数理解析研究所講究録
88巻 1970年 1-20

境界で退化した楕円型作用素に対する一般境界値問題

京大・理　　島倉紀夫

§1. 序説

n次元実Euclid空間R^nの有界領域Ωは，その境界がC^∞-級のcompact可微分多様体Γであって，局所的にはΓの一方側にだけあるような領域であるとする．$\bar{\Omega}$で定義されたC^∞-級の函数$\varphi(x)$は，Ωで常に正であり，かつΓの適当な近傍では点xからΓへの距離に等しいとする：

$$\begin{cases} \varphi(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}); & \Omega\text{で}\ \varphi(x)>0\ \text{，かつ，} \\ \varphi(x) = \mathrm{dis}(x,\Gamma), & \mathrm{dis}(x,\Gamma) < \delta_0\ \text{のとき．} \end{cases} \tag{1.1}$$

本稿において，$\bar{\Omega}$で定義されその境界で退化した楕円型作用素とは，次のような形をしたものを意味する：

$$L(x;D_x)u(x) \equiv \sum_{h=0}^{k} P^h(x;D_x)\{\varphi^{k-h}(x)u(x)\}. \tag{1.2}$$

ここでkは自然数で，各$0 \leqq h \leqq k$に対して$P^h(x;D_x)$は$\bar{\Omega}$でC^∞-級の係数をもつ$(m-h)$階以下の偏微分作用素であって，特に

$$P^0(x;D_x)\equiv\sum_{|\nu|\leqq m} p^0_\nu(x)D_x^\nu \quad , \left(D_x=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{1.3}$$

は丁度 m 階の楕円型作用素で $\bar{\Omega}$ で退化していないとする：

$$x\in\bar{\Omega},\ \xi\in R^n,\ \xi\neq 0 \text{ のとき } \sum_{|\nu|=m} p^0_\nu(x)\xi^\nu\neq 0. \tag{1.4}$$

ここで大切なのは k と m の関係であるが以後常に

$$0<k\leqq m \tag{1.5}$$

と仮定しよう．即ち，L の偏微分の階数は m で，$(m-h)$ 階の項は（$h\leqq k$）境界 Γ で $(k-h)$ 次の退化をしている．例えば，Legendre の作用素 $-\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{du}{dx}\right\}$ の場合 $n=1$，$\Omega=(-1,1)$，$m=2$ かつ $k=1$ である．

以後，超函数論に出てくる空間 $\mathcal{D}(\Omega)$，$\mathcal{E}(\Omega)$，$\mathcal{B}(\Omega)$ 等は L. Schwartz の記号に従い，Sobolev 空間 $L^2(\Omega)$，$H^l(\Omega)$，$H^l_0(\Omega)$，$H^{-l}(\Omega)$ 等は Lions-Magenes [4] に従うものとする．

さて，我々が考えるのは超函数の意味の Ω での微分方程式

$$L(x;D_x)u(x)=f(x) \tag{E}$$

である．右辺 $f(x)$ は常に $L^2(\Omega)$ から与え，解 $u(x)$ は

$$W^m_k(\Omega)=\{u(x)\in H^{m-k}(\Omega);\ \varphi^k(x)u(x)\in H^m(\Omega)\} \tag{1.6}$$

なるHilbert空間の中に求めるものとする．言うまでもなく，Ωの内部に任意のcompact集合をとりその上だけで(E)を見るならばLが境界で退化していることの困難さは何らあらわれない．故に問題はΩ全体，特に，その境界の近傍での様相を調べることにある．それには，退化していない楕円型作用素の場合がそうであったように，方程式(E)に更に何個かの境界条件を課して考えるべきであろう．その境界条件としてどのようなものがあり得るかを考察するのが本稿の目的である．

<u>例.1.1</u>: $m=2b$, $0<k\leqq b$として方程式

$$\mathcal{L}u(x)\equiv\varphi^k(x)A(x;D_x)u(x)=f(x) \tag{1.7}$$

をとりあげよう．ここでAは$2b$階強楕円型で，Dirichlet問題の場合に解の存在と一意性が成り立つ作用素としよう．即ちAは$H_0^b(\Omega)$から$H^{-b}(\Omega)$の上への同型でありかつ$H^{2b}(\Omega)\cap H_0^b(\Omega)$から$L^2(\Omega)$の上への同型でもあるとしよう．すると，$\mathcal{L}$は$W_k^{2b}(\Omega)\cap H_0^b(\Omega)$(のある閉部分空間)から$L^2(\Omega)$の上への同型を与える．

この最後の部分の証明は，Aに対するDirichlet問題の解のなめらかさの議論そのものであるが，この事実は次のようにも説明され得る：即ち，(1.7)において$\varphi(x)$のところを，

$\varphi(x)+\varepsilon$ でおきかえた方程式を $H_0^b(\Omega)$ で解こう．　ε を正の助変数とすると解 $u_\varepsilon(x)$ は $H^{2b}(\Omega)\cap H_0^b(\Omega)$ の中に一意的に求まる。$\varepsilon\downarrow 0$ としたときの $u_\varepsilon(x)$ の極限 $u(x)$ が $W_k^{2b}(\Omega)$ に属していてそれが(1.7)の一意的な解になっている．　この考え方を普遍化するならば，一般に(1.2)で定義された L を，その $\varphi(x)$ を $\varphi(x)+\varepsilon$ でおきかえて得られる作用素 L_ε（これは退化していない）の $\varepsilon\downarrow 0$ のときの極限とみなすことが出来る．　そして各 L_ε に関する方程式(E)を適当な境界条件のもとで解くことによって極限の L に関する境界値問題が得られるであろう。筆者は未だこの方法を組織的に試てはいない．　しかし，こうして得られる境界値問題は，L に対して設定され得る境界値問題のすべてではないであろうことをここで注意しておく。

この報告は筆者の論文[6]の内容紹介を主目的とする．この論文の動機になったのは Baouendi[2] 及び Baouendi-Goulaouic[3] のふたつの仕事であった．　そこでこのうち後者の結果を手短かにふり返ってみよう．

<u>例 1.2:</u>　文献[2]においては $m=2$，$k=1$ の場合の次の方程式が取扱われている：

$$Lu(x)\equiv\sum_{j=1}^{n}D_j\{\varphi(x)D_ju(x)\}+c(x)u(x)=f(x),\qquad(1.8)$$

$$\text{但 } L,\ D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

ここで $c(x)\in\mathcal{B}(\bar{\Omega})$ で $\bar{\Omega}$ において $c(x)>0$ とする．これを解くのにHilbert空間

$$V(\Omega)=\{u(x)\in L^2(\Omega);\ \sqrt{\varphi(x)}\,D_j u(x)\in L^2(\Omega),\ 1\leq j\leq n\}\quad\cdots(1.9)$$

を導入すると，$V(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset V(\Omega)'$ とみなせる（$V(\Omega)'$ は $V(\Omega)$ の共役空間）．そして L は $V(\Omega)$ から $V(\Omega)'$ の上への同型を与える．このとき[4]が証明したことは L の hypo-ellipticity である．即ち先ず $f(x)\in L^2(\Omega)$ ならば解 $u(x)\in V(\Omega)$ は実は $W_1^2(\Omega)$ に属する．以下順に $f(x)\in H^l(\Omega)$ であれば，$u(x)\in W_1^{l+2}(\Omega)\ (\equiv\{u(x)\in H^{l+1}(\Omega);\ \varphi(x)u(x)\in H^{l+2}(\Omega)\})$ となる（$l=1,2,3,\cdots$）．

退化していない2階方程式の場合，一般にはひとつの境界条件をおくのであるが，方程式(1.8)の場合何らの境界条件も課せられていないことに注目しよう．例1.1の直後にのべた論法に従えば，この(1.8)は，退化していない方程式に対するNeumann問題の極限であって，Neumann条件が極限移行の過程で消失したものであるとも解釈されよう（尚この場合はDirichlet問題からの極限ではない）．ともかくこの例1.2では空間 $V(\Omega)$ を導入することが L の形(1.8)からみて極めて自然であり，(1.8)は一種の変分問題から派生した形をとってい

る．所でこのL自身は自己共役拡張をもつが，それに任意の1階の項をつけ加えて

$$\sum_{j=1}^{m} D_j\{\varphi(x)D_j u(x)\}+\sum_{j=1}^{m} b_j(x)D_j u(x)+c(x)u(x)=f(x) \qquad (1.10)$$

とするとどうなるであろうか．ここで $b_j(x)\in\mathcal{B}(\bar{\Omega})$ とする．このときもはや空間 $V(\Omega)$ は役に立たず，初めから問題設定をやり直さなくてはならないことになる．

次節では形式的自己共役でない，むしろそれから相当距った作用素を考える．しかも方程式(E)と同時にその形式的共役な方程式も取扱い比較するということが出来ない．これは本稿の大きな欠点であるが，ひとまず現在までに得られた事実だけを書くことにする．又，得られた命題や定理の証明は一切与えないが，そのためには[6]を参照されたい．

§2. 主要結果

最初に，$W_k^m(\Omega)$ に属する $u(x)$ に対してその m 個の traces $\gamma_q u(x')$ $(-k\leqq q\leqq m-k-1)$ を定義しよう．

まず正数 δ_1 $(0<\delta_1<\delta_0$：前節(1.1)をみよ$)$ に対して

$$\Omega_{\delta_1}=\{x\in\bar{\Omega}\,;\,\mathrm{dis}\,(x,\Gamma)\leqq\delta_1\} \qquad (2.1)$$

とおこう。これは$\bar{\Omega}$におけるΓのδ_1-閉近傍である。境界Γ上の点を一般にx'であらわすと，δ_1を十分小さくとることによって，Ω_{δ_1}から$\Gamma\times[0,\delta_1]$の上へのC^∞級同相写像χを

$$\varphi(\chi^{-1}(x',t))\equiv t\ ,\quad 0\leqq t\leqq\delta_1\ \text{のとき},\tag{2.2}$$

なる如く構成することが出来る（それには$0\leqq t\leqq\delta_1$を助変数とする曲面族$\varphi(x)=t$への直交曲線族《orthogonal trajectories》を利用すればよい）。tはΓの法線方向の変数となる。

そこで，$k<m$のとき，$0\leqq q\leqq m-k-1$に対しては

$$\gamma_q u(x')=\lim_{t\downarrow 0}D_t^q u(\chi^{-1}(x',t))\ ,\ \left(\begin{array}{l}0\leqq q\leqq m-k-1\text{のとき}\\ \text{但し},\ D_t=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\end{array}\right)\tag{2.3}$$

と定義する。次に一変数tの函数$\alpha(t)\in\mathcal{D}(\overline{R_+})$を

$$\alpha(t)=\begin{cases}1, & 0\leqq t\leqq\delta_1/3\ \text{のとき},\\ 0, & 2\delta_1/3\leqq t<\infty\ \text{のとき}\end{cases}\tag{2.4}$$

となる様にひとつ選んで固定しよう。そこで，

$$\gamma_{-j}u(x')=(-1)^{j-1}\int_0^\infty t^{j-1}\alpha(t)\,u(\chi^{-1}(x',t))\,dt,\tag{2.5}$$
$$\text{但し，}\ 1\leqq j\leqq k\ \text{のとき}$$

と定義しよう。すると，$u(x)\in W_k^m(\Omega)$に対して縦ベクトル

$$\vec{u}(x')={}^t\{\gamma_{-k}u(x'),\cdots,\gamma_{m-k-1}u(x')\}\tag{2.6}$$
$$\in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times\cdots\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

が定義された。$\gamma_q u(x')\ (-k\leqq q\leqq -1)$の定義は勿論函数$\alpha(t)$

のえらび方によるのであるが，仮にこれを$\gamma_q^{\alpha}u(x')$とかくならば，他に(2.4)の性質をもつ$\beta(t)$をとってきて$\gamma_q^{\beta}u(x')$を作ったとき$\gamma_q^{\alpha}u(x')-\gamma_q^{\beta}u(x')\in H^m(\Gamma)$となる．この意味で$\alpha(t)$の選び方による$\gamma_q u(x')$のちがいは小さい．そこで以後は$\alpha(t)$を固定して単に$\gamma_q u(x')$と書くことにする．

さて，作用素LはΩ_{δ_1}では次のようにもかける：

$$L(x;D_x)\equiv\sum_{h=0}^{k}P^h(\chi^{-1}(x',t);D_{x'},D_t)\{t^{k-h}u(\chi^{-1}(x',t))\} \quad (2.7)$$

（前節(1.2)をみよ），ここで$D_{x'}$はΓ内の微分をあらわす．更に各P^hは，Γ上の局所座標系x'を用いて

$$P^h(\chi^{-1}(x',t);D_{x'},D_t)=\sum_{|\nu'|+l\leqq m-h}p^h_{\nu',l}(x',t)D_{x'}^{\nu'}D_t^l, \quad (2.8)$$

但し，$0\leqq h\leqq k$；

と書ける．そこで境界の各点x'でP^hの主要部をとって

$$\Pi^h(x';D_{x'},D_t)\equiv\sum_{|\nu'|+l=m-h}p^h_{\nu',l}(x',0)D_{x'}^{\nu'}D_t^l, \quad (2.9)$$

但し，$0\leqq h\leqq k$

とおきこれらを集めて

$$\Lambda(x',t;D_{x'},D_t)v(x',t)\equiv\sum_{h=0}^{k}\Pi^h(x';D_{x'},D_t)\{t^{k-h}v(x',t)\} \quad (2.10)$$

とおくと，これによってΓ上の局所座標系のとり方によらない微分作用素が定義されたことになる．これは境界Γの各点におけるLの接触作用素の役目を果すものである．以後

Lに課せられる条件は実はΛだけに課せられる条件である．

まず(1.5)においてmは偶数としよう：

$$0 < k \leqq m = 2b. \tag{2.11}$$

そしてP°(x;D_x)は前節(1.4)の意味で楕円型であるばかりでなく境界の各点でproperly ellipticとしよう，即ち，x′∈Γ及びξ′∈T*_{x′}（x′におけるΓの実共役接空間）(ξ′≠0)を固定するごとに，τの多項式Π°(x′;ξ′,τ)はImτ>0及びImτ<0なる零点をそれぞれ丁度b個ずつもつとしよう．

次に『Lの指数条件』なるものを定義しよう．(2.10)式においてtを$-D_\tau = i\frac{\partial}{\partial\tau}$で，D_{x′}をξ′∈T*_{x′}で，D_tをτで形式的におきかえると，x′∈Γ及びξ′∈T*_{x′}を助変数とする常微分作用素Λ(x′, −D_τ; ξ′, τ)が得られる．そこで，

$$\begin{aligned}\Phi_{x'}(\rho) &\equiv \left[\tau^{k-m-\rho}\Lambda(x', -D_\tau; \xi', \tau)\tau^{\rho}\right]\Big|_{\tau\uparrow+\infty} \\ &= \sum_{h=0}^{k} p^{k-h}_{0,m+h-k}(x',0)\, i^h \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho-h+1)}\end{aligned} \tag{2.12}$$

とおく．これはρについて丁度k次の多項式で，その係数はB(Γ)に属するx′の函数である（ξ′には無関係）．そこで方程式Φ_{x′}(ρ)=0のk個の根に対して次の条件をおく．これは退化していない楕円型作用素の場合は必要の生じなかった事態である：

〚Lの指数条件〛: $\Phi_{x'}(\rho)=0$ の k 個の根 $\{\rho_j(x')\}_{j=1}^{k}$ は，Γ上のすべての点 x' で次のふたつの条件を満足する：

(I-1) $\rho_j(x')$ の実部はすべて $k-m-\frac{1}{2}$ より小さい：

$$\mathrm{Re}\,\rho_j(x') < k-m-\frac{1}{2} \quad (1 \leqq j \leqq k);$$

(I-2) もし $k \geqq 2$ であれば，任意の2根の差 $\rho_l(x')-\rho_j(x')$ $(1 \leqq l < j \leqq k)$ は決して整数ではない（特に，$\Phi_{x'}(\rho)=0$ は重根をもたない）．

細かい証明に立ち入ることなしにこの条件の意味を説明することは難しいが，後述の定理を得るためには上記のうち (I-1) はほゞ必須の条件であるように思われる．しかし，(I-2) は方法上の理由から課せられた幾分人為的な条件であって応用上もいささか面白くない．実際，本節の最後に挙げる例2.1 はこの (I-2) が成り立たないにも拘らず後述の定理の結論は正しい場合にあたっている．

今度は境界作用素 $\mathcal{B}(x';D_{x'})$ の導入にとりかかろう．それは一般に次のような $(b\times m)$-行列である：

$$\mathcal{B}(x';D_x)=\begin{bmatrix} \mathcal{B}_{1,-k}(x';D_{x'}) & \cdots & \mathcal{B}_{1,m-k-1}(x';D_{x'}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{B}_{b,-k}(x';D_{x'}) & \cdots & \mathcal{B}_{b,m-k-1}(x';D_{x'}) \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

ここで各 $\mathcal{B}_{j,q}(x';D_{x'})$ $(1\leqq j\leqq b,\ -k\leqq q\leqq m-k-1)$ は Γ 上の (m_j-q) 階以下の偏微分作用素でその係数は $\mathcal{B}(\Gamma)$ に属するものとする．但し，m_j $(1\leqq j\leqq b)$ は整数で

$$-k\leqq m_j\leqq m-k-1 \qquad (1\leqq j\leqq b). \tag{2.14}$$

特に m_j-q が負のときは $\mathcal{B}_{j,q}(x';D_{x'})$ は 0 作用素とする．

本節の最初にのべた traces の定義を思いおこすと $\mathcal{B}(x';D_{x'})\vec{u}(x')$ は b 個の成分をもつ縦ベクトルであって，

$$u(x)\in W_k^m(\Omega) \text{ のとき，} \mathcal{B}(x';D_{x'})\vec{u}(x')\in\prod_{j=1}^{b}H^{m-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma). \tag{2.15}$$

一般境界値問題の定式化：　与えられた函数 $f(x)\in L^2(\Omega)$ と，与えられた b 個の函数からなる縦ベクトル $\varphi(x)\in\prod_{j=1}^{b}H^{m-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ に対して，Ω 内で超函数の意味の微分方程式

$$L(x;D_x)u(x)=f(x) \tag{E}$$

をみたし，かつ，Γ 上で境界条件

$$\mathcal{B}(x';D_{x'})\vec{u}(x')=\varphi(x') \tag{B}$$

をみたす函数 $u(x)\in W_k^m(\Omega)$ を求めよ．

退化していない作用素に対する Agmon-Douglis-Nirenberg[1] の理論がそうであったように，上記の一般境界値問題が適切

(well-posed) であるためには，$\mathcal{B}(x';D_{x'})$ は全く任意ではあり得ない．そこにいわゆる covering condition が要請される．ここではそれを Shapiro-Lopatinski の条件と呼ぶことにしよう．以下その内容を明らかにしてゆく．

(2.10) において $D_{x'}$ を $\xi'\in T^*_{x'}$ で形式的におきかえて得られる t に関する常微分作用素

$$\Lambda(x',t;\xi',D_t)w(t)\equiv\sum_{h=0}^{k}\Pi^h(x';\xi',D_t)\{t^{k-h}w(t)\} \qquad (2.16)$$

は，$x'\in\Gamma$ と $\xi'\in T^*_{x'}$ ($\xi'\neq 0$) を助変数として固定するごとに，

$$W_k^m(\mathbb{R}_+)\equiv\{w(t)\in H^{m-k}(\mathbb{R}_+);\ t^k w(t)\in H^m(\mathbb{R}_+)\} \qquad (2.17)$$

から $L^2(\mathbb{R}_+)$ への写像である (ここで $\mathbb{R}_+=\{t>0\}$)．任意の $w(t)\in W_k^m(\mathbb{R}_+)$ に対してその traces $\vec{w}={}^t\{\gamma_{-k}w,\cdots,\gamma_{m-k-1}w\}\in\mathbb{C}^m$ は (2.3)，(2.5) と同様に次のように定義される：

$$\gamma_q w=\begin{cases}(-1)^{q-1}\displaystyle\int_0^\infty t^{-q-1}w(t)\,dt, & -k\leqq q\leqq -1 \text{ のとき},\\ \displaystyle\lim_{t\downarrow 0} D_t^q w(t), & 0\leqq q\leqq m-k-1 \text{ のとき}.\end{cases} \qquad (2.18)$$

そこで，作用素 $\Lambda(x',t;\xi',D_t)$ から，次のような m 次正方行列 $\mathcal{R}(x';\xi')$ を構成する：

$$\mathcal{R}(x';\xi')=\begin{bmatrix}\mathcal{R}_{-k,-k}(x';\xi') & \cdots & \mathcal{R}_{-k,m-k-1}(x';\xi')\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \mathcal{R}_{m-k-1,-k}(x';\xi') & \cdots & \mathcal{R}_{m-k-1,m-k-1}(x';\xi')\end{bmatrix}. \qquad (2.19)$$

基本補題：　Lが指数条件をみたすとしよう．このとき$x'\in\Gamma$及び$\xi'\in T^*_{x'}$を助変数にもち次の(1°)，(2°)及び(3°)をみたすm次正方行列$\mathcal{R}(x';\xi')$が存在する：

(1°)　$\mathcal{R}(x';\xi')$は階数$b=m/2$の射影である，即ち，

$\mathcal{R}(x';\xi')^2=\mathcal{R}(x';\xi')$；

(2°)　$\mathcal{R}(x';\xi')$の各成分$\mathcal{R}_{q,r}(x',\xi')$ $(-k\leqq q,r\leqq m-k-1)$は$\xi'=0$を除いて(x',ξ')に関して十分なめらかで，ξ'に関して$(q-r)$次斉次である，即ち，$\lambda>0$のとき$\mathcal{R}_{q,r}(x';\lambda\xi')=\lambda^{q-r}\mathcal{R}_{q,r}(x';\xi')$；

(3°)　境界値問題

$$\begin{cases}\Lambda(x',t;\xi',D_t)w(t)=0 & (t>0\text{において}),\\ \mathcal{R}(x';\xi')\vec{w}=\vec{0}\end{cases}\tag{2.20}$$

の$W^m_k(\mathbb{R}_+)$における解は$w(t)\equiv0$に限る（但し$\xi'\neq0$とする）．

作用素$\Lambda(x',t;\xi',D_t)$はΓ上の局所座標のとり方によらずに定まったものであった．従って上記の補題で存在が保障された$\mathcal{R}(x';\xi')$もそうである．

(2.13)において各$\mathcal{B}_{j,q}(x';D_{x'})$の斉次$(m_j-q)$階の部分を，$\mathcal{B}^0_{j,q}(x';D_{x'})$とし，これから作られる(2.13)のような$(b\times m)$-行列を$\mathcal{B}^0(x';D_{x'})$としよう．ここで更に$D_{x'}$を$\xi'\in T^*_{x'}$で形式的におきかえたものを$\mathcal{B}^0(x';\xi')$と書けば，

[$\mathcal{B}(x';D_{x'})$に対するShapiro-Lopatinskiの条件] Γ上の任意の点x'と任意の$\xi'\in T^*_{x'}$ $(\xi'\neq 0)$において$(b\times m)$-行列$\mathcal{B}^0(x';\xi')\mathcal{R}(x';\xi')$の階数が常に$b=m/2$に等しい．

この条件も$\mathcal{B}(x';D_{x'})$の主要部のみに置かれた条件であってΓ上の局所座標のとり方には依存しない．本稿の主要結果を定理の形にまとめてみると次のようになる：

定理： (1.2)で定義された微分作用素Lが本節の初めにのべた意味で楕円型であると共に指数条件を満足するとする．又，(2.13)で与えられる境界作用素$\mathcal{B}(x';D_{x'})$はShapiro-Lopatinskiの条件を満足するものと仮定する．このとき，Lと$\mathcal{B}$とから適当な正定数Kを選ぶことが出来て，すべての$u(x)\in W^m_k(\Omega)$に対して次の評価が成り立つ：

$$\|u(x)\|_{W^m_k(\Omega)} \leqq K\Big\{\|L(x;D_x)u(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{B}(x';D_{x'})\vec{u}(x')\|_{\prod_{j=1}^{b} H^{m-k-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u(x)\|_{L^2(\Omega)}\Big\}. \tag{2.21}$$

Ωは有界領域だから，特に$k<m$の場合，$W^m_k(\Omega)$の単位球は$L^2(\Omega)$において相対compactである．従って，

系： 上記の定理において更に $0<k<m$ とすると，斉次境界値問題：$L(x;D_x)u(x)=0$，$\mathcal{B}(x';D_{x'})\vec{u}(x')=\mathbf{0}$ の解 $u(x)\in W_k^m(\Omega)$ の全体は高々有限次元のベクトル空間を張る．

定理の証明であるが，Ω_{δ_1}（(2.1)をみよ）の上で恒等的に0であるような $u(x)$ に対しては不等式(2.21)は退化していない作用素に対する内部評価そのものである．問題は Γ の近傍にのみ台をもつ $u(x)$ に対して(2.21)を得ることであり；そのときの基礎となる常微分作用素 $\Lambda(x',t;\xi',D_t)$ と $\mathcal{B}^0(x';\xi')$ との対に関する不等式だけを示しておこう．

$\mathbb{R}^n$ から誘導された計量によって Γ は Riemann 多様体となっている．従って各点 $x'\in\Gamma$ において $\xi'\in T^*_{x'}$ の長さ $|\xi'|$ が定義される．そこで $T^*_{x'}$ の単位球を $S^*_{x'}$ とかこう：$S^*_{x'}=\{\xi'\in T^*_{x'};\ |\xi'|=1\}$．

命題： $L(x;D_x)$ と $\mathcal{B}(x';D_{x'})$ に定理と同じ諸条件をおこう．x' が Γ を ξ' が $S^*_{x'}$ を動くとき，(x',ξ') 及び $w(t)\in W_k^m(\mathbb{R}_+)$ によらない正定数 K_1 と K_2 が存在して，不等式

$$K_1\|w(t)\|_{W_k^m(\mathbb{R}_+)}\leqq\|\Lambda(x',t;\xi',D_t)w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}+ +|\mathcal{B}^0(x';\xi')\vec{w}|_{\mathbb{C}^b}\leqq K_2\|w(t)\|_{W_k^m(\mathbb{R}_+)} \tag{2.22}$$

が一様に成り立つ．

<u>注 意</u>: (1.2)で定義されたLに対して，その形式的共役作用素$L^{(*)}$を$L^2(\Omega)$において計算すると，それを再び(1.2)の形に整頓することが出来る．この$L^{(*)}$に対して(2.12)で定義される多項式を$\Phi^{(*)}_{x'}(\rho)$とおくならば，これと$\Phi_{x'}(\rho)$との関係は，$\Phi^{(*)}_{x'}(\rho) = \overline{\Phi_{x'}(k-m-1-\bar{\rho})}$であることが知られる．従って，形式的自己共役なL(例えば例1.2.)に対しては指数条件の(I-1)が決して成り立っていないことがわかる．

<u>例.2.1</u>: ここで再び例1.1の作用素$\mathcal{L}$をとりあげよう((1.7)をみよ)．今は$0<k\leqq m=2b$であればよい．常微分作用素$\Lambda(x',t;\xi',D_t)$はこの場合$t^k\Pi^0(x';\xi',D_t)$となる．すると方程式：$t^k\Pi^0(x';\xi',D_t)w(t)=f(t)$は，$w(t)$と$f(t)$を

$$\begin{cases} z(t) = -i^k\displaystyle\int_t^\infty \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}w(s)\,ds \text{，及び，} \\ g(t) = -i^k\displaystyle\int_t^\infty \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!\,s^k}f(s)\,ds \end{cases} \tag{2.23}$$

と変換することによって方程式$\Pi^0(x';\xi',D_t)z(t)=g(t)$に帰着される($w(t)\in W^m_k(\mathbb{R}_+)$，$f(t)\in L^2(\mathbb{R}_+)$のときそれぞれ$z(t)\in H^m(\mathbb{R}_+)$，$g(t)\in L^2(\mathbb{R}_+)$となる)．この場合，上に定義したShapiro-Lopatinskiの条件(むしろ基本補題)の意味が，退化していない場合との関連でよく理解されるであろう．尚この作用素$\mathcal{L}$は指数条件のうち(I-2)を満足していないが定理の結論は正しい例である．

§3. 固有値の漸近分布について.

序説の例1.2で考察した2階自己共役作用素

$$Lu(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} D_j\{\varphi(x) D_j u(x)\} + c(x)u(x), \qquad (3.1)$$

但し, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$,

を再度とりあげよう，ここで $c(x) \in \mathcal{B}(\bar{\Omega})$ かつ $\bar{\Omega}$ で $c(x) > 0$ とする（Lの定義域は $W_1^2(\Omega)$ である）。 Lのスペクトルは，可算個の正の固有値 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ からなる（λ_j は非減少でそれぞれの重複度は1とする）. それぞれの λ_j に応ずる固有函数 $u_j(x)$ は $\mathcal{B}(\bar{\Omega})$ に属し，全体で $L^2(\Omega)$ の完全正規直交系をなす.

Baouendi-Goulaouic [3] はこの $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ の $j \to \infty$ における漸近分布を調べた. $n=1$ の場合はよく知られた Titchmarsh の結果があって $\lambda_j \sim Cj^2$ であるが，$n \geqq 2$ のときが問題である. Lが退化していないならば λ_j の増大のし方は丁度 $j^{\frac{2}{n}}$ と同じ速さであったが，退化していて (3.1) の形の場合は次のようになる（[3] を参照されよ）:

$$\begin{cases} \lim_{j\uparrow\infty}\left(j^{-\frac{2}{n}}\lambda_j\right) = 0 \quad , \text{かつ}, \\ \text{任意の}\ \varepsilon > 0\ \text{に対して}\ \lim_{j\uparrow\infty}\left(j^{\varepsilon - \frac{1}{n-1}}\cdot\lambda_j\right) = \infty. \end{cases} \qquad (3.2)$$

さてこの漸近分布は Epstein の ζ-函数

$$\zeta_L(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s} \quad (\mathrm{Re}\, s > n-1 \text{ のとき絶対収束}) \qquad (3.3)$$

の s-平面における極の位置と密接に結びついている. いく

つかの具体例についてこの$\zeta_L(s)$の形を実際に求めてみると，固有値の漸近分布に関して(3.2)より幾分はっきりした結果が得られそうである．それを予想として述べよう：

予　想：　$n \geq 2$のとき，$\zeta_L(s)$の極のうち最も右にあるものは$s=n-1$である．$n=2$ならばこれは2位の極であり，$n \geq 3$なら1位の極である．そして境界Γの表面積を$|\Gamma|$とかくと

$$\left\{\begin{array}{ll} n=2\text{のとき}, & (s-1)\zeta_L(s)-\dfrac{|\Gamma|}{2\pi(s-1)} \text{ は } \mathrm{Re}\, s>\dfrac{1}{2} \text{ で正則}; \\ n\geq 3\text{のとき}, & \zeta_L(s)-\dfrac{(2^{n-1}-1)\omega_{n-2}\zeta(n-1)|\Gamma|}{2^{2n}\pi^{n-1}(s-n+1)} \text{ は } \mathrm{Re}\, s>n-\dfrac{3}{2} \text{ で正則} \end{array}\right\} \quad (3.4)$$

となる．ここに，ω_{n-2}は$(n-2)$次元単位球面：$\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2=1$の面積であり，$\zeta(n-1)=\sum_{j=1}^{\infty} j^{1-n}$はRiemannの$\zeta$-函数である．

筆者はまだこれの証明を完全に終えてはいないが，[7]においてその裏付けになる例をいくつか挙げた．ここでも別な例をひとつ挙げておこう．まず準備として，

例 3.1：　$\mathbb{R}_+$上の常微分作用素 $-\frac{d}{dt}\left(t\frac{du}{dt}\right)+tu$ は$W_1^2(\mathbb{R}_+)$を定義域とする正定値自己共役作用素であって，固有値の列は$\lambda_\ell=2\ell-1$ $(\ell=1,2,3,\cdots)$であり重複度は1，対応する固有函数は

$$v_\ell(t)=\frac{\sqrt{2}\,e^{-t}}{(\ell-1)!}L_{\ell-1}(2t) \quad (\ell=1,2,3,\cdots) \qquad (3.5)$$

となる．ここで $L_p(z)=e^{z}\left(\frac{d}{dz}\right)^{p}(e^{-z}z^{p})$ $(p=0,1,2,\cdots)$ は，Laguerreの多項式である．

例 3.2： 今度は $n\geqq 2$ としよう．$(n-1)$次元で境界のないcompactなRiemann多様体Mをとり，その上のLaplace-Beltramiの作用素を Δ_M とかく．すると $1-\Delta_M$ は $L^2(M)$ の中での正定値自己共役作用素（定義域は $H^2(M)$）であって，離散固有値の列 $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ $(1=\mu_1\leqq\mu_2\leqq\cdots\uparrow\infty$；重複度はそれぞれ1と数える），及び対応する固有函数の完全正規直交系 $\{\omega_j(x')\}_{j=1}^{\infty}$ を得る（Mの一般点を x' とかく）．そこで，積空間 $\mathcal{M}=\mathbb{R}_+\times M$ における作用素

$$Lu(t,x')\equiv-\frac{\partial}{\partial t}\left\{t\frac{\partial u}{\partial t}(t,x')\right\}+t(1-\Delta_M)u(t,x') \qquad (3.6)$$

を考えると，これは $L^2(\mathcal{M})$ の正定値自己共役作用素であって，$W_1^2(\mathcal{M})\equiv\{u(t,x')\in H^1(\mathcal{M})\,;\,tu(t,x')\in H^2(\mathcal{M})\}$ をその定義域とする．Lのスペクトルは離散固有値の列

$$\lambda_{\ell,j}=(2\ell-1)\sqrt{\mu_j}\quad;\quad \ell,j=1,2,3,\cdots\cdots \qquad (3.7)$$

からなりそれぞれ重複度1であって対応する固有函数は

$$u_{\ell,j}(t,x')=\sqrt[4]{\mu_j}\,v_\ell(\sqrt{\mu_j}\,t)\,\omega_j(x')\;;\;\ell,j=1,2,3,\cdots \qquad (3.8)$$

である（v_ℓは(3.5)で定義されたもの）．従って，L及び$1-\Delta_M$に対して(3.3)のようにそれぞれ定義されたEpsteinのζ-函数 $\zeta_L(s)=\sum_{\ell,j=1}^{\infty}\lambda_{\ell,j}^{-s}$ と $\zeta_{1-\Delta_M}(s)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^{-s}$ との間に

$$\zeta_L(s)=2^{-s}\zeta(s;\tfrac{1}{2})\zeta_{1-\Delta_M}(\tfrac{s}{2}) \tag{3.9}$$

なる関係が成り立つ（ここで，$\zeta(s;\frac{1}{2})=\sum_{j=0}^{\infty}(j+\frac{1}{2})^{-s}$）．
上記の予想のうち(3.4)はこの関係から帰納したものである（MとしてΓをとる）．

文献表

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg : Comm. Pure Appl. Math. Vol.12 (1959) p.p. 623~727.

[2] M.S. Baouendi : Bulletin Soc, Math. France 95 (1967) p.p. 45~87.

[3] M.S. Baouendi, C. Goulaouic : Archive Rat. Mech. Anal. Vol.34 (1969) p.p. 361~379.

[4] J.-L. Lions, E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes … Dunod, Paris (1968).

[5] S. Minakshisundaram : Canadian J. Math. 1 (1947) p.p. 320-327.

[6] N. Shimakura : J. Math. Kyoto Univ. Vol. 9 (1969) 275-335.

[7] N. Shimakura : Quelques exemples de ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre Proceeding of Japan Academy（印刷中）.