数理解析研究所講究録
86巻 1970年 27-40

Sélivanowski の定理について

法政大 工　田中尚夫

§1. 序論

筆者は [6] において, Π^1_1 set E に対しその組成分を E_ν ($\nu < \Omega$) とするとき

$$(1) \qquad \mu(E) = \mu(\bigcup\{E_\nu \mid \nu < \omega_1\}) \quad 1/$$

が成り立つことを示し, 補解析集合に関する Sélivanowski の定理 [4] の精密化を与えたが, 当時 Σ^1_1 set の場合にも上の (1) に対応する形が成立するものと予想した為議論がうまく展開できず Σ^1_1 の場合は未解決であった. 所が最近 Martin-Löf の random sequences の概念の拡張を取扱っている際, 偶然 Σ^1_1 の場合は否定的であることが判明したので, それを報告する. すなわち:

1/ $\mu(E)$ は E の Lebesgue measure を, ω_1 は the first non-constructive ordinal を表わす.

<u>定理</u>. Σ_1^1 set A で, $\mu(A) \neq \mu(\bigcup\{A_\nu \mid \nu<\omega_1\})$ なるものが存在する. ここに A_ν は A を篩う recursive sieve に関する A の組成分である.

ここでは Baire's zero-space (N^N) において議論を展開するが本稿のすべての結果は 2^N においても成立する. 説明なしの Notation や用語については, 例えば [5], [6] を参照されたい.

§2. <u>Constituents</u>.

E を N^N の一つの Π_1^1 set とし, A をその補集合とする: $A = CE$. E に対し

$$\alpha \in E \iff (\forall \beta)(\exists x) R(\alpha, \bar{\beta}(x))$$

なる recursive predicate $R(\alpha, u)$ が存在する. また $\mho$ を sequence numbers の集合とし, $\prec$ は $\mho$ 上のいわゆる Kleene-Brouwer ordering とする.

<u>Sieve</u> $S \subseteq N^N \times \mho$ を

$$\langle \alpha, \bar{\beta}(x) \rangle \in S \iff (\forall y)_{y<x} \overline{R}(\alpha, \bar{\beta}(y))$$

によって定義し, $S^{\langle\alpha\rangle} = \{u \mid \langle \alpha, u \rangle \in S\}$ とおく. よく知られているように

$$\alpha \in E \iff S^{\langle\alpha\rangle} \text{ is well-ordered by } \prec$$

が成り立つ.

$I^{\langle\alpha\rangle}$ を $S^{\langle\alpha\rangle}$ の well-ordered な maximal initial segment とする. 高々第2級の順序数 ν (すなわち $\nu < \Omega$) に対し E_ν, A_ν を次式で定義し, それぞれ E, A の S に関する組成分 (constituent) という:

$$\alpha \in E_\nu \iff \alpha \in E \;\&\; \tau(I^{\langle\alpha\rangle}) = \nu = \tau(S^{\langle\alpha\rangle}),$$

$$\alpha \in A_\nu \iff \alpha \in A \;\&\; \tau(I^{\langle\alpha\rangle}) = \nu,$$

ここに $\tau(*)$ は $*$ の order-type を表わす.

§3. Derived sieves. 各 $a \in O$ に対し[2] transfinite derived sieves と呼ばれる $S(a)$ を定義する.

(1) $a = 1$. $\quad S(a) = S$,

(2) $a = 2^b \neq 1$. $\quad S(a) = \{ \langle\alpha, u\rangle \mid \langle\alpha, u\rangle \in S(b) \;\&\; (\exists v)[\, v \prec u \;\&\; \langle\alpha, v\rangle \in S(b)\,] \}$,

(3) $a = 3\cdot 5^b$. $\quad S(a) = \bigcap_{n=0}^{\infty} S(\{b\}(n_0))$.

Lemma 1. $a, b \in O$ に対し,

(4) $\quad |a| \leq |b| \Rightarrow S(a) \supseteq S(b)$,

---

2) O および下に現われる H については, Rogers [2; §11.7, §16.8] を参照せよ.

(5) $\quad |a| = |b| \Rightarrow S(a) = S(b)$.

証明. (5) は (4) の直接結果. (4) は b に関する induction による.

<u>Lemma 2.</u> $a \in O$ に対し $S(a)$ は HA set である.

証明. Recursion theorem によって次のような partial recursive functions f, g を作ろう: $a \in O$ ならば $f(a, u)$, $g(a)$ は defined で

$$\langle \alpha, u \rangle \in S(a) \Leftrightarrow f(a, u) \in H^{\alpha}(g(a)).$$

<u>$a = 1$.</u> $S(1) = S$ であるから

$$S(a) = \{ \langle \alpha, u \rangle \mid \varphi_0(u) \in H^{\alpha}(2) \}$$

なる recursive function φ_0 がある.

(6) $\quad \{f\}(g, 1, u) = \varphi_0(u), \quad \{g\}(f, 1) = 2$ とせよ.

<u>$a = 2^b \neq 1$.</u> このときは

$$\langle \alpha, u \rangle \in S(a) \Leftrightarrow \langle \alpha, u \rangle \in S(b) \;\&\; (\exists v)[v \prec u \;\&\; \langle \alpha, v \rangle \in S(b)]$$

$$\Leftrightarrow \{f\}(g, b, u) \in H^{\alpha}(\{g\}(f, b)) \;\&$$

$$(\exists v)[v \prec u \;\&\; \{f\}(g, b, v) \in H^{\alpha}(\{g\}(f, b))]$$

であるから, 適当な partial recursive functions φ_1, ψ_1 に対し

$$\Leftrightarrow \varphi_1(f, g, b, u) \in H^{\alpha}(\psi_1(f, g, b))$$

が成り立つ.

(7) $$\left.\begin{aligned}\{f\}(g,a,u) &= \varphi_1(f,g,(a)_0,u)\\ \{g\}(f,a) &= \psi_1(f,g,(a)_0)\end{aligned}\right\}$$ とせよ.

$a = 3\cdot 5^{b}$. $S(a) = \bigcap_{n=0}^{\infty} S(\{b\}(n_0))$ であるから

$\langle \alpha, u\rangle \in S(a) \Leftrightarrow (\forall n)[\,\langle \alpha, u\rangle \in S(\{b\}(n_0))\,]$

$\Leftrightarrow (\forall n)[\,\{f\}(g,\{b\}(n_0),u) \in H^{\alpha}(\{g\}(f,\{b\}(n_0)))\,]$

であるから, 適当な partial recursive functions φ_2, ψ_2 に対し

$\Leftrightarrow \varphi_2(f,g,b,u) \in H^{\alpha}(\psi_2(f,g,b))$

となる. よって

(8) $$\left.\begin{aligned}\{f\}(g,a,u) &= \varphi_2(f,g,(a)_1,u)\\ \{g\}(f,a) &= \psi_2(f,g,(a)_1)\end{aligned}\right\}$$ とせよ.

(6)〜(8) を Double recursion theorem [註3] によって解けば所要の partial recursive functions f, g が得られる. $\boxtimes$

Lemma 3. 各 $\nu < \omega_1$ に対し E_ν, A_ν は共に HA sets である.

---

3) Rogers [2 ; P. 190]

証明. $\nu = |a|$　$a \in O$ なる a をとる. 例えば, Ljapunow et al [1 ; p.51] によれば

$$\alpha \in E_\nu \Leftrightarrow (\forall b)[b <_0 a \Rightarrow (\exists u)(\langle \alpha, u \rangle \in S(b))]$$
$$\& \neg(\exists u)[\langle \alpha, u \rangle \in S(a)].$$

$\alpha \in A_\nu \Leftrightarrow (\exists u)[\langle \alpha, u \rangle \in S(a)] \ \& \ (\forall u)[\langle \alpha, u \rangle \in S(a) \Rightarrow (\exists v)\{v \lessdot u \ \& \ \langle \alpha, v \rangle \in S(a)\}] \ \& \ (\forall b)[b <_0 a \Rightarrow (\exists u)\{\langle \alpha, u \rangle \in S(b) \ \& \ (\forall v)[v \lessdot u \Rightarrow \langle \alpha, v \rangle \notin S(b)]\}]$

が成り立つ. それ故 Lemma 2 の証明の uniformity によって, E_ν, A_ν は HA sets である. $\boxtimes$

<u>Corollary</u> 4. 各 $\nu < \omega_1$ に対し $\bigcup_{\sigma < \nu} E_\sigma$ と $\bigcup_{\sigma < \nu} A_\sigma$ は HA sets である. 更に $\bigcup_{\nu < \omega_1} E_\nu$ および $\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu$ は Π_1^1 sets である.

§4. Main Theorem.

<u>Theorem</u> 5. Σ_1^1 set A で, $\mu(A) \neq \mu(\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu)$ なるものが存在する.

証明. $A\ (\subseteq N^N)$ を

$$\alpha \in A \iff \alpha \text{ is not a HA function}$$

によって定義する. よく知られているように A は Σ^1_1 set であり, かつ当然 $\mu(A) = 1$.

今
$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{\nu<\omega_1} A_\nu)$$
と仮定せよ. そのとき
$$\mu(\bigcup_{\nu<\omega_1} A_\nu) = 1.$$
Corollary 4 によって $\bigcup_{\nu<\omega_1} A_\nu$ は Π^1_1 であるから, Sacks-Tanaka の結果 [3; Theorem 3.9], [6; Theorem C] によって $\bigcup_{\nu<\omega_1} A_\nu$ は HA function を含まなければならない. このことは A の定義と矛盾する. $\boxtimes$

それではどんな ordinal σ に対し
$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{\nu<\sigma} A_\nu)$$
が成立するであろうか?

$\beta \in N^N$ と $a \in O^\beta$ とに対し $S(a,\beta)$ を §3 のように定義すると $S(a,\beta)$ は HA-in-β となり, 従って $\bigcup\{A_\nu \mid \nu < |a|^\beta\}$ $(a \in O^\beta)$ も HA-in-β である. 所で Sélivanowski [4; p.24] によれば
$$(\exists\beta)(\exists a)[a \in O^\beta \ \&\ \mu(A - \bigcup\{A_\nu \mid \nu < |a|^\beta\}) = 0]$$

が成り立つ. この square bracket 内の条件は Π^1_1 である [5; Theorem 8] から, Kondô-Addison の定理によってこの条件をみたす Δ^1_2 function β が存在する. かくて

<u>Theorem</u> 6. 各 Σ^1_1 set A に対し

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{\nu<\sigma} A_\nu)$$

なる Δ^1_2 ordinal σ が存在する.

§5. Remark.

Π^1_1 set E に対し, $\alpha \in E$ ならば $\tau(I^{\langle\alpha\rangle}) = \tau(S^{\langle\alpha\rangle})$ は recursive-in-α ordinal であるが, Σ^1_1 set については必ずしもそうでない. 即ち

<u>Theorem</u> 7. 次のような Σ^1_1 set A が存在する:

(1) $(\exists\alpha)[\alpha \in A$ & $\{\tau(I^{\langle\alpha\rangle})$ is not a recursive-in-α ordinal$\}]$.

証明. A として Theorem 5 の証明における Σ^1_1 set A をとれ. これに対し (1) が成立しないと仮定すれば:

(2) $(\forall\alpha)[\alpha \in A \Rightarrow \{\tau(I^{\langle\alpha\rangle})$ is a recursive-in-α ordinal$\}]$

となる.

$$A' = \bigcup_{\nu \geq \omega_1} A_\nu$$

とおくと

$$\alpha \in A' \Rightarrow \tau(I^{\langle\alpha\rangle}) \text{ is not a recursive ordinal,}$$

$$\Rightarrow \omega_1^\alpha \neq \omega_1 \quad \text{註4)}$$

となる. Sacks [3; Corollary 3.10] によれば

$$\mu(\{\alpha \mid \omega_1^\alpha \neq \omega_1\}) = 0$$

であるから $\mu(A') = 0$ が得られ, 従って

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{\nu < \omega_1} A_\nu)$$

となってしまう. これは Theorem 5 の証明に反す. $\boxtimes$

註4) もし $\omega_1^\alpha = \omega_1$ なら "$\tau(I^{\langle\alpha\rangle})$ is not a rec. ordinal" から "$\tau(I^{\langle\alpha\rangle})$ is not a rec.-in-α ordinal" が生ずるから, (2) と矛盾する.

§6. <u>Baire category case</u>. Theorems 5, 6 は measure の代りに Baire category を用いても成立する.

先ず Thomason [8] と Hinman [7] から次の定理を引用する:

[TH] $K = \{\alpha \mid \omega_1^\alpha \neq \omega_1\}$ は first category (meager) である.

<u>Corollary</u> 8. Π_1^1 set E に対し, $\bigcup_{\nu \geq \omega_1} E_\nu$ は first category である.

(証明) [6] の Theorem β の証明(或は上記 Theorem 7 のそれ)と全く平行する.

$$E' = \bigcup_{\nu \geq \omega_1} E_\nu$$

とおけば

$$\alpha \in E' \Rightarrow \tau(S^{\langle\alpha\rangle}) \text{ is not a recursive ordinal}$$

$$\Rightarrow \omega_1^\alpha \neq \omega_1 \quad (\because\ \tau(S^{\langle\alpha\rangle}) \text{ は recursive-in-}\alpha \text{ ordinal である.})$$

従って $E' \subset K$. ☒

[HI] E が Π_1^1 で, second category ならば, E は HA-function を含む.

<u>Theorem</u> 9. 次のような Σ_1^1 set A が存在する:
A は residual ($=$ co-meager) であるが $\bigcup_{\nu<\omega_1} A_\nu$ は meager である.

証明. A として定理5の証明における Σ_1^1 set A をとれ. A は明かに co-meager である. もし $\bigcup_{\nu<\omega_1}$ が not meager ならば, (それは Corollary 4 によって Π_1^1 set であるから) 上の [HI] によって HA-element を含まなければならない. これは A の定義に反す. $\boxed{\diagup}$

<u>Theorem</u> 10. 各 Σ_1^1 set A に対し, $\bigcup_{\nu>\sigma} A_\nu$ が meager となるような Δ_2^1 ordinal σ が存在する. (Σ_1^1 sets は可算個しかなく, しかも effective に並べられるから, この σ は全ての Σ_1^1 sets に対し共通にとれる. このことは Theorem 6 に対しても同様である.)

証明. Sélivanowski [4] によれば,

$$(\exists\beta)(\exists a)[a \in O^\beta \ \& \ \{\bigcup_{\nu \geq |a|^\beta} A_\nu \text{ is of first category}\}]$$

が成り立つ. Corollary 4 の相対化によれば, $a \in O^\beta$ の下で $\bigcup_{\nu\geq|a|^\beta} A_\nu$ は a, β に関し Σ_1^1-form で書けるから $\{\quad\}$ 内は Σ_2^1 predicate となる.[註5] 従って Kondô-Addison の定理が適用出来る. $\boxed{\diagup}$

注5) $P(M)$: "M は first category である."

M が Σ^1_1 ならば $P(M)$ は Σ^1_2 である.

(証明)

$P(M) \Leftrightarrow$ { M は $\bigcup_n S_n$ の部分集合である; ここに各 S_n は閉集合で,かつ nowhere dense である }

$\Leftrightarrow (\exists\alpha)[(\forall n)\{ F(\lambda i\alpha(\langle n,i\rangle))$ は nowhere dense である $\}$ & $M \subseteq \bigcup_n F(\lambda i\,\alpha(\langle n,i\rangle))$]

ここに $F(\alpha)$ は閉集合に対する universal set で,それ自身 Π^0_1 である. ところで,"$F(\alpha)$ が nowhere dense である" は Π^1_1 であるから,上記の $P(M)$ は Σ^1_2 である.

文　献

[1] Ljapunow et al., Arbeiten zur deskriptiven Mengenlehre, Berlin (1955).

[2] H. Rogers, Jr., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw Hill, (1967).

[3] G. E. Sacks, Measure-theoretic uniformity in recursion theory and set theory, to appear.

[4] E. Sélivanowski, Sur les propriétés des constituantes des ensemble analytiques, F. M. 21 (1933), 20–28.

[5] H. Tanaka, Some results in the effective descriptive set theory, Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A vol 3 (1967), 11–52

[6] H. Tanaka, A basis result for Π^1_1-sets of positive measure, Comment. Math. Univ. St. Paul. 16 (1968), 115–127.

[7] P. G. Hinman, *Some applications of forcing to hierarchy problems in arithmetic*, to appear.

[8] S. K. Thomason, *The forcing method and the upper semilattice of hyperdegrees*, Trans. A.M.S., 129 (1967), 38–57.

追 記

G. E. Sacks は, Theorem 6 を殆んど最良の形で次のように改良した:

Σ^1_1 set A に対し

$$\mu(A) = \mu(\bigcup\{A_\nu \mid \nu < \omega_1 + 2\}).$$

Theorem 10 に対しても同様のことが言えるようである.