leq i \leq r-1} (-1)^i \sum_{\substack{z_1 \leq p_1 < \dots < p_i < z \\ p_j < \sqrt{y_j}, p_j \notin N \\ (j=1, \dots, i)}} S_{d_{p_1 \dots p_i}}(z_1)$$

$$+ (-1)^r \sum_{\substack{z_1 \leq p_r < \dots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j}, p_j \notin N \\ (j=1, \dots, r)}} S_{d_{p_1 \dots p_r}}(p_r)$$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^i \sum_{\substack{z_1 \leq p_i < \dots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j}, p_j \notin N \quad (j=1, \dots, i-1) \\ \sqrt{y_i} \leq p_i < y_i, p_i \notin N}} S_{d_{p_1 \dots p_i}}(p_i)$$

(証)  $r$  についての帰納法による。詳細は [8, Theorem 1]

と参照。

補題 6  $2 < w \leq z$  に対し

$$\frac{P_k(w)}{P_k(z)} = O\left(\frac{\log z}{\log w}\right), \quad \frac{1}{P_k(z)} = O(\log z),$$

$$\frac{P_k(w)}{P_k(z)} = \frac{\log z}{\log w} + O\left(\frac{(\log z) \log \log 2k}{\log^2 w}\right).$$

ただし、 $O$ -定数は  $k$  に無関係。

(証) 略

$$h_\nu(u) = \begin{cases} g(u) & \nu \equiv 1 \pmod{2} \text{ のとき,} \\ G(u) & \nu \equiv 0 \pmod{2} \text{ のとき,} \end{cases}$$

とおく.

補題 7  $2 < z_1 \leq z \leq \sqrt{y}$  および任意の  $\nu$  の値に対し

z

$$\begin{aligned} & P_k(z) h_\nu\left(\frac{\log y}{\log z}\right) \\ &= P_k(z_1) h_\nu\left(\frac{\log y}{\log z_1}\right) - \sum_{\substack{z_1 \leq p < z \\ p+k}} \frac{P_k(p)}{p-1} h_{\nu+1}\left(\frac{\log(y/p)}{\log p}\right) \\ & \quad + O\left(\frac{P_k(z)(\log z) \log \log 2k}{\log^2 z_1}\right). \end{aligned}$$

(証)  $z_1 \leq w \leq z$  とすれば, 補題 6 により

$$\begin{aligned} \sigma(w) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{P_k(z)} \sum_{\substack{z_1 \leq p < w \\ p+k}} \frac{P_k(p)}{p-1} = \frac{P_k(z_1)}{P_k(z)} - \frac{P_k(w)}{P_k(z)} \\ &= \log z \left( \frac{1}{\log z_1} - \frac{1}{\log w} \right) + O\left(\frac{(\log z) \log \log 2k}{\log^2 z_1}\right). \end{aligned}$$

いま

$$h(w) = h_{\nu+1}\left(\frac{\log(y/w)}{\log w}\right) \quad (z_1 \leq w \leq z)$$

とおけば,  $(\log(y/w))/\log w \geq 1$  であることにより,  $h(w)$  は  $z_1 \leq w \leq z$  において単調, 一様有界かつ連続で

ある。よって

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{P_k(z)} \sum_{\substack{z_1 \leq p < z \\ p+k}} \frac{P_k(p)}{p-1} h_{\nu+1} \left( \frac{\log(y/p)}{\log p} \right) \\
 &= \sigma(z) h(z) - \int_{z_1}^z \sigma(w) dh(w) \\
 &= \log z \int_{z_1}^z \frac{h(w)}{\log^2 w} \frac{dw}{w} + O \left( \frac{(\log z) \log \log 2k}{\log^2 z_1} \right) \\
 &= \frac{\log z}{\log y} \int_{(\log y)/\log z}^{(\log y)/\log z_1} h_{\nu+1}(t-1) dt + O \left( \frac{(\log z) \log \log 2k}{\log^2 z_1} \right) \\
 &= \frac{\log z}{\log y} \left\{ \frac{\log y}{\log z_1} h_{\nu} \left( \frac{\log y}{\log z_1} \right) - \frac{\log y}{\log z} h_{\nu} \left( \frac{\log y}{\log z} \right) \right\} \\
 & \quad + O \left( \frac{(\log z) \log \log 2k}{\log^2 z_1} \right)
 \end{aligned}$$

== 再び補題 6 を用いて結果を与える。

補題 8  $z < z_1 \leq z \leq y$ ,  $m = \min(z, y^{1/3})$  とすれば

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{z_1 \leq p < m \\ p+k}} \frac{P_k(p)}{p-1} e^{-(\log(y/p))/\log p} \\
 & \leq P_k(z) e^{-(\log y)/\log z} \cdot \frac{e}{3} \left( 1 + c_2 \frac{(\log y) \log \log 2k}{\log^2 z_1} \right).
 \end{aligned}$$

==  $c_2 > 0$  は絶対定数である。



(証)  $g(w) = e^{-(\log(y/w))/\log w}$  とおけば, 同様

$z_1 \leq w \leq m$  におい  $z$  単調かつ連続して  $0 < g(w) \leq g(m)$ .

よって

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P_k(z)} \sum_{\substack{z_1 \leq p < m \\ p+k}} \frac{P_k(p)}{p-1} e^{-(\log(y/p))/\log p} \\ & \geq \frac{\log z}{\log y} \int_{(\log y)/\log m}^{(\log y)/\log z_1} e^{1-t} dt + O\left(\frac{(\log z) \log \log 2k}{\log^2 z_1} g(m)\right) \\ & \frac{\log z}{\log y} e^{1-(\log y)/\log m} \leq e^{-(\log y)/\log z} \cdot \frac{e}{3} \end{aligned}$$

に注意すれば結果を得る。

補題 9  $2 < z_1 \leq z \leq \sqrt{y}$  とし

$$y_j = \frac{y}{p_1 \cdots p_j} \quad (j=1, 2, \dots)$$

とおけば, 任意の正整数  $r$  および任意の  $\nu$  の値に対して  
つぎの式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & P_k(z) h_\nu\left(\frac{\log y}{\log z}\right) \\ & = P_k(z_1) h_\nu\left(\frac{\log y}{\log z_1}\right) + \sum_{1 \leq i \leq r-1} (-1)^i \sum_{\substack{z_1 \leq p_i < \cdots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j}, p_j + k \\ (j=1, \dots, i)}} \frac{P_k(z_1)}{\phi(p_1 \cdots p_i)} h_{\nu+1}\left(\frac{\log y_i}{\log z_1}\right) \end{aligned}$$

$$+ (-1)^r \sum_{\substack{z_1 \leq p_r < \dots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j}, p_j \nmid k \\ (j = 1, \dots, r)}} \frac{P_k(p_r)}{\phi(p_1 \dots p_r)} h_{\nu+r} \left( \frac{\log y_r}{\log p_r} \right)$$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^i \sum_{\substack{z_1 \leq p_i < \dots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j}, p_j \nmid k \ (j = 1, \dots, i-1) \\ \sqrt{y_i} \leq p_i < y_i, p_i \nmid k}}$$

$$+ O \left( \frac{P_k(z) \log^2 z \log \log 2k}{\log^3 z_1} \right).$$

(証) 残余項を除けば, 補題 7 を用いて, 補題 5 の証明と同様に帰納法で証明される. 残余項は

$$O \left( \frac{\log \log 2k}{\log^2 z_1} \right) \left( P_k(z) \log z + \sum_{1 \leq i \leq r-1} \sum_{z_1 \leq p_i < \dots < p_1 < z} \frac{P_k(p_i) \log p_i}{\phi(p_1 \dots p_i)} \right)$$

$$= O \left( \frac{P_k(z) \log z \log \log 2k}{\log^2 z_1} \sum_{0 \leq i \leq r-1} \frac{1}{i!} \left( \sum_{z_1 \leq p < z} \frac{1}{p-1} \right)^i \right)$$

$$= O \left( \frac{P_k(z) \log^2 z \log \log 2k}{\log^3 z_1} \right).$$

$$= z^{\nu} \sum_{z_1 \leq p < z} \frac{1}{p-1} = \log \frac{\log z}{\log z_1} + O \left( \frac{1}{\log z_1} \right)$$

を用いた.

定理 5  $(d, NP_2) = 1$ ,  $1 \leq d \leq x^\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ) ならば

$2 < z \leq x/d$  に対し

$$S_d(z) \leq \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \left( G\left(\frac{\log \frac{x}{d}}{\log z}\right) + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1/21}}\right) \right) + O((\log x)^{1/2} R_d(z)),$$

$$S_d(z) \geq \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \left( g\left(\frac{\log \frac{x}{d}}{\log z}\right) + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1/21}}\right) \right) + O((\log x)^{1/2} R_d(z)).$$

(証明)  $y_0 = x/d$  とおく.  $\sqrt{y_0} < z \leq y_0$  ならば  $1 \leq (\log y_0) / \log z < 2$  であるから, 第一の不等式は定理 2 よりえられ, 第二の不等式は自明である.  $y > z \gg x$

$$2 < z \leq \sqrt{y_0}$$

と仮定する.  $d$  に対する条件から  $y_0 \geq x^{1-\delta}$ , すなわち

$$\log y_0 \geq (1-\delta) \log x$$

より, 補題 5 および補題 9 を

$$k = N, \quad z_1 = \exp(\log y_0)^{4/5},$$

$$\frac{1}{3} \frac{(\log y_0)^{1/5}}{\log \log y_0} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^r \leq \frac{3}{4} \frac{(\log y_0)^{1/5}}{\log \log y_0}$$

をみたす  $r$  に対し適用する.

もし  $z < z_1$  ならば定理 5 はすでに証明されている (定理 4 参照) から,  $z \geq z_1$  としよ.  $z = z$

$$(-1)^v \left( S_d(z) - \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) h_v\left(\frac{\log y_0}{\log z}\right) \right)$$

と考へ、これを補題 5, 9 に従つて若干個の部分に分け、各部分とそれぞれ評価する。

(第 1 項) 定理 4 により

$$\begin{aligned} & (-1)^{\nu} \left( S_d(z_1) - \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z_1) h_{\nu} \left( \frac{\log y_0}{\log z_1} \right) \right) \\ &= O \left( \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z_1) \frac{1}{\log^{\delta} x} \right) + O(R_d(z_1)). \end{aligned}$$

(第 1 の和)  $p_j < \sqrt{y_j}$  ( $j=1, \dots, i$ ) から、 $t < 1$  に  $p_1 < y_0^{1/3}$ .

故に

$$y_j > y_0^{(2/3)^j}$$

は  $j=1$  に対して成り立つ。これが  $1 \leq j \leq i-1$  まで成り立つとすると、 $p_{j+1} < \sqrt{y_{j+1}}$ ,  $p_{j+1} < y_j^{1/3}$  であるから、

$$y_{j+1} = \frac{y_j}{p_{j+1}} > y_j^{2/3} > y_0^{(2/3)^{j+1}}$$

となり  $j+1$  に対しても成り立つ。よつて ( $c_3, c_4, \dots$  は正の定数)

$$\begin{aligned} p_1 \cdots p_{r-1} &< y_0^{1 - (\frac{2}{3})^{r-1}} = y_0 \exp \left( - \left( \frac{2}{3} \right)^{r-1} \log y_0 \right) \\ &\leq y_0 \exp \left( - c_3 (\log y_0)^{4/5} \log \log y_0 \right) \\ &\leq y_0 \exp \left( - c_4 (\log x)^{4/5} \log \log x \right). \end{aligned}$$

故に

$$dp_1 \cdots p_{r-1} \leq x \exp \left( - c_4 (\log x)^{4/5} \right).$$

従つて  $\alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\beta = \frac{3}{4}$ ,  $\delta = 2\beta - 1 = \frac{1}{2}$  ととることに

する.

$$\text{また} \quad \log z_1 \leq \frac{\log y_i}{2 \log \log y_i} \quad (i = 1, \dots, r-1)$$

が成り立つ. 何とすれば

$$\log z_1 \leq \frac{(2/3)^i \log y_0}{2 \log \log y_0} \quad (i = 1, \dots, r-1)$$

を示せば充分であるが,  $i = r-1$  に對して

$$\frac{(2/3)^{r-1} \log y_0}{2 \log \log y_0} = \frac{3 \log y_0}{4 \log \log y_0} \frac{1}{(3/2)^r} \geq (\log y_0)^{4/5} = \log z_1$$

であるからよい. よって定理 4 により

$$\begin{aligned} & (-1)^\nu \sum_{1 \leq i \leq r-1} (-1)^i \sum_{p \text{'s}} \left( S_{d p_1 \dots p_i}(z_1) - \frac{\text{li } N}{\phi(d p_1 \dots p_i)} P(z_1) h_{\nu+i} \left( \frac{\log y_i}{\log z_1} \right) \right) \\ &= O \left( \sum_{1 \leq i \leq r-1} \sum_{p \text{'s}} \frac{\text{li } N}{\phi(d p_1 \dots p_i)} P(z_1) \frac{1}{\log^{\nu} x} \right) \\ &\quad + O \left( \sum_{1 \leq i \leq r-1} \sum_{p \text{'s}} R_{d p_1 \dots p_i}(z_1) \right) \\ &= O \left( \frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z_1) \frac{1}{\log^{\nu} x} \sum_{1 \leq i \leq r-1} \frac{1}{i!} \left( \sum_{z_1 \leq p < z} \frac{1}{p-1} \right)^i \right) \\ &\quad + O(R_d(z)). \end{aligned}$$

(第 3 の和)  $\therefore$   $z$  付近の形の項の和を考へてゐる:

$$(-1)^{\nu+i} \left( S_{d p_1 \dots p_i}(p_i) - \frac{\text{li } N}{\phi(d p_1 \dots p_i)} P(p_i) h_{\nu+i} \left( \frac{\log y_i}{\log p_i} \right) \right),$$

$$= = = \sqrt{y_i} \leq p_i < y_i.$$

前と同様にしよ

$$y_j > y_0^{(2/3)^j} \quad (j = 1, \dots, i-1),$$

よして  $y_i = y_{i-1} / p_i > y_{i-1} / y_i$ ,  $y_i^2 > y_{i-1}$  であるから

$$y_i > y_0^{(1/2)(2/3)^i}$$

よして

$$p_1 \cdots p_r < y_0^{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^r},$$

$$d_{p_1 \cdots p_r} \leq x \exp(-c_5 (\log x)^{4/5}).$$

よして, もし  $\nu+i \equiv 1 \pmod{2}$  ならば  $h_{\nu+i}(\log y_i / \log p_i)$

$= 0$  であるから上記の項は上から 0 により評価される.

もし  $\nu+i \equiv 0 \pmod{2}$  ならば 定理 2 を適用して上からの

評価としよ

$$O\left(\frac{\text{li } N}{\phi(d_{p_1 \cdots p_i})} P(p_i) \frac{1}{\log z_1}\right) + R_{d_{p_1 \cdots p_i}}(p_i)$$

とえる. 従って 第 3 の和は これらの和としよ

$$O\left(\frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \frac{\log z}{\log^2 z_1} \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{1}{i!} \left(\sum_{z_1 \leq p < z} \frac{1}{p-1}\right)^i\right) \\ + O(2^r R_d(z))$$

により評価される.

かくして, 第 2 の和を除いた各項から生じる誤差項は, 補題 9 における残余項を考慮して,

$$\begin{aligned}
& O\left(\frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z)\right) \left( \frac{P(z_1)}{P(z)} \frac{1}{\log^\delta x} + \frac{P(z_1)}{P(z)} \frac{1}{\log^\delta x} \exp \sum_{z_1 \leq p < z} \frac{1}{p-1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\log z}{\log^2 z_1} \exp \sum_{z_1 \leq p < z} \frac{1}{p-1} + \frac{\log^2 z \log \log N}{\log^3 z_1} \right) \\
& \quad + O(\log^{c_6} y_0 \cdot R_d(z)) \\
& = O\left(\frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z)\right) \left( \frac{\log z}{\log z_1} \frac{1}{\log^\delta x} + \frac{\log^2 z}{\log^2 z_1} \frac{1}{\log^\delta x} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\log^2 z}{\log^3 z_1} + \frac{\log^2 z \log \log N}{\log^3 z_1} \right) \\
& \quad + O(\log^{c_6} y_0 \cdot R_d(z)) \\
& = O\left(\frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \frac{1}{\log^{1/10} x}\right) + O(\log^{c_6} y_0 \cdot R_d(z)).
\end{aligned}$$

== 11

$$c_6 = \frac{\log 2}{\log \frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{5}, \quad 0 < c_6 < \frac{1}{2}.$$

(第 2 の 70) = れは

$$\begin{aligned}
(-1)^{\nu+r} \sum_{z_1 \leq p_1 < \dots < p_r < z} & \left( S_{d p_1 \dots p_r}(p_r) - \frac{\text{li } N}{\phi(d p_1 \dots p_r)} P(p_r) h_{\nu+r} \left( \frac{\log y_r}{\log p_r} \right) \right) \\
& p_j < \sqrt{y_j}, p_j + N \\
& (j = 1, \dots, r)
\end{aligned}$$

である。

$\pm z$ , われわれは  $\Rightarrow z \equiv r = r(\nu) \pmod{2}$  と  $\nu + r \equiv 0 \pmod{2}$

となるように (はじめから) とることができる。それは,  $r$  をわれわれの条件をみたす最大の正整数とすれば  $r-1$  もまたこの条件をみたすからである。よって  $v+r \equiv 0 \pmod{2}$  とする。

前と同様に

$$d p_1 \cdots p_r \leq x \exp(-c_5 (\log x)^{4/5}).$$

そこで定理 4 を用いれば, 第 2 の和は上から

$$O\left(\frac{\text{li } N}{\phi(d)} \sum_{p_1's} \frac{P(p_r)}{\phi(p_1 \cdots p_r)} e^{-(\log y_r)/\log p_r}\right) \\ + O\left(\frac{\text{li } N}{\phi(d)} \sum_{p_1's} \frac{P(p_r)}{\phi(p_1 \cdots p_r)} \frac{1}{\log p_r}\right) + \sum_{p_1's} R_{d p_1 \cdots p_r}(p_r)$$

により評価される。これの第 2 項は

$$O\left(\frac{\text{li } N}{\phi(d)} \frac{P(z_1)}{\log z_1} \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{1}{i!} \left(\sum_{z_1 \leq p < z} \frac{1}{p-1}\right)^i\right) \\ = O\left(\frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \frac{\log^2 z}{\log^3 z_1}\right)$$

で, 第 3 項は

$$\sum_{p_1's} R_{d p_1 \cdots p_r}(p_r) \leq R_d(z).$$

故にこれらの項は前の残余項の中に吸収される。

上の第 1 項を評価するために

$$\sum_{\substack{z_1 \leq p_r < \cdots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j}, p_j \neq N \\ (j=1, \dots, r)}} \frac{P(p_r)}{\phi(p_1 \cdots p_r)} e^{-(\log y_r)/\log p_r}$$



を考える.  $p_r$  は適する和は

$$U_r = \sum_{\substack{z_1 \leq p_r < m_r \\ p_r \neq N}} \frac{P(p_r)}{p_r - 1} e^{-\frac{(\log(y_{r-1}/p_r))}{\log p_r}},$$

$m_r = \min(p_{r-1}, y_{r-1}^{1/3})$ , であるか, これは補題 8 に  
より

$$U_r \leq P(p_{r-1}) e^{-\frac{(\log y_{r-1})}{\log p_{r-1}}} \cdot \theta$$

をみる.  $\theta =$

$$\theta = \frac{e}{3} \left( 1 + c_2 \frac{\log \log N}{(\log y_0)^{3/5}} \right).$$

よって帰納的に

$$\sum_{p|s} \frac{P(p_r)}{\phi(p_1 \cdots p_r)} e^{-\frac{(\log y_r)}{\log p_r}} \leq P(z) e^{-\frac{(\log y_0)}{\log 2}} \cdot \theta^r.$$

容易に分るように

$$\theta^r = O\left(\frac{1}{(\log y_0)^{1/21}}\right).$$

かくして第 1 項は

$$O\left(\frac{\text{li } N}{\phi(d)} P(z) \frac{1}{(\log x)^{1/21}}\right).$$

これらの結果をあつめて定理 5 を得る.

注意

$$\frac{\log(3/e)}{\log(3/2)} > \frac{986}{4055}, \quad \frac{986}{4055} \cdot \frac{1}{5} > \frac{1}{21}.$$

## § 5. Kuhn の方法

補題 10  $z_0 < z_0 \leq z < x$  とし

$$u_0 = \frac{\log x}{\log z_0}, \quad u = \frac{\log x}{\log z}$$

とおけば

$$\begin{aligned} & \sum_{z_0 \leq p < z} \frac{1}{p-1} G\left(\frac{\log \frac{x}{p}}{\log z_0}\right) \\ &= \int_{u_0 - (u_0/u)}^{u_0 - 1} \frac{G(t)}{u_0 - t} dt + O\left(\frac{1}{\log z_0} G\left(\frac{\log \frac{x}{z}}{\log z_0}\right)\right) \end{aligned}$$

(註)  $z_0 \leq w \leq z$  に対し

$$\sigma(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{z_0 \leq p < w} \frac{1}{p-1} = \log \frac{\log w}{\log z_0} + O\left(\frac{1}{\log z_0}\right)$$

いま

$$h(w) = G\left(\frac{\log \frac{x}{w}}{\log z_0}\right) \quad (z_0 \leq w \leq z)$$

とおけば,  $h(w)$  は  $z_0 \leq w \leq z$  における単調かつ連続で  $0 < h(w) \leq h(z)$ . 故に

$$\begin{aligned} \sum_{z_0 \leq p < z} \frac{1}{p-1} G\left(\frac{\log \frac{x}{p}}{\log z_0}\right) &= \sigma(z)h(z) - \int_{z_0}^z \sigma(w) dh(w) \\ &= \log \frac{\log z}{\log z_0} \cdot h(z) + O\left(\frac{1}{\log z_0} h(z)\right) - \int_{z_0}^z \log \frac{\log w}{\log z_0} dh(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{z_0}^z \frac{h(w)}{\log w} \frac{dw}{w} + O\left(\frac{1}{\log z_0} h(z)\right) \\
&= \int_u^{u_0} G\left(u_0\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right) \frac{dt}{t} + O\left(\frac{1}{\log z_0} G\left(u_0\left(1 - \frac{1}{u}\right)\right)\right) \\
&= \int_{u_0 - (u_0/u)}^{u_0 - 1} \frac{G(t)}{u_0 - t} dt + O\left(\frac{1}{\log z_0} G\left(\frac{\log \frac{x}{z}}{\log z_0}\right)\right)
\end{aligned}$$

以上の準備のもとに

$$K \leq 3$$

の証明をすることが出来る。

$$2 < z_0 \leq z < x = N^{1/(2+\varepsilon)} \quad (\varepsilon > 0)$$

とする。

Kuhn [9] の考察に従って  $z$  以下の条件をみたす素数  $p \leq N$  の個数を  $S(z_0, z; K)$  で表わす:

$N - p$  は  $q < z_0$ ,  $(q, N) = 1$  をみたすどんな素数  $q$  でもわりきれない;

$N - p$  は  $z_0 \leq q < z$ ,  $(q, N) = 1$  をみたす高々  $K$  個の素数  $q$  でわりきれぬ;

$N - p$  は  $z_0 \leq q < z$ ,  $(q, N) = 1$  をみたすどんな素数  $q$  に対しても  $q^2 < z$  はわれない。

そうすると、明らかに

$$S(z_0, z; r) \geq S_1(z_0) - \frac{1}{r+1} \sum_{\substack{z_0 \leq q < z \\ q+N}} S_q(z_0) + O\left(\frac{N}{z_0} + z\right)$$

$$z = z''$$

$$z_0 = x^{1/(3-2\varepsilon)}, \quad z = x^{2/(3-2\varepsilon)}$$

とおけば、充分小さい  $\varepsilon > 0$  の値に対しても

$$N^{1/6} < z_0 < N^{1/3} < z < x$$

である。

$r = 2$  とすれば、定理 5 および補題 10 により

$$S(z_0, z; 2) \geq \text{li } N \cdot P(z_0) (E_\varepsilon + o(1))$$

とえる。  $\varepsilon = 1$  に

$$E_\varepsilon = g(3-2\varepsilon) - \frac{1}{3} \int_{1-2\varepsilon}^{2-2\varepsilon} \frac{G(t)}{3-2\varepsilon-t} dt.$$

すなわち、

$$E_0 = \frac{2e^c \log 2}{9} > 0$$

は容易にわかる。  $E_\varepsilon$  は  $\varepsilon$  の函数として  $\varepsilon = 0$  において

右連続であるから、充分小さい  $\varepsilon > 0$  の値に対しても  $E_\varepsilon > E_0/2$

である。そのように  $\varepsilon$  の値を固定すれば,  $\nu(N) = O(\log N)$  であるから, 充分大きなすべての偶数  $N$  に対して

$$S(z_0, z; 2) > 1 + \nu(N)$$

となる。故に, そのような  $N$  に対しては

$$p \leq N, \quad p + N, \quad N - p > 1, \quad V(N - p) \leq 3$$

をみたす素数  $p$  が存在することとなる。

$$N = p + (N - p)$$

であるから, これで結論をえる。

## 文 献

- [1] E. Bombieri: On the large sieve. *Mathematika*, 12(1965), 201-225.
- [2] N. G. de Bruijn: On the number of uncanceled elements in the sieve of Eratosthenes. *Nederl. Akad. van Wetensch. Proc., Ser. A*, 52(1950), 803-812.
- [3] N. G. de Bruijn: On the number of positive integers  $\leq x$  and free of prime factors  $> y$ . *Nederl. Akad. van Wetensch. Proc., Ser. A*, 54(1951), 50-60.
- [4] N. G. de Bruijn: The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes. *Journ. Indian Math. Soc.*, 15(1951), 25-32.
- [5] N. G. de Bruijn and J. H. van Lint: Incomplete sums of multiplicative functions. I (and II) *Nederl. Akad. van Wetensch. Proc., Ser. A*, 67(1964), 339-347 (and 348-359).
- [6] J.-R. Chen: On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two

- primes. Kexue Tongbao, 17(1966), 385-386.
- [7] H. Halberstam, W. Jurkat et H.-E. Richert: Un nouveau résultat de la méthode du crible. C. R. Acad. Sci. Paris, 264(1967) 920-923.
- [8] W. B. Jurkat and H.-E. Richert: An improvement of Selberg's sieve method I Acta Arith., 11(1965), 217-240.
- [9] P. Kuhn: Neue Abschätzungen auf Grund der Viggo Brun'schen Siebmethode. Tolfte Skandinaviska Matematikerkongressen, Lund, 1953, 160-168.
- [10] J. H. van Lint und H.-E. Richert: Über die Summe  $\sum_{\substack{n \leq x \\ p(n) < y}} \frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}$ .  
Nederl. Akad. van Wetensch. Proc., Ser. A, 67(1964), 582-587.
- [11] S. Uchiyama: On the representation of large even integers as sums of a prime and an almost prime. II Proc. Japan Acad., 43(1967), 567-571.
- [12] A. A. Бухштаб: Новые результаты в исследовании проблемы Гольдбаха-Эйлера и проблемы простых чисел близнецов. Доклады акад. наук СССР, 162(1965), 735-738.
- [13] A. A. Бухштаб: Комбинаторное усиление метода Эратосфенова решета. Успехи матем. наук, 22(1967), 199-226.
- [14] A. И. Виноградов: О плотностной гипотезе для  $\mathcal{L}$ -рядов Дирихле. Изв. акад. наук СССР, Сер. мат., 29(1965), 903-934.
- [15] A. Реньи: О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа. Изв. акад. наук СССР, Сер. мат., 12 (1948), 57-78.
- (A. Rényi: On the representation of an even number as the sum of a prime and of an almost prime. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 19(1962), 299-321.)