

ある種のゼータ関数

について

津田塾大 片山孝次

1. ここで用いる principle は, ある対称空間を他の対称空間に埋め込み, それを最初の空間に引き戻すことである。

ここでは, 群 $G = SL(2, \mathbb{R})$ の ν 次の対称テンソル表現をとりあげる。 ν が奇数であるとき, この表現により, 上半平面 H から, $\frac{\nu+1}{2}$ 次のジューゲル上半空間 \tilde{H} への非解析的な埋め込みが与えられる。このとき, \tilde{H} 上のゼータ関数を H 上に引き戻して, 非解析的な 'ゼータ関数' を定義する。その変換によりゼータ関数を定義し, その性質を考察する。

ν が偶数のときは, ある不定符号二次形式に attach するリーマン空間への埋め込みが与えられる。

2. $G \ni \sigma \longrightarrow M_\nu(\sigma) \in GL(\nu+1, \mathbb{R})$ を ν 次の対称テンソル表現とする。このとき, すべての $\sigma \in G$ に対して $M_\nu(\sigma)$ は, ある整係数正則行列 A_ν を不変にする。 ν が奇数ならば A_ν は交代行列, ν が偶数ならば A_ν は対称行列である。

ν を奇数とする。(以下添字 ν は省略する。) A は交代行列であるから, $U = U^{-1}$ 一行列 U による変換で

$$L = \begin{pmatrix} & T \\ -T & \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \quad n = \frac{\nu+1}{2},$$

$$0 < t_1 | t_2 | \dots | t_n, \quad t_i \in \mathbb{Z}$$

の形になる. $\tilde{G}(T) = \{ \Psi \in GL(\nu+1, \mathbb{R}) ; {}^t \Psi L \Psi = L \}$ とお

く, $\tilde{G} = \tilde{G}(I)$ とかく, $\Psi \in \tilde{G}(T)$ をとり

$$M_\Psi(\sigma) = \Psi U^{-1} M(\sigma) U \Psi^{-1},$$

$$N_\Psi(\sigma) = \begin{pmatrix} T & \\ & 1 \end{pmatrix} M_\Psi(\sigma) \begin{pmatrix} T & \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

とおけば

$$M_\Psi: G \longrightarrow \tilde{G}(T), \quad N_\Psi: G \longrightarrow \tilde{G}$$

の homeomorphisms である. K を G の極大コンパクト群と

し $\tilde{K}_\Psi \supset N_\Psi(K)$ とする \tilde{G} の極大コンパクト群 \tilde{K}_Ψ をと

れば, $z_i \downarrow z_i$ の G, \tilde{G} を K, \tilde{K}_Ψ とあることにより, N_Ψ

から $H \longrightarrow \tilde{H}$ の埋め込みがひきおこされる. 実際はその埋

め込み φ_Ψ を定めれば, \tilde{K}_Ψ の \tilde{H} 上の固定点 Z_Ψ を定

め, $Z = \tau[\sqrt{\tau}]$, $\tau \in G$, により

$$\varphi_\Psi(Z) = N_\Psi(\tau)[Z_\Psi]$$

とおけばよい。ここで2つの大小 $[]$ はそれぞれこの次群の空間 \tilde{G} の一次変換変換を示す。以上を図に示せば左の通りである。

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{N_\Psi} & \tilde{G} \\ \downarrow \sqrt{\Gamma} \text{作用} & & \downarrow Z_\Psi \text{作用} \\ H & \xrightarrow{\varphi_\Psi} & \tilde{H} \end{array}$$

ある。

たとえば $v=3$, $z=x+\sqrt{\Gamma}y$, $\Psi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ とすると

$$\varphi_\Psi(z) = {}^t \delta^{-1} \left(\sqrt{\Gamma} \begin{pmatrix} 3y & -3xy \\ -3xy & 3x^2y+y^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -bx & 3x^2 \\ 3x^2 & -2x^3 \end{pmatrix} \right) \delta^{-1} + \beta \delta^{-1}$$

である。これは形からみて非解析的である。上式で $\varphi_\Psi(z)$ は x, y に関して $v=3$ 次多項式と、2枚楕円の行列には y があらわしてあると、また $x=0$ のとき、1枚楕円の行列は対角型になることに注意する。この事実から、 Ψ が

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

の形であるとき一般の $v(\text{odd})$ に対して成立する。

すなわち一般に埋め込み φ_Ψ は非解析的、 $\varphi_\Psi(z)$ は x, y に関して v 次、 $\text{Re } \varphi_\Psi(z)$ には y があらわれない、また $\varphi_\Psi(y\sqrt{\Gamma})$ の“主要部”(つまり $\beta\delta^{-1}$ のついた部分) は対角型である。

3. Stufe T , Characteristic q, f である Γ - v 級群を

$\theta(y, f; Z)$, $Z \in \hat{H}$, とする。すなわち

$$\theta(y, f; Z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i (Z[m + T^{-1}y] + 2^t (m + T^{-1}y)f)}$$

である。ここで $[]$ はドット積の記号である。 $t = \det T$ とし l_k , $k=1, \dots, t$, $\in \text{mod } T$ での 整 非ベクトルとする。
 t -次のベクトル

$$\textcircled{H}(y, f; Z) = \begin{pmatrix} \theta(y+l_1, f; Z) \\ \vdots \\ \theta(y+l_t, f; Z) \end{pmatrix}$$

を考慮する。さらに $Z \in H$ に對し

$$F_\psi(y, f; z) = \textcircled{H}(y, f; \varphi_\psi(z))$$

とおく。この \textcircled{H} の変換公式はよく知られており、(Siegel [2]),
 それから F_ψ の変換公式をみちびくことが出来る。このとき
 次の予想を行えることが出来る。

(I) $\psi = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形のとさ、変換の '保型' 因子として

$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に對し

$$(cZ_{(v)} + d)^{\frac{v-1}{4}} (c\overline{Z_{(v)}} + d)^{\frac{v+3}{8}}$$

があらわされる. $\epsilon = \pm 1$

$$\begin{aligned} Z_{(v)} &= Z & v \equiv 3 \pmod{4} \\ &= \bar{Z} & v \equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

(ただしもちろん $M_{\Psi}(s) \in \widetilde{GL}(T)_{\mathbb{Z}}$ と仮定する.)

よって Ψ は独立であることは注意された. (I) は $v = 3, 5$ のとき直接計算して証明することが出来る.

4. あらわされるは 'セータ関数' ζ .

$$\zeta(g, f; s; \Psi) = \int_0^{\infty} (F_{\Psi}(g, f; \sqrt{y}) - P(T, y)) y^{s-1} dy$$

で定義する. $P(T, y)$ は T 次のベクトルで F_{Ψ} の定数項をとりぬくためのものである. (それは T, y に依存する.)

以下 Ψ は $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形にあるとする. このときつぎを証明することが出来る.

(II) ζ の積分は $\operatorname{Re} s > \frac{v(v+1)}{4}$ で絶対一収束である.

(III) 変換 $s \rightarrow \frac{(v+1)^2}{8} - s$ に関するある種の関数方程式をみたす.

(IV) $P(T, y)$ に depend して, ζ の全 s -平面における解析性が定まる.

ζ の 'ディリクレ級数表示' はつぎの予想をたてよ

じ。

(V) ζ の 1 成分を $\zeta(g, f; s, \psi)$ とすると, ζ は次の形
であらわされる.

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} l_{\psi}((m_n)^2)^{\frac{-s}{\nu}} \sum_{l < \infty} \gamma_l(s) Q_l(s, \chi(m))$$

ここで Q_l は一般化された Appell-Pochhammer の超
幾何級数 ($n-1$ 変数の), $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, l_{ψ} は一
次式を示し, $\chi(m)$ は m の成分に関する, あるかんたんな関
数である.

(V) は $\nu = 3$ に対して, もっと強い形で証明できる. すなわ
ち $\nu = 3$ のときは Pochhammer 関数がでるが, それが 3 次
の線型微分方程式をみたすことがわかっている. 上記級数表
示において, Q_l としては, 下添 3 つの基本解があらわされ
るのである.

つぎにオイラー積表示については, ψ にある種の整性条件
をつけるとき, 示す) の形の (つまりリーマン型) のオイラ
ー積が, ある lattice 上を動く項を含んであらわれ, そ
の lattice 上を走る無限級数の形にたどり着くが, $\nu = 3$ の場合
に証明できる. $\nu \geq 5$ については予想であるが, 正確にそれ
を書き表すのは相当面倒なので, たゞ上の事実を表明する

にとどめた。

5. ν が偶数のとき A は不定符号対称行列で、その sign は $(\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu}{2})$ または $(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+2}{2})$ である。このときは \widehat{G} を A の直交群とし、 G の極大コンパクト群 K の像 $M(K)$ を含む \widehat{G} の極大コンパクト群 \widehat{K} とすれば、やはり ν によって、 M から $H \longrightarrow \widehat{G}/\widehat{K}$ の埋め込みがとらえおとされる。このとき、ジーゲルの扱った (Siegel [1]) 不定符号二次形式に attach するテータ関数を用いて、 $H \times H$ 上の 'double modular 関数' と呼ぶものを定義することが出来る。この関数について、いろいろおもしろいことがあるのだが、まだきちんと報告する段階に至っていない。

6. いずれにしても以上の考察はほんの序の口であり、今後の増補は「非解析的整數論」のあたりらしいものが積たわつてくるように思われる。

1 つの失敗例として、 φ_ν の次数は $\nu=3$ のとき 3 次である。したがって何か 3 次剰余記号に関する結果が出そうではあるが、これは少くとも「素直な方法」では馬目である。実はこのことが上の考察の 1 つの動機であつたのであつた。

文献

[1] C. L. Siegel : Indefinite quadratische Formen
und Funktionentheorie.

I. Math. Ann. 124 (1951) 17-54

II. Math. Ann. 124 (1952) 364-387

註は I, II ともに Werke III 12 のところにある。

[2] C. L. Siegel : Moduln Abelscher Funktionen

Göttingen Nachr. 1960 No. 25, 365-427

註は Werke III 12 のところにある。