数理解析研究所講究録
86巻 1970年 63-81

Montague の Hierarchy と順序数上の Recursive Function について

東教大 理　福山 克

§1. 序

最近の recursion theory では recursiveness やそれに関連した諸概念を自然数上の関数以外の対象(例えば自然数上の finite type の functional とか順序数上の関数)について定義し研究することが盛んである。そのような拡張の際 recursiveness を computability の面から捉える流れと both quantifier-forms による definability の面から捉える流れとが認められる。Kleene の finite type の functional の理論や Kripke による α-recursiveness の概念は前者の例である。後者の例としては Montague [1] が挙げられる。これはある種の higher-order structure に於ける definability を用い任意の集合上に recursiveness, recursive enumerability, hierarchy などの概念を導入する構想であり、特に自然数上でのこの recursiveness は普通の recursiveness と一致する

ことが示された。本稿ではЦの理論の一部を紹介し彼のrecursiveness を順序数上で考えたときそれがTakeuti-Tugué による recursiveness と V=L の下で一致することを示す。

Montague の hierarchy は，higher-order language におけるものであるが，binary predicate ∈ を持つ first-order language におけるいわゆる Lévy の hierarchy と類似する。Lévy の hierarchy と自然数上或いは順序数上の recursion theory との関連は既に Takahashi [2], [3] により研究されており，本稿への直接の stimulation となった。

§ 2. Montague の higher-order language と formula の分類

1. 諸記号　1.1) 各自然数 n について type n の individual variable $\aleph_0$ 個づつ：$v_{0,n}$, $v_{1,n}$ $v_{2,n}$, . . .

（二重添字の前の方をその variable の index という。1.2), 1.3) でも同様。）

1.2), 1.3) 自然数の空でない有限列 s について，

type s の predicate variable $\aleph_0$ 個づつ：$Q_{0,s}$, $Q_{1,s}$, . . .

type s の predicate constant $\aleph_0$ 個づつ：$P_{0,s}$, $P_{1,s}$, . . .

1.4) Epsilon predicate：$\in$

1.5) 論理記号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \bigwedge, \bigvee$

2 Formula　2.1) u, v が individual variable, type$(u)+1$ = type(v) ⇒ $u \in v$ は formula。

2·2) P は predicate variable または predicate constant $\mathrm{type}(P)=\langle k_0,\ldots,k_{n-1}\rangle$; $u_0,\ldots,u_{n-1}$ は individual variable $\mathrm{type}(u_i)=k_i$, $0\leqq i\leqq n-1$ $\Rightarrow$ $Pu_0\cdots u_{n-1}$ は (atomic) formula。

2·3) ~ 2·8) $\neg\phi_1$, $\phi_1\wedge\phi_2$, $\phi_1\vee\phi_2$, $\phi_1\rightarrow\phi_2$, $\bigwedge u\phi_1$, $\bigvee u\phi_1$ については普通の通り。Predicate variable は quantify されない。

3 Elementary formula 3·1) Atomic formula は elementary formula。

3·2) ϕ_1, ϕ_2 が elementary formula $\Rightarrow$ $\phi_1\wedge\phi_2$, $\phi_1\vee\phi_2$ も elementary formula。

3·3) ϕ は elementary formula ; u, v は individual variable, $\mathrm{type}(u)+1=\mathrm{type}(v)$ $\Rightarrow$ $\bigwedge u[u\in v\rightarrow\phi]$, $\bigvee u[u\in v\wedge\phi]$ も elementary formula。

4. Σ_n-formula $\Sigma_1=\{\bigvee v\phi \mid \phi$ は elementary formula$\}$

$\Sigma_{n+1}=\{\bigvee v\neg\phi \mid \phi\in\Sigma_n\}$ $(n\geqq 1)$

5. Σ-formula 5·1) Atomic formula は Σ-formula。

5·2) ϕ_1, ϕ_2 が Σ-formula $\Rightarrow$ $\phi_1\wedge\phi_2$, $\phi_1\vee\phi_2$ も Σ-formula。

5·3) ϕ は Σ-formula, u, v は individual variable, $\mathrm{type}(u)+1=\mathrm{type}(v)$ $\Rightarrow$ $\bigwedge u[u\in v\rightarrow\phi]$, $\bigvee u[u\in v\wedge\phi]$ も Σ-formula。

5·4) ϕ は Σ-formula, u は individual variable $\Rightarrow$ $\bigvee u\phi$ は Σ-formula。

§3 Montague の higher-order structure と relation の分類

6. 集合 A，濃度 α を与える。　$P_\alpha A = \{x \mid x \subseteq A \wedge \bar{\bar{x}} < \alpha\}$。

$V^{0,\alpha}A = A$，$V^{n+1,\alpha}A = P_\alpha(V^{n,\alpha}A)$。

自然数の有限列 $s = \langle k_0, \cdots, k_{n-1} \rangle$ に対して，

$V^{s,\alpha}A = P(V^{k_0,\alpha}A \times \cdots \times V^{k_{n-1},\alpha}A)$。

7. *Structure*　$\langle A, F, \alpha \rangle$ が structure $\Leftrightarrow$

7.1)　A は空でない集合。

7.2)　F は function。DF は predicate constant いくつかより成る。各 $P \in DF$ について，$F(P) \in V^{type(P),\alpha}A$。

7.3)　α は $\alpha \geqq 3$ なる濃度。

8. *Assignment*　σ が assignment connected with $\langle A, F, \alpha \rangle$ $\Leftrightarrow$ σ は function。$D\sigma$ =(individual variable の全体)$\cup$(predicate variable の全体)。各 $t \in D\sigma$ について，$\sigma(t) \in V^{type(t),\alpha}A$。

9. ϕ が interpretable in $\langle A, F, \alpha \rangle$ $\Leftrightarrow$ ϕ 中の predicate constant は全て DF に属する。

10. *Valuation*　$\mathfrak{A} = \langle A, F, \alpha \rangle$ に対し，$\mathfrak{A}$ に於ける valuation V を定義する。V は assignment σ connected with $\mathfrak{A}$, ϕ interpretable in $\mathfrak{A}$ に対して，$V(\sigma, \phi) \in \{0, 1\}$ なる値を与える。

10.1)　$\phi = u \in v$ のとき，　$V(\sigma, \phi) = 1 \Leftrightarrow \sigma(u) \in \sigma(v)$

10.2)　$\phi = Pu_0 \cdots u_{n-1}$ のとき，　$V(\sigma, \phi) = 1 \Leftrightarrow \langle \sigma(u_0), \cdots, \sigma(u_{n-1}) \rangle \in F(P)$

10.3)　$\phi = Qu_0 \cdots u_{n-1}$ のとき，　$V(\sigma, \phi) = 1 \Leftrightarrow \langle \sigma(u_0), \cdots, \sigma(u_{n-1}) \rangle \in \sigma(Q)$

10.4) ～ 10.7)　$\neg\phi_1$, $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi_1 \rightarrow \phi_2$, については普通の通り。

10.8) $\phi = \bigwedge u \phi_1$ のとき，$v(\sigma, \phi) = 1 \Leftrightarrow t \neq u$ のとき $\sigma_1(t) = \sigma(t)$ となる任意の σ_1 について $v(\sigma_1, \phi_1) = 1$

10.9) $\phi = \bigvee u \phi_1$ のとき，$v(\sigma, \phi) = 1 \Leftrightarrow t \neq u$ のとき $\sigma_1(t) = \sigma(t)$ となるある σ_1 について $v(\sigma_1, \phi_1) = 1$

11. Relational type, typed relation, etc.

11.1) 自然数または自然数の空でない有限列より成る，空でない有限列を relational type と言う。

11.2) $\mathfrak{A} = \langle A, F, \alpha \rangle$ を与える。$\langle\langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle, X \rangle$ が (typed) relation connected with $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle$ は relational type。$X \subseteq v^{s_0, \alpha} A \times \cdots \times v^{s_{n-1}, \alpha} A$。

Typed relation $R = \langle\langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle, X \rangle$ に対して，$\langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle$ ($= type(R)$) を R の type と言い，X ($= R^*$) を R の extension と言う。

$R^{\mathfrak{A}} =$ (typed relation connected with $\mathfrak{A}$ の全体.)

11.3) $R = \langle\langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle, X \rangle \in R^{\mathfrak{A}}$ に対し，$\overline{R} = \langle\langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle, v^{s_0, \alpha} A \times \cdots \times v^{s_{n-1}, \alpha} A - X \rangle$。

12. Definability　$\mathfrak{A} = \langle A, F, \alpha \rangle$, $R \in R^{\mathfrak{A}}$, ϕ を与える。$type(R) = \langle s_0, \ldots, s_{n-1} \rangle$ とする。　ϕ defines R in $\mathfrak{A} \Leftrightarrow$

12.1) variable の列 $t_0, \ldots, t_{n-1}$ があり，$type(t_i) = s_i$, $0 \leq i \leq n-1$; 各 t_i の index を l_i とするとき $l_0 < l_1 < \cdots < l_{n-1}$。$\phi$ は $t_0, \ldots, t_{n-1}$ 以外の free variable を含まない。

12.2) ϕ は interpretable in $\mathfrak{A}$。

12·3) v を $\mathfrak{A}$ に於ける valuation とするとき，任意の $\langle f_0,\cdots,f_{n-1}\rangle \in v^{s_0,\mathfrak{a}}A\times\cdots\times v^{s_{n-1},\mathfrak{a}}A$ について，

$\langle f_0,\cdots,f_{n-1}\rangle\in R^*$ ⇔ σ が assignment connected with $\mathfrak{A}$ で，$\sigma(t_i)=f_i$, $0\leqq i\leqq n-1$ であるとき，$v(\sigma,\phi)=1$。

13　Relative definability　$\mathfrak{A}=\langle A,F,\mathfrak{a}\rangle$, $R\in R^{\mathfrak{a}}$, ϕ, $K\subseteq R^{\mathfrak{a}}$ を与える。ϕ defines R in $\mathfrak{A}$ in terms of members of K ⇔

13·1)　Function G があり，DG は predicate constant いくつかより成り，$DG\wedge DF=\Lambda$。さらに各 $P\in DG$ について，$\langle$type$(P), G(P)\rangle\in K$。

13·2)　ϕ defines R in $\langle A, F\cup G, \mathfrak{a}\rangle$。

14.　$\mathfrak{A}$，formula より成る集合 Γ，$K\subseteq R^{\mathfrak{a}}$ に対して，

$\Gamma^{\mathfrak{a}}(K)=\{R\mid R\in R^{\mathfrak{a}}\wedge\exists\phi(\phi\in\Gamma\wedge\phi$ defines R in $\mathfrak{A}$ in terms of members of $K)\}$。

以下で特に　$\Sigma_n^{\mathfrak{a}}(K)$　　$(n\geqq 1)$

$\Pi_n^{\mathfrak{a}}(K)=\{R\mid\bar{R}\in\Sigma_n^{\mathfrak{a}}(K)\}$　　$(n\geqq 1)$

$\Delta_n^{\mathfrak{a}}(K)=\Sigma_n^{\mathfrak{a}}(K)\wedge\Pi_n^{\mathfrak{a}}(K)$　　$(n\geqq 1)$　を扱う。

15　任意の $\mathfrak{A}$ について，次の補助的諸概念を導入する。

$\mathfrak{A}=\langle A,F,\mathfrak{a}\rangle$；$v_n=v^{n,\mathfrak{a}}A$，$n=0,1,2,\cdots$；$a,b,\cdots\in\bigcup\{v_n\mid n<\omega\}$ とする。23 に於いても同様。

15·1)　$\{a\}_0=a$，$\{a\}_{n+1}=\{\{a\}_n\}$。

15·2)　$\langle a,b\rangle_{n,k}=\{\{a\}_{k+1},\{\{a\}_k,\{b\}_n\}\}$。

15·3) $\langle\!\langle a_0 \rangle\!\rangle = a_0$, $\langle\!\langle a_0, \ldots, a_n \rangle\!\rangle = \langle \langle\!\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle\!\rangle, a_n \rangle_{2(n-1),0}$

15·4) $h \subseteq \mathfrak{V}_0^n$ に対し, $\underline{h} = \{ \langle\!\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle\!\rangle \mid \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in h \}$

15·5) $PF_n = \{ f \mid f \in P\mathfrak{V}_0^{n+1} \wedge f$ は $\mathfrak{V}_0^n \longrightarrow \mathfrak{V}_0$ なる partial function$\}$

$PF_n^* = \{ f \mid f \in PF_n \wedge \overline{\overline{f}} < \Omega \}$

$TF_n = \{ f \mid f \in PF_n \wedge f$ は total (ie $Df = \mathfrak{V}_0^n$)$\}$

15·6) $f : TF_{\ell_0} \times \cdots \times TF_{\ell_{m-1}} \times \mathfrak{V}_0^n \longrightarrow \mathfrak{V}_0$ なる function f について

$f^\Delta = \{ \langle h_0, \ldots, h_{m-1}, a_0, \ldots, a_{n-1}, b \rangle \mid h_i \in PF_{\ell_i}^*, 0 \leq i \leq m-1,$

$\langle h_0^c, \ldots, h_{m-1}^c, a_0, \ldots, a_{n-1}, b \rangle \in f \}$

ここで h^c は h の completion ie $h \in PF_\ell^*$ のとき, $h^c =$

$h \cup \{ \langle c_0, \ldots, c_{\ell-1}, 0 \rangle \mid \langle c_0, \ldots, c_{\ell-1} \rangle \in \mathfrak{V}_0^\ell - Dh \}$ $(\in TF_\ell)$ 。

$f^\circ = \{ \langle \underline{h_0}, \ldots, \underline{h_{m-1}}, a_0, \ldots, a_{n-1}, b \rangle \mid \langle h_0, \ldots, h_{m-1}, a_0, \ldots, a_{n-1}, b \rangle \in f^\Delta \}$

§4 Peano structure と自然数上の recursiveness

16 Peano structure $\mathfrak{P}$ を次の様に定める。

$\mathfrak{P} = \langle N, F_1, \aleph_0 \rangle$。 ここで, N = 自然数全体の集合 。

$DF_1 = \{ P_{0,\langle 0 \rangle}, P_{0,\langle 0,0 \rangle} \}$。 ($P_{0,\langle 0 \rangle} = Z$, $P_{0,\langle 0,0 \rangle} = S$ と略す。)

$F_1(Z) = \{0\}$, $F_1(S) = \{ \langle a, a+1 \rangle \mid a \in N \}$。

17 THEOREM ($\mathfrak{V}^{n,\aleph_0}N = \mathfrak{V}_n$ と略す。)

17·1) $f : \overbrace{TF_1 \times \cdots \times TF_1}^{m} \times \mathfrak{V}_0^n \longrightarrow \mathfrak{V}_0$ なる partial function f について, f が partial recursive $\Leftrightarrow$

$type(R) = \langle\!\langle \overbrace{\langle 0,0 \rangle, \ldots, \langle 0,0 \rangle}^{m}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n}, 0 \rangle$, $R \in \Sigma_1^{\mathfrak{P}} N$ なる R が存在し,

$f = (\overbrace{TF_1 \times \cdots \times TF_1}^{m} \times \mathfrak{V}_0^{n+1}) \cap R^*$ 。

17.2) $f: U_0^n \to U_0$ なる function f について、

f が partial recursive $\Leftrightarrow$ $\langle\langle \overbrace{0, \ldots, 0}^{n+1} \rangle, f\rangle \in \Sigma_1^{?}(\mathfrak{A})$。

17.3) $X \subseteq U_0^n$ であるとき、

X が recursive $\Leftrightarrow$ $\langle\langle \overbrace{0, \ldots, 0}^{n} \rangle, X\rangle \in \Delta_1^{?}(\mathfrak{A})$。

17.4) $X \subseteq U_0^n$, $k \geqq 1$ であるとき、

X が Σ_k^0 $\Leftrightarrow$ $\langle\langle \overbrace{0, \ldots, 0}^{n} \rangle, X\rangle \in \Sigma_k(\mathfrak{A})$。

Π, Δ についても同様。

17 は [1] の結果である。本稿の以下の部分で、$V=L$ を仮定すればこれらがそのまま、順序数上での Takeuti-Tugué の recursiveness について成立することを示す。

§5. Structure $\mathfrak{F}$ と順序数上の recursiveness

18 順序数上で $\mathfrak{A}$ に相当するものとして structure $\mathfrak{F}$ を考える。Regular initial ordinal ω_r に対応する $\mathfrak{F}$ は次の様に定義される。 $\mathfrak{F} = \langle W(\omega_r), F_2, \aleph_r\rangle$。 ここで、

$W(\omega_r) = \omega_r$ より小さい順序数の全体。

$DF_2 = \{P_{1,\langle 0,0\rangle}, P_{0,\langle 1,0\rangle}\}$。 ($P_{1,\langle 0,0\rangle} = I$, $P_{0,\langle 1,0\rangle} = U$ と略す。)

$F_2(I) = \{\langle a, a\rangle \mid a \in W(\omega_r)\}$。

$F_2(U) = \{\langle X, a\rangle \mid X \subseteq W(\omega_r)、\bar{\bar{X}} < \aleph_r、a = \sup X\}$。 ($\sup X = X$ 中の順序数いずれよりも真に大きい最小の順序数。)

19 $r=0$ のときの $\mathfrak{F}$ と、$\mathfrak{A}$ とは次の意味で同等である。

THEOREM

$r=0$ のとき，任意の $K\subseteq \mathfrak{R}^{\mathfrak{P}}(=\mathfrak{R}^{\mathfrak{F}})$ について，

$\Sigma^{\mathfrak{P}}_n(K)=\Sigma^{\mathfrak{F}}_n(K)\quad n\geqq 1$ 。 Π, Δ についても同様。

従って，[1] Theorem 10 により，$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{F}$ で definable な relation 全体も一致する。

20. THEOREM （$\mathfrak{N}^{n,r}\mathfrak{N}(\omega_r)=\mathfrak{N}_n$ と略す。）

20.1) $f: TF_{l_0}\times\cdots\times TF_{l_{m-1}}\times\mathfrak{N}_0^n\to\mathfrak{N}_0$ なる partial function f について，f が partial recursive $\Leftrightarrow$

$type(R)=\langle\langle\overbrace{0,\ldots,0}^{l_0+1}\rangle,\ldots,\langle\overbrace{0,\ldots,0}^{l_{m-1}+1}\rangle,\overbrace{0,\ldots,0}^{n},0\rangle$, $R\in\Sigma^{\mathfrak{F}}_1(N)$ なる

R が存在し，$f=(TF_{l_0}\times\cdots\times TF_{l_{m-1}}\times\mathfrak{N}_0^{n+1})\cap R^*$ 。

20.2) $f:\mathfrak{N}_0^n\longrightarrow\mathfrak{N}_0$ なる function f について，

f が partial recursive $\Leftrightarrow\langle\langle\overbrace{0,\ldots,0}^{n+1}\rangle, f\rangle\in\Sigma^{\mathfrak{F}}_1(N)$。

20.3) $X\subseteq\mathfrak{N}_0^n$ であるとき，

X が recursive $\Leftrightarrow\langle\langle\overbrace{0,\ldots,0}^{n}\rangle, X\rangle\in\Delta^{\mathfrak{F}}_1(N)$

20.4) $X\subseteq\mathfrak{N}_0^n$, $k\geqq 1$ であるとき，

X が Σ^{ord}_k （Σ^0_k; $r=0$ のとき）$\Leftrightarrow\langle\langle\overbrace{0,\ldots,0}^{n}\rangle, X\rangle\in\Sigma^{\mathfrak{F}}_k(N)$。

Π, Δ についても同様。

20.1)～20.3) において，'partial recursive'，'recursive' は $r=0$ のときは普通の意味，$r>0$ のときは Takeuti-Tugué の意味とする。但し後者において，function variable は total function のみを値にとるとする。

§6 いくつかの lemma

次の lemma は §9 ~ §11 に於ける Σ_1-definability の証明に用いられる。

21 LEMMA　ϕ が Σ-formula ⇒ Σ_1-formula ψ があって，

21.1)　ϕ, ψ の predicate constant, free variable は一致する。

21.2)　ϕ, ψ が $\mathfrak{A}$ で interpretable のとき，$\mathfrak{A}$ での valuation を V とすると，任意の assignment σ connected with $\mathfrak{A}$ について，$V(\sigma, \phi) = V(\sigma, \psi)$。

22 LEMMA　任意の $K \subseteq R^{\Omega}$ について，$\Sigma_1^{\Omega}(\Sigma_1^{\Omega}(K)) = \Sigma_1^{\Omega}(K)$。

23 LEMMA　$I_0, \bar{I}_0 \in \Sigma_1^{\Omega}(\Lambda)$ ⇒ 以下の relation (extension のみを示す) は Σ_1-definable (に $\Sigma_1^{\Omega}(\Lambda)$ に属す)。

$I_n : \{\langle a, a \rangle \mid a \in V_n\}$;　$E_n : \{\langle a, b \rangle \mid b \in V_{n+1}, a \in b\}$;　$\bar{I}_n$; $\bar{E}_n$;

$1_{n,k} : \{\langle a, b \rangle \mid b \in V_n, a = \langle b, c \rangle_{n,k}$ for some $c \in V_k\}$;　$2_{n,k}$

$H_n : \{a \mid a = \underline{h}$ for some $h \subseteq V_0^n, \bar{h} < \Omega\}$

$Fnc_n : \{a \mid a = \underline{h}$ for some $h \in PF_n^*\}$

24 LEMMA　$\mathfrak{F}$ に於いて，以下の relation (extension のみを示す) は Σ_1-definable。

I_0 ; $\bar{I}_0$;　$Sup : \{\langle a, b \rangle \mid a \subseteq W(\omega_r), \bar{\bar{a}} < \aleph_r, b = \sup a\}$

$I_q : \{\langle a, b \rangle \mid a < b < \omega_r\}$　;　$Seg : \{\langle a, b \rangle \mid b < \omega_r, a = W(b)\}$

$\{e\}$ for $e < \omega$。

§7　Type の reduction

本稿の以下の部分では $\mathfrak{F}$ を fix し，$V^{n, \aleph_r} W(\omega_r) = V_n$ と略す。

25　GCHを仮定すればω_rがregularなるとき，

$Card(\{x \mid x \subseteq W(\omega_r), \overline{\overline{x}} < \aleph_r\}) = \aleph_r$，即ち，$\overline{\overline{U_1}} = \aleph_r$であるから$U_1$から$U_0$への injection が存在する。ここではこの injection で‘素性がかなりはっきりしているもの’を具体的に構成する必要があるので$V=L$を仮定する。直接にはTugué [4]による次の事実を利用する。

$u, \dagger, j, S, S^*$ etc は[4]で定義されたものとする。$k(a,c) = u(a \dagger j(0,c,0))$とおけば，

$S^*(a;h,b) \leftrightarrow S(a,b) \wedge (x)_{x<b}(h(x)=k(a,x))$

$S(a;h,b) \leftrightarrow S^*(a;h,b) \wedge (x)_{x<a} \neg S^*(x;h,b)$　である。このとき，$V=L$の下で次のことが成立する。

任意に与えられた$b<\omega_r$，$h: W(b) \to W(\omega_r)$に対して，$a<\omega_r$かつ$S(a;h,b)$となるaが唯一つ存在する。

26　26・1)　先ず$F: U_1 \to U_0$を次の様に定義する。

$X \in U_1$とすると，$\overline{\overline{X}} < \omega_r$。従って，$b(=\overline{\overline{X}}) < \omega_r$，$h: W(b) \to X$で，$h$は bijection，$(b_1)(b_2)(b_1, b_2 < b \wedge b_1 < b_2 \to h(b_1) < h(b_2))$となるものがそれぞれ唯一つ存在する。さらにこの$b$, hに対して，$a<\omega_r$ $S(a;h,b)$となるaが唯一つ存在する。そこで$F(X)=j(a,b)$とする。

次に，$F_n: U_n \to U_0$，$n=0,1,2,\cdots$を

$F_0 = U_0$上の identity function

$F_{n+1}(X) = F(\{F_n(a) \mid a \in X\})$ for $X \in U_{n+1}$　と定める。このとき

26.2) $X \in \mathfrak{V}_1 \Rightarrow X = \{k(g_0(F(X)), x) \mid x < g_1(F(X))\}$。

26.3) $F_1 = F$

26.4) F_n は injection。

26.5) $\mathrm{d}F_n$ は primitive recursive。

(∵ $c \in \mathrm{d}F_1 \leftrightarrow$

$S(g_0(c), g_1(c)) \wedge (b_1)(b_2)(b_1, b_2 < g_1(c) \rightarrow . \, b_1 < b_2 \rightarrow k(g_0(c), b_1) < k(g_0(c), b_2))$

$\wedge (y)(y < g_0(c) \rightarrow . \, \neg S(y, g_1(c)) \vee \exists x(x < g_1(c) \wedge k(g_0(c), x) \neq k(y, x)))$。

$c \in \mathrm{d}F_{n+1} \leftrightarrow (b)(b < g_1(c) \rightarrow k(g_0(c), b) \in \mathrm{d}F_n) \wedge c \in \mathrm{d}F_n$ 。

27 $R \in R^{F}$ で $type(R)$ が自然数のみより成るとき，${}^{r}R$ を次の様に定める。 $type(R) = \langle k_0, \ldots, k_{n-1} \rangle$ とおく。

$type({}^{r}R) = \langle \overbrace{0, \ldots, 0}^{n} \rangle$

$({}^{r}R)^* = \{\langle F_{k_0}(a_0), \ldots, F_{k_{n-1}}(a_{n-1}) \rangle \mid \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in R^*\}$

§8 20. の証明の概略

$r = 0$ の場合は，17，19 より直ちに出る。以下では $r > 0$ とする。また 20.2) 以下は 20.1) より容易に導かれるので 20.1) の証明に専念する。

28 28.1) $f : TF_{l_0} \times \cdots \times TF_{l_{m-1}} \times \mathfrak{V}_0^n \longrightarrow \mathfrak{V}_0$ が primitive recursive $\Rightarrow \langle\langle 2l_0+1, \ldots, 2l_{m-1}+1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n}, 0 \rangle, f^\circ \rangle \in \Sigma_1(\Lambda)$。

28.2) $f : \mathfrak{V}_0^n \longrightarrow \mathfrak{V}_0$ が primitive recursive $\Rightarrow \langle\langle \overbrace{0, \ldots, 0}^{n+1} \rangle, f \rangle \in \Delta(\Lambda)$。

28.3) $X \subseteq \mathfrak{V}_0^n$ が primitive recursive $\Rightarrow \langle\langle 0, \ldots, 0 \rangle, X \rangle \in \Delta(\Lambda)$。

28.1) は [4] の schema に従い induction で証明する (§9)。28.2) の $\Sigma_1(\Lambda)$ の方は 28.1) の特別な場合であり, $\Pi_1(\Lambda)$ の方はそれから, f が total であることを用いれば容易に得られる。28.3) は 28.2) より明らか。28.3) と [4] の normal form theorem から 20.1) の '$\Rightarrow$' が出る (§10)。

29 29.1) $R \in R^{\mathcal{F}}$, $type(R)$ は自然数のみより成るとき,

$R \in \Sigma_1(\Lambda) \Rightarrow (\ulcorner R)^*$ は Σ_1^{ord}。

29.2) $R \in R^{\mathcal{F}}$, $type(R) = \langle s_0, \ldots, s_{m-1}, k_0, \ldots, k_{n-1} \rangle$。ここで各 s_i は自然数の有限列, 各 k_j は自然数とする。このとき $R \in \Sigma_1(\Lambda)$ ならば $\langle g_0, \ldots, g_{m-1}, a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in R^*$

$\Rightarrow \exists p_0 \cdots \exists p_{m-1} (p_i \leq g_i, \overline{\overline{p_i}} < \aleph_r, 0 \leq i \leq m-1, \langle p_0, \ldots, p_{m-1}, a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in R^*)$。

29.3) $R \in R^{\mathcal{F}}$, $type(R) = \langle s_0, \ldots, s_{m-1}, k_0, \ldots, k_{n-1} \rangle$。ここで各 s_i は t_i 個の 0 より成る。各 k_j は自然数とする。このとき R° を

$type(R) = \langle 2t_0 - 1, \ldots, 2t_{m-1} - 1, k_0, \ldots, k_{n-1} \rangle$

$(R^\circ)^* = \{ \langle \underline{h}_0, \ldots, \underline{h}_{m-1}, a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \mid \overline{\overline{h_i}} < \aleph_r, 0 \leq i \leq m-1,$

$\langle h_0, \ldots, h_{m-1}, a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in R^* \}$ と定めると

$R \in \Sigma_1(\Lambda) \Rightarrow R^\circ \in \Sigma_1(\Lambda)$。

29.1) ~ 29.3) は R を定義する Σ-formula の構成に関する induction で証明する (§11)。20.1) の '$\Leftarrow$' は 29 を用い §12 で証明する。

§9 28.1) の証明

[4]の schemata のうち (VI) と (XIII′) 以外については容易である。(VI) 即ち $j(a,b)$ についてはこれが $j(a,b)=\sup\{j(c,d)\mid \langle c,d\rangle \prec \langle a,b\rangle\}$
(ここで $\langle c,d\rangle \prec \langle a,b\rangle \Leftrightarrow \max(c,d)<\max(a,b)$
$\vee(\max(c,d)=\max(a,b)\wedge(d<b\vee(d=b\wedge c<a)))$)
という recursion で定義されることに注意すれば recursion の schema (XIII′) の場合とほぼ同様に証明される。以下で (XIII′) の $l=n=1$, h が unary の場合の証明を述べる。

$f(h,a,b)=g(\lambda z f^{a}(h,z,b),h,a,b)$, g については 28·1) を仮定。

30. $f^{\Delta}(h,a,b)=g^{\Delta}(\{\langle c,d\rangle \mid \langle h,c,b,d\rangle\in f^{\Delta}\wedge c<a\},h,a,b)$

31. $\langle h,b,l\rangle\in A \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} h,l\in PF_1^{*}\wedge(a)(a_1)(\exists d(\langle a,d\rangle\in l)\wedge a_1<a\to\exists d(\langle a_1,d\rangle\in l))$
$\wedge(a)(d)(\langle a,d\rangle\in l\to\langle\{\langle p,q\rangle\mid\langle p,q\rangle\in l\wedge p<a\},h,a,b,d\rangle\in g^{\Delta})$

$B\overset{\mathrm{df}}{=}\{\langle \underline{h},b,\underline{l}\rangle\mid\langle h,b,l\rangle\in A\}$ とすると,

31·1) $\langle p,b,q\rangle\in B \Leftrightarrow p,q\in Fnc_1\wedge(r)(r\in q\to(c_1)(c_1<1(r)\to\exists r_1(r_1\in q\wedge 1(r_1)=c_1))$
$\wedge(r)(r\in q\to\exists s((r_1)(r_1\in s\to r_1\in q\wedge 1(r_1)<1(r))\wedge(r_1)(r_1\in q\to 1(r_1)\geq 1(r)\vee r\in s)$
$\wedge\langle s,p,1(r),b,2(r)\rangle\in g^{\circ}))$

ここで, $r=\langle\!\langle a,b\rangle\!\rangle=\langle a,b\rangle_{0,0}$ $(a,b\in\bar{V}_0)$ に対して. $1(r)=a$, $2(r)=b$ 。

31·2) $\langle\!\langle 3,0,3\rangle, B\rangle\in\Sigma_1(\Lambda)$ 。

(∵ 31·1) の右辺の '<' で bound された quantifier (〰 の部分) は $(c_1)(c_1\in\overline{W}(1(r))\to\cdots)$ と書きなおす。仮定より, $\langle\!\langle 3,3,0,0,0\rangle, g^{\circ}\rangle$ を定義する Σ_1-formula が存在する。これと (22), 23, 24 を用い, 31·1) の右辺は $\langle\!\langle 3,0,3\rangle, B\rangle$ を定義する Σ-formula に翻

証される。)

31·3) $\langle h,a,b,d\rangle \in f^{\Delta} \Leftrightarrow \exists e(\langle a,d\rangle \in e \wedge \langle h,b,e\rangle \in A)$

(∵ 次の順に証明する。

31·3·1) $\langle h,b,e_1\rangle, \langle h,b,e_2\rangle \in A,\ \langle a,c_1\rangle \in e_1,\ \langle a,c_2\rangle \in e_2 \Rightarrow c_1 = c_2$

31·3·2) $\langle h,b,c\rangle \in PF_1^{*} \times \mho_0^{2} \Rightarrow \exists d, \exists e,\ \langle c,d\rangle \in e,\ \langle h,b,e\rangle \in A$

ここで ω_r の regularity が用いられる。

31·3·3) $f^{\Delta\Delta} \overset{df}{=} \{\langle h,a,b,d\rangle \mid \exists e(\langle a,d\rangle \in e \wedge \langle h,b,e\rangle \in A)\}$ とすると

$f^{\Delta\Delta}$ は, $f^{\Delta\Delta}: PF_1^{*} \times \mho_0^{2} \to \mho_0$ なる function で

$\langle h,a,b,d\rangle \in f^{\Delta\Delta} \Leftrightarrow \langle \{\langle c,d\rangle \mid \langle h,c,b,d\rangle \in f^{\Delta\Delta} \wedge c < a\}, h,a,b,d\rangle \in f^{\Delta\Delta}$

31·3·4) $f^{\Delta} = f^{\Delta\Delta}$)

31·4) $\langle p,a,b,d\rangle \in f^{\circ} \Leftrightarrow \exists g \exists t(t \in g \wedge 1(t) = a \wedge 2(t) = d \wedge \langle p,b,g\rangle \in B)$

32 $\langle\langle 3,0,0,0\rangle, f^{\circ}\rangle \in \Sigma_1(\Lambda)$

§10 20·1) '⇒' の証明

20·1) '⇒' を証明するが簡単の為 $m = n = l = 1$ とする。

33 $\sigma_1(h,y) \overset{df}{=} \mu w S(w,h,y)$ とすると

33·1) $\langle h,y,z\rangle \in \sigma_1 \Leftrightarrow S(z,y) \wedge (x)(x<y \to \exists w(h(x)=w \wedge k(z,x)=w))$

$\wedge (u)(u<z \to . \neg S(u,y) \vee \exists x(x<y \wedge \exists w(h(x)=w \wedge k(u,x) \neq w)))$ for $^{\forall}\langle h,y,z\rangle \in TF_1 \times \mho_0^{2}$

33·2) $R_1 \in \Sigma_1(\Lambda)$ があり, $type(R_1) = \langle\langle 0,0\rangle,0,0\rangle$

$\sigma_1 = (TF_1 \times \mho_0^{2}) \wedge R_1^{*}$

(∵ 33·1) の右辺で S, k は primitive recursive ゆえ $S, \neg S$ etc を定義する Σ_1-formula が存在する。それらを用い 33·1) の右辺を Σ

-formula θ_1 に翻訳する。 $h(x)=w$ の部分は type $\langle 0,0\rangle$ の predicate variable Q を用い Qxw とする。 θ_1 が定義する relation を R_1 とすればよい。)

34　$f: TF_1 \times V_0 \to V_0$ が partial recursive とすると $e \in \omega$ が存在し $f(h,x) \simeq V(\mu z\, T_1(\sigma_1(h,z), e, x, z))$　　即ち，

$\langle h,x,y\rangle \in f \Leftrightarrow \exists z_0 \exists z_1 \exists z_2 (\langle h, z_0, z_1\rangle \in \sigma_1 \wedge z_2 = e \wedge T_1(z_1, z_2, x, z_0) \wedge V(z_0)=y)$

この右辺を θ_1 および σ_1, T_1, V を定義する Σ_1-formula を用い, Σ-formula θ に翻訳する。 θ が定義する relation を R とすれば

$type(R) = \langle\langle 0,0\rangle, 0, 0\rangle$,　$R \in \Sigma_1 \omega$,　$f = (TF_1 \times V_0^2) \wedge R^*$　。

§11　29 の証明

35　29.1) の証明。 R を定義する Σ-formula を $\phi[u_0, \ldots, u_{n-1}]$ とする。　35.2)　$\phi = Vu_{i_1}u_{i_2}$ のとき：　$\langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle \in (rR)^* \Leftrightarrow$

$b_i \in CF_{k_i}$, $0 \leqq i \leqq n-1 \wedge \langle b_{i_1}, b_{i_2}\rangle \in (r\,Sup)^*$ 。　　そして，

$\langle a,b\rangle \in (r\,Sup)^* \Leftrightarrow a \in CF \wedge (x)(x < g_1(a) \to k(g_0(a), x) < b)$

$\wedge (y)(y < b \to \exists x (x < g_1(a) \wedge y \leqq k(g_0(a), x))$ 。

35.5)　$\phi = \wedge w (w \in u_i \to \phi_1)$　のとき：　ϕ_1 が定義する relation を R_1 とすると　$\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in R^* \Leftrightarrow (a)(a \in a_i \to \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in R_1^*)$。　従って

$\langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle \in (rR)^* \Leftrightarrow b_i \in CF_{k_i}$, $0 \leqq i \leqq n-1$

$\wedge (c)(c < g_1(b_i) \to \langle b_0, \ldots, b_{n-1}, k(g_0(b_i), c)\rangle \in (rR_1)^*)$ 。

36.　29.2) の証明。 $m=1$ の場合を述べる。 R を定義する Σ-formula を $\phi[Q, u_0, \ldots, u_{n-1}]$ とする。

36.6) $\phi = \bigwedge w(w \in u_i \to \phi_1)$ のとき： ϕ_1 が定義する relation を R_1 とする。 $\langle g, a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in R^* \leftrightarrow (a)(a \in a_i \to \langle g, a_0, \ldots, a_{n-1}, a \rangle \in R_1^*)$

$\leftrightarrow (a)(a \in a_i \to \exists g_1(g_1 \subseteq g \wedge \overline{\overline{g_1}} < \aleph_r \wedge \langle g_1, a_0, \ldots, a_{n-1}, a \rangle \in R_1^*))$

$\overset{*}{\leftrightarrow} \exists g_1(g_1 \subseteq g \wedge \overline{\overline{g_1}} < \aleph_r \wedge (a)(a \in a_i \to \langle g_1, a_0, \ldots, a_{n-1}, a \rangle \in R_1^*))$

$\leftrightarrow \exists g_1(g_1 \subseteq g \wedge \overline{\overline{g_1}} < \aleph_r \wedge \langle g_1, a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in R^*)$

$*$ の $\Rightarrow$： 各 $a \in a_i$ について $g_a \subseteq g$, $\overline{\overline{g_a}} < \aleph_r$, $\langle g_a, a_0, \ldots, a_{n-1}, a \rangle \in R_1^*$ なる g_a が存在する。 $g_1 = \bigcup\{g_a \mid a \in a_i\}$ とすると $g_1 \subseteq g$, $\overline{\overline{g_1}} < \aleph_r$ ($\because$ ω_r は regular)。そして, $g_a \subseteq g_1$ より $\langle g_1, a_0, \ldots, a_{n-1}, a \rangle \in R_1^*$。

37　29.3) の証明. $m=1$ の場合を述べる。 R を定義する Σ-formula を $\phi[\zeta, u_0, \ldots, u_{n-1}]$ とする。

37.6) $\phi = \bigwedge w(w \in u_i \to \phi_1)$ のとき： ϕ_1 が定義する relation を R_1 とする。 $\langle b, a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in R^{\circ *} \leftrightarrow \exists h(b = \underline{h} \wedge \overline{\overline{h}} < \aleph_r \wedge \langle h, a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in R^*)$

$\leftrightarrow \exists h(b = \underline{h} \wedge \overline{\overline{h}} < \aleph_r \wedge (a)(a \in a_i \to \langle h, a_0, \ldots, a_{n-1}, a \rangle \in R_1^*))$

$\leftrightarrow b \in H_{t_0}^* \wedge (a)(a \in a_i \to \exists h(b = \underline{h} \wedge \overline{\overline{h}} < \aleph_r \wedge \langle h, a_0, \ldots, a_{n-1}, a \rangle \in R_1^*))$

$\leftrightarrow b \in H_{t_0}^* \wedge (a)(a \in a_i \to \langle b, a_0, \ldots, a_{n-1}, a \rangle \in R_1^{\circ *})$

§12　20.1) '$\Leftarrow$' の証明

38　38.1) $F(\{a, b\})$ は recursive

$\because$　$P(x, a, b) \leftrightarrow (Eq(a, b) = 0 \wedge S(x, 1) \wedge k(x, 0) = a)$

$\vee (Eq(a, b) = 1 \wedge S(x, 2) \wedge k(x, 0) = \min(a, b) \wedge k(x, 1) = \max(a, b))$

$l(a, b) \simeq \mu x P(x, a, b)$　とすると $l(a, b)$ は recursive

そして,　$F(\{a, b\}) = j(l(a, b), Eq(a, b) + 1)$　。

38.2) $F_2(\langle\!\langle a, b\rangle\!\rangle)$ は recursive

38.3) $D(h, c) \overset{\mathrm{df}}{\leftrightarrow} (d)(d < g_0(c) \to \exists d_1 \exists d_2 (h(d_1) = d_2 \wedge F_2(\langle\!\langle d_1, d_2\rangle\!\rangle) = k(g_1(c), d))) \wedge c \in U_F$

とすると　D は Σ_1^{ord}　かつ

$D(h, c) \leftrightarrow \exists p (p \subseteq h \wedge \overline{p} < \aleph_r \wedge c = F_3(p))$　for $\forall h \in TF_1$, $\forall c \in U_0$

39　$f : TF_1 \times U_0 \to U_0$　なる partial function に対して，

$type(R) = \langle\langle 0, 0\rangle, 0, 0\rangle$，$R \in \Sigma_1(N$　なる R が存在し，$f = (TF_1 \times U_0^2) \wedge R^*$

とする。任意の $h \in TF_1$，$a, b \in U_0$ について，

$\langle h, a, b\rangle \in f \Leftrightarrow \langle h, a, b\rangle \in R^* \Leftrightarrow \exists h_1 (h_1 \subseteq h \wedge \overline{h_1} < \aleph_r \wedge \langle h_1, a, b\rangle \in R^*)$

$\Leftrightarrow \exists c (D(h, c) \wedge \langle c, a, b\rangle \in (rR^\circ)^*)$

最後の式は Σ_1^{ord} ゆえ recursive predicate $S(h, a, b, c)$ があり

$\langle h, a, b\rangle \in f \Leftrightarrow \exists c S(h, a, b, c)$　for $\forall h \in TF_1$, $a, b \in U_0$，即ち，

$f(h, a) \simeq g_0(\mu c S(h, a, g_0(c), g_1(c)))$　//　。

参考文献

[1] R. Montague　Recursion Theory as a Branch of Model Theory, Logic, Methodology and Philosophy of Science III (North-Holland Pub. CO. 1968) pp. 63~86.

[2] M. Takahashi　Ackerman's Model and Recursive Predicates, Proc. Japan Acad. 44 (1968) pp 41~42.

[3] M. Takahashi　Recursive Functions of Ordinal Numbers and Lévy's Hierarchy, Commentarii Mathematici

Universitatis Sancti Pauli, 17 (1969) pp 21~29
[4] T. Tugué On the Partial Recursive Functions of Ordinal Numbers, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964) pp 1~32.