数理解析研究所講究録
87巻 1970年 41-48

概周期系の一様漸近安定性と全安定性について

東北大 理学部　加藤順二

$f(t,x)$ を $R^1\times\{x;\|x\|<B\}$ で定義された概周期函数とする常微分方程式の概周期系

(1)　　$\dot{x}=f(t,x)$

に対して概周期解が存在するための条件に関してはさまざまなものが与えられている。(次に述べる Miller の結果は常微分方程式系に対して、Yoshizawa の結果は函数微分方程式系に対して示されているが、こゝでは簡単のためにいずれも常微分方程式系 (1) について述べる。)

その中で、R. K. Miller [1] は「有界な解が存在して全安定である」ことが一つの充分条件であることを示した。一方、T. Yoshizawa [2] は最近「有界な解が存在して一様漸近安定である」ことも一つの充分条件であることを示した。両者とも、さらに、条件

(C)　hull の中の系に対して解がいずれも一意的である

すなわち、$g(t,x)$ を $f(t,x)$ の hull の要素としたとき、系（これを (1) の hull の中の系という）

$$(2) \qquad \dot{x} = g(t,x)$$

の解はすべて初期値に関して一意的であることを仮定した．

一般に、一様漸近安定性は全安定性を導くことが知られている．しかし、そのときは条件

(C′) $f(t,x)$ は一様に x に関して Lipshitz の条件をみたしている

こと、あるいは、この条件 (C′) のもとでは常に保証されているが、一様漸近安定性に対応して存在する Liapunov 函数で、一様に Lipschitz の条件をみたすものが存在していることを仮定しているのが普通であった．このような条件をはずすことができるか否かは一つの問題であったが、当報告の最後に述べる反例は、

『無条件では、一様漸近安定性から全安定性が一般には導かれない』

ことを示している．また、局所的 Lipschitz の条件は条件 (C) のためには不充分であることが知られているが（[3] 参照）、条件 (C′) が条件 (C) を導くことは明らかである．このことと、Miller の結果、Yoshizawa の結果と並べたとき次のことが予想される．

(*) 『条件 (C) のもとで、概周期系の有界な解に対して、一様漸近安定性から全安定性が導かれる.』

[2] におけるのと同じ論法を用いることによって、T. Yoshizawa と筆者 [4] は最近この事実に肯定的な解答を示すことができた. その解答において本質的な事実は次の補題である.

補題. 条件 (C) を仮定する. $T>0$, $B_1>0$ $(B_1<B)$, $\varepsilon>0$ を任意に与えられた定数とする. これらの定数のみに依存する数 $\delta>0$ が存在して、t_0 がなんであっても、また、(1) の解 $x(t)$ および連続函数 $p(t)$ が条件

$$\|x(t)\| \leq B_1 \quad (t_0 \leq t \leq t_0+T),$$

$$\|p(t)\| \leq \delta \quad (t_0 \leq t \leq t_0+T)$$

をみたせばなんであっても

$$\|x(t)-y(t)\| \leq \varepsilon \quad (t_0 \leq t \leq t_0+T)$$

が成り立っている. こゝで、$y(t)$ は系

$$\dot{y} = f(t,y) + p(t)$$

の解であって、条件

$$\|y(t_0)-x(t_0)\| \leq \delta$$

をみたすものとする.

この補題の結果は t_0 を固定すれば一般に Kamke の定理と呼ばれるもので系(1)の解の一意性から直ちに証明される. δ が t_0 に無関係にえら

べることを示すために概周期系であるという事実《注：これは多少ゆるめることができる，すなわち，$\{f(t+s,x)\,;\,s\in R^{+}=[0,\infty)\}$ の全体が compact-open topology に関して相対 compact であることを仮定すれば充分である》、条件 (C) が用いられる．このように、この補題は安定性とは独立な結果で、予想 (*) はこれと安定性を結び合わせて証明される．

さて、$\varphi(t)$ を考えている系 (1) の有界な解、すなわち、compact 領域にとどまる解として、今後は $(\psi(t), g(t,x))$ によって $(\varphi(t), f(t,x))$ の hull のある一つの要素、すなわち、ある数列 $\{t_m\}$ に対して $(\psi(t), g(t,x))$ が $(\varphi(t+t_m), f(t+t_m, x))$ の極限函数であって収束は任意な compact 領域において一様であるものとする．このとき、$\psi(t)$ が系 (2) の解となることはよく知られた事実であるが、さらに、

(**) 「$\varphi(t)$ が系 (1) に対して全安定であれば、$\psi(t)$ は系 (2) に対して一様安定（このことを、(ψ, g) は一様安定であるということにする）でなければならない」

ことがわかる．

今、条件として、

(C') (φ, f) の hull の任意な要素 (ψ, g) がいずれも同じ type の一様漸近安定性を持っている

ことを仮定する．こゝで、同じ type の一様漸近安定性とは、

一様漸近安定性の定義において述べられる $\delta(\varepsilon)$，δ_0，$T(\varepsilon)$ を共通にえらぶことができることを示している．このとき，補題を修正して用いることによって，

(＊＊＊)『(＊) において条件 (c) を条件 (c′) でおきかえることができる』

ことが証明される．一方，自励系・周期系に対しては，(φ, f) の一様漸近安定性から，条件 (c′) が満たされていることがすでに知られている [2]．したがって，自励系・周期系に対しては，(＊) において他に付帯条件をつけることなく，条件 (c) を省略することができる．そこで，同様のことを概周期系に対して期待するのは自然であろう．しかしながら，筆者は最近この事実に対する反例を得た．すなわち，この反例は次のような予想のいずれに対しても反例となっている．

(i)「一様漸近安定性が全安定性を導く」．

(ii)「概周期系において，有界な解が一様（漸近）安定であれば，その hull の解も同様にそうである」．

こゝでは，仮定 (c) あるいは他の付帯条件は仮定されていないものとする．

なお，仮定 (c) と仮定 (c′) の関係について，すなわち，(＊) と (＊＊＊) との関係について云えば，Yoshizawa が本質的に

『仮定 (c) のもとで，(1) の有界な解が一様（漸近）安定

であれば、そのhullの解も同じtypeを持って一様(漸近)安定である」

ことを示した([2]を参照)．すなわち、予想(ii)もまた仮定(c)のもとでは真であることを証明することができる．しかしながら、仮定(c)はかなり強い条件であり弱めることができないかということが期待される．例えば、反例の結果とのすきまを考えたとき、条件(c)を条件

(c*)　(φ, f)のhullの要素(ψ, g)に対して、$\psi(t)$は系(2)の一意的な解である，

あるいは，

(c**)　(ψ, g)は一様安定である．

によっておきかえることなどが考えられるが充分な結論は得られていない．

<u>反例</u>　$f(x)$を$0 \leq x \leq 2$において次のように定義する．

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|nx-1|}, & 2/(2n+1) \leq x \leq 2/(2n-1) \quad (n=1, 2, \cdots) \\ 0, & x = 0 . \end{cases}$$

次に、$a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)$はY. Sibuya([3]を参照)によって与えられた概周期函数、すなわち、

$$a_0(t) \equiv 1 ,$$

$a_k(t)$は周期2^kの周期函数で．

$$a_k(t) = \begin{cases} 0\ , & 0 < t < 2^{k-1}, \\ -2^{-k}, & 2^{k-1} \leqq t \leqq 2^k , \end{cases} \qquad k = 1, 2, \cdots$$

によって定められているものとする《注：連続性のためには僅かに修正を施こせばよい》．このとき次のことが証明される．

(I)　系

$$\dot{x} = f(x)$$

の零解は一意的ではない．

(II)　任意な非負整数 k に対して．

$$a(t+2^k-1) \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty), \qquad 0 \leqq t \leqq 1,$$

$$a(t) \geqq 1/2\ , \qquad 2n < t < 2n+1\ ; \quad a(t) > 0\ .$$

そこで、$c > 2\sqrt{2}$ を定数として、

$$f(t,x) = \begin{cases} f(x) - c\,a(t)\sqrt{x}\ , & x \geqq 0, \\ -f(t,-x)\ , & x < 0, \end{cases} \quad t \in R^1$$

とおいて、系 (1) を考えると、その零解は一様漸近安定であることを証明することができるが、上に述べた事実 (I), (II) によって、条件 $\underbrace{(C^*)}_{}$（ゆえに (C^{**})）をみたしていない．したがって．(**) によって零解は全安定ではありえないことがわかる．

なお、Sibuya は上に定めた概周期函数 $a(t)$ を用いて、

$$f(t,x) = \sqrt{|x + a(t)|}$$

を考えることによって、局所的 Lipschitz の条件は条件 (C)

のためには一般には不充分であることの例とした[3].

参考文献

[1]. R. K. Miller, Almost periodic differential equations as dynamical systems with applications to the existence of almost periodic solutions, J. Differential Eqs., 1(1965), 337-345.

[2]. T. Yoshizawa, Asymptotically almost periodic solutions of an almost periodic system, Funkcialaj Ekvacioj, 12(1969), 23-40.

[3]. G. R. Sell, Nonautonomous differential equations and topological dynamics, I, The basic theory, Trans. Amer. Math. Soc., 127(1967), 241-262.

[4]. J. Kato and T. Yoshizawa, A relationship between uniformly asymptotic stability and total stability, to appear in Funkcialaj Ekvacioj.