数理解析研究所講究録
89巻 1970年 6-28



# 概均質 vector 空間に付随する, Dirichlet 級数の一例。

東大 理数 新谷卓郎

## §0 導入

まず Riemann の zeta 函数の函数等式の証明を復習しよう。$\varphi(X)$ を実軸上の急減少函数, $s\in\mathbb{C}$ として

$$Z_\varphi(s)=\int_0^\infty \sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ x\neq 0}}\varphi(tx)\,t^{s}d^{\times}t$$

とおく。$\mathrm{Re}\,s>1$ なるとき, 上記積分は絶対収束して $\zeta(s)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)|x|^{s-1}dx$ に等しい。一方 Poisson の和公式によれば,

$$Z_\varphi(s)=\int_1^\infty \sum_{0\neq x\in\mathbb{Z}}\varphi(tx)\,t^{s}d^{\times}t-\frac{1}{s}\varphi(0)$$
$$+\int_1^\infty \sum_{0\neq x\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}(tx)\,t^{1-s}d^{\times}t+\frac{1}{s-1}\hat{\varphi}(0)$$

$$\left(\hat{\varphi}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{2\pi\sqrt{-1}xy}dy\right)$$

なる等式が $\mathrm{Re}\,s>1$ において成立する。従って $Z_\varphi(s)$ は $s=0$, $s=1$ に高々一位の極をもつ有理型函数に解析接続され, かつ函数等式

$$Z_{\hat{\varphi}}(1-s)=Z_\varphi(s)$$

を満足することがわかる。一方 $\mathrm{Re}\,s>0$ において積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)|x|^{s-1}dx$$

は絶対収束するが, これも $s$ の函数として全平面で有理形な函数に解析接続され, 函数等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(x)|x|^{s-1}dx = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)|x|^{-s}dx \qquad (\#)$$

を満足する。従って$\zeta(s)$も全平面で有理形な函数へ接続され、函数等式

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

を満足することがわかる。

すなわち$\zeta(s)$の函数等式の根拠はPoissonの和公式と変換則(#)であるということができる。佐藤幹夫氏は概均質vector空間の理論を建設して"正則概均質vector空間"Vの相対不変式の複素巾が(#)と類似の変換則を満足することを示し、V内の格子と相対不変式に対応する$\zeta$函数に類似の"distribution valued meromorphic function"を作ってその函数等式を証明された。筆者は以下の小文において特別な場合について概均質vector空間とその中の格子に普通の$\mathbb{C}$-valued Dirichlet級数を対応させることを試みた。すなわち§1において最も簡単な状況における概均質vector空間Vの理論の主結果を要約し、ついでVとその中の格子に付随す

る"Tate型積分"を考察し、極めて強い仮定のもとに、それから函数等式を満足するDirichlet級数をとりだしうることを示した。§2においては実Hermite行列のなすvector spaceと、Gauss整数を行列要素とするHermite行列のなす格子とについては§1の仮定が満足されることを示し次の結果を得た。

定理

$L^{(n)}$をGaussの整数を行列要素とする$n$次Hermite行列の作る格子とし、$L^{(n)*}$を、対角元がすべて偶数なるものよりなる$L^{(n)}$の部分格子とする。

$m_i(l)$を、Sylvester indexが$(i, n-i)$で行列式が$(-1)^{n-i}l$なる$L$の元達のなす種達の"種の測度"の和であるとする。さすればDirichlet級数

$$\Xi_i^{(n)}(s)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{m_i(l)}{l^s}$$

$$\Xi_i^{(n)*}(s)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{m_i^*(l)}{l^s}$$

（$m_i^*(l)$は$L^{(n)*}$について$m_i(l)$と同様に定義される）はともに$\mathrm{Re}\,s>n$で絶対収束し、$s=1, 2, \cdots, n$に高々一位の極をもつ

有理型函数に解析接続され，函数等式

$$
\begin{aligned}
&\Xi_i^{(n)}(n-s)\\
&= \pi^{-sn+\frac{n(n-1)}{2}}\Gamma(s)\Gamma(s-1)\cdots\Gamma(s-n+1)\times\\
&\times\sum_{j=0}^{n}(-1)^{(n-j)(n-1)}e^{\pi\sqrt{-1}s(\frac{n}{2}-i-j)}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\binom{n-i}{j-k}e^{2\pi\sqrt{-1}ks}\times\\
&\times\Xi_j^{(n)*}(s)
\end{aligned}
$$

を満足する。$\prod_{k=1}^{n}(s-k)\Xi_i^{(n)}(s)$ は位数高々一の整函数である。なお $\Xi_i^{(n)}(s)$ の極における residue を explicit に計算できる。

§1 $V$ を実数体上の vector 空間，$G$ を $GL(n)$ 内の連結実線型代数群とする。$V$ 内に代数的集合 $S$ があって，$V-S$ 内の点を通る $G$ の任意の orbit が $V$ 内の開集合となっているとき，対 $(G, V)$ を概均質 vector 空間とよび，$S$ をその特異点集合という。以下 $G$ の $V$ への作用を

$$(g,\ x) \longrightarrow g\cdot x \quad (g\in G,\quad x\in V)$$

と書く。$V$ の双対を $V^*$ とし，$G$ は $V^*$ に反傾的に作用するとして，その作用を

$$(g,\ y) \longrightarrow {}^t g^{-1}\cdot y \quad (g\in G,\quad y\in V^*)$$

と書く。定義より，

$$\langle g\cdot x,\ {}^t g^{-1}\cdot y\rangle = \langle x,\ y\rangle \quad (x\in V,\ y\in V^*)$$

である。$V$上の多項式$P$は，$G$の適当な有理指標$\chi$が存在して，$P(gx)=\chi(g)P(x) \quad (\forall g\in G, x\in V)$
が成立するとき，$(G, V)$の指標$\chi$の相対不変式とよばれる。以下$(G, V^*)$も概均質として，その特異点集合を$S^*$とする。$V^*$の相対不変式も同様に定義される。
以下$V$, $V^*$の相対不変式$P$, $Q$が存在して

$$P(gx)=\chi(g)P(x), \qquad Q({}^tg^{-1}\cdot y)=\chi^{-1}(g)Q(y)$$

であり，$x\in V-S$, $y\in V^*-S^*$ なるとき，$x$, $y$ の等方群を$H_x$, $H_y$とかけば，$\chi$は一次元torus $G/H_x[G,G]$ , $G/H_y[G,G]$の指標群の有限にて index の部分群を生成し，さらに$P$の Hessian は$V-S$で非退化であると仮定する。このとき$V-S$, $V^*-S^*$は同数個の連結成分の和となり，各々の連結成分は$G$の1つのorbitとなっている。それらを$V-S=\bigcup_{i=1}^{\ell} V_i$ , $V^*-S^*=\bigcup_{i=1}^{\ell} V_i^*$ とかこう。
$P$, $Q$の次数は等しい。それを$d$とする いま$d$次の多項式 $b(s)$, $b^*(s)$ を

$$Q(\operatorname{grad}_x)P^s(x)=b(s)P^{s-1}(x)$$
$$P(\operatorname{grad}_y)Q^s(y)=b^*(s)Q^{s-1}(y)$$

として定義する。$V$, $V^*$のEuclid measure $dx$, $dx^*$を互いにdualであるように定める。すなわち$\varphi\in\mathcal{S}(V)$

（以下 $V$ における急減少函数の空間を $\mathcal{S}(V)$, $V^*$ におけるそれを $\mathcal{S}(V^*)$ とかく） とするとき

$$\hat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x) e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle} dx$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = \int_{V^*} \hat{\varphi}(y) e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle} dy^*$$

であるとしよう。 さすれば $\mathrm{Re}\, s > 0$ で定義される $s$ の解析函数 $\int_{V_i} \varphi(x) |P(x)|^s dx$, $\int_{V_i^*} \varphi^*(x) |Q(x)|^s dx^*$ は, $\mathrm{Re}\, s$ が十分大なるとき成立する等式

$$\int_{V_i} Q(\mathrm{grad}_x)\varphi(x)|P(x)|^s dx$$

$$= (-1)^d (\mathrm{sgn}_i P)\, b(s) \int_{V_i} \varphi(x) |P(x)|^{s-1} dx$$

$$\int_{V_i^*} P(\mathrm{grad}_y)\varphi^*(y)|Q(y)|^s dy^*$$

$$= (-1)^d (\mathrm{sgn}_i Q)\, b^*(s) \int_{V_i^*} \varphi^*(y) |Q(y)|^{s-1} d^*y$$

（ $\varphi, \in \mathcal{S}(V)$ , $\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*)$ とし

$\mathrm{sgn}_i P$ は $V_i$ における $P$ の符号を意味する ）

を用いて全平面で有理型なる解析函数に接続される。（以上を通じて, $P$, $Q$ は $V$, $V^*$ で実数値をとると仮定されている）。 以上の状況のもとで次の定理が成立する。

定理A（M. Sato）

$\varphi$ を $\mathcal{S}(V)$ の元とする時, 次の変換公式が成立す。

$$b(s) = b_0 \prod_{i=1}^{d} (s - s_i) \qquad d(gx) = |\chi(g)|^{r} dx$$

とすれば　$\left( r = \frac{n}{d} \text{ である} \right)$

$$\int_{V_i^*} |Q(y)|^{s-r} \hat{\varphi}(y)\, dy^*$$

$$= b_0^{s} (2\pi)^{-ds} (\sqrt{-1})^{ds} \prod_{k=1}^{d} \Gamma(s + s_k) \times$$

$$\times \sum C_{ij}(s) (\mathrm{sgn}_i Q\ \mathrm{sgn}_j P)^{-s} \int_{V_j} |P(x)|^{-s} \varphi(x)\, dx$$

（$C_{ij}(s)$ は $e^{2\pi\sqrt{-1}s}$, $e^{-2\pi\sqrt{-1}s}$ のある多項式）。

以下$L$を$V$内の格子とし，$L^*$を$L$の双対格子とする。すなわち

$$L^* = \{ y \in V^*,\ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \ \text{ for } {}^{\forall} x \in L \}.$$

いま $L' = L - (L \cap S)$, $L^{*\prime} = L^* - (L^* \cap S^*)$ とおき，$\Gamma$を$L$を不変にする$G$の離散的部分群として次の"Tate型積分"を考える。すなわち $\varphi \in \mathcal{S}(V)$, $\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*)$, $s \in \mathbb{C}$ なるとき

$$Z_{\varphi}^{L}(s) = \int_{G/\Gamma} |\chi(g)|^{s} \sum_{x \in L'} \varphi(gx)\, dg$$

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = \int_{G/\Gamma} |\chi^{-1}(g)|^{s} \sum_{y \in L^{*\prime}} \varphi^*({}^t g^{-1} y)\, dg$$

ただし $dg$ は $G$（unimodularとする）の不変測度である。$L$あるいは$L^*$の二元 $x_1$, $x_2$ が$\Gamma$の作用でたがいにうつり得るとき，両者は同値であるという。

$x_1 \sim x_2$ とかく。$L \cap V_i$の諸元の同値類の代表系を $\{ x_i(\nu) \quad \nu = 1, 2, \cdots \}$，
$L^* \cap V_i^*$の同値類の代表系を

$$\{ y_i^*(\nu) \quad \nu = 1, 2, \cdots \}$$

とかく。$G$, $\Gamma$の部分群 $H_{i,\nu}$, $\Gamma_{i,\nu}$を次の如く定義する。

$$H_{i,\nu} = \{ g \in G, \quad g \cdot x_i(\nu) = x_i(\nu) \}$$
$$\Gamma_{i,\nu} = \Gamma \cap H_{i,\nu}$$

$G/H_{i,\nu}$ は写像 $g \in G/H_{i,\nu} \longrightarrow g \cdot x_i(\nu)$ によって $V_i$と同一視される。測度 $|P(x)|^{-n} dx$ が，($n$は定理Aで定義された) $V_i$の$G$不変測度であることに注意して，$H_{i,\nu}$の左不変測度 $dh_{i,\nu}$ を，$dg = |P(g \cdot x_i(\nu))|^{-n} d(g \cdot x_i(\nu))\, dh_{i,\nu}$ なるように定め，

$$m\,(x_i(\nu)) = \int_{H_{i\nu}/\Gamma_{i\nu}} dh_{i,\nu} \quad \text{と定義する。}$$

$H_{i,\nu}^*$, $\Gamma_{i,\nu}^*$ $m(y_i^*(\nu))$ を同様に定義される。いま次の仮定を"仮定 I"とよぼう。

仮定 I　Dirichlet 級数

$$\xi_i(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m(x_i(\nu))}{|P(x_i(\nu))|^s}$$
$$\xi_i^*(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m(y_i^*(\nu))}{|Q(y_i^*(\nu))|^s}$$

は $\mathrm{Re}\,s$ が十分大なるとき絶対収束する。

命題 1. 仮定 I が成立するならば、$Z_\varphi^L(s)$, $Z_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ を定義する積分は $\mathrm{Re}\,s$ が十分大なるとき絶対収束し、等式

$$Z_\varphi^L(s) = \sum_{i=1}^{l} \xi_i(s) \int_{V_i} |P(x)|^{s-n} \varphi(x)\,dx$$

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = \sum_{i=1}^{l} \xi_i^*(s) \int_{V_i^*} |Q(y)|^{s-n} \varphi^*(y)\,dy^*$$

が成立する。

一方 Poisson の和公式によって $Z_\varphi^L$, $Z_{\varphi^*}^{L^*}$ は次の如く変形される。

$$\begin{aligned} Z_\varphi^L(s) = &\int_{\substack{|\chi(g)|\geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^s \sum_{x\in L'} \varphi(g\cdot x)\,dg \\ &+ c_L \int_{\substack{|\chi^{-1}(g)|\geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi^{-1}(g)|^{n-s} \sum_{y\in L^{*\prime}} \hat{\varphi}({}^tg^{-1}\cdot y)\,dg \\ &- \int_{\substack{|\chi(g)|\leq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^s \Big\{ \sum_{x\in L\cap S} \varphi(g\cdot x) \\ &\qquad - c_L \sum_{y\in L^*\cap S^*} \hat{\varphi}({}^tg^{-1}\cdot y)\,|\chi(g)|^{-n} \Big\}\,dg \end{aligned}$$

ただし $\dfrac{1}{c_L} = \displaystyle\int_{V/L} dx$

$$\hat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle} dx$$

$$Z^{L^*}_{\varphi^*}(s)$$
$$= \int_{\substack{|\chi^{-1}(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi^{-1}(g)|^{s} \sum_{y \in L^{*\prime}} \varphi^*({}^t g^{-1} \cdot y)\, dg$$
$$+ C_{L^*} \int_{\substack{|\chi(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^{2-s} \sum_{x \in L'} \hat{\varphi}^*(g \cdot x)\, dg$$
$$- \int_{\substack{|\chi^{-1}(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi^{-1}(g)|^{s} \Big\{ \sum_{y \in L^* \cap S^*} \varphi^*({}^t g^{-1} \cdot y) - C_{L^*} \sum_{x \in L \cap S} \hat{\varphi}^*(g \cdot x) |\chi(g)|^{-1} \Big\}\, dg$$

ただし $\dfrac{1}{C_{L^*}} = \displaystyle\int_{V^*/L^*} dx^*$, $\hat{\varphi}^*(x) = \displaystyle\int_{V^*} e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x,\, y\rangle} \varphi^*(y)\, dy^*$.

よって

$$W^{L}_{\varphi}(s) = \int_{\substack{|\chi(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^{s} \sum_{x \in L'} \varphi(g \cdot x)\, dg$$
$$+ C_L \int_{\substack{|\chi^{-1}(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi^{-1}(g)|^{2-s} \sum_{y \in L^{*\prime}} \hat{\varphi}({}^t g^{-1} \cdot y)\, dg$$

$$X^{L}_{\varphi}(s) = \int_{\substack{|\chi(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^{s} \Big( C_L \sum_{y \in L^* \cap S^*} \hat{\varphi}({}^t g^{-1} \cdot y) |\chi(g)|^{-2} - \sum_{x \in L \cap S} \varphi(g \cdot x) \Big)\, dg$$

$$X^{L^*}_{\varphi^*}(s) = \int_{\substack{|\chi^{-1}(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi^{-1}(g)|^{s} \Big( C_{L^*} \sum_{x \in L \cap S} \hat{\varphi}^*(g \cdot x) |\chi^{-1}(g)|^{-2} - \sum_{y \in L^* \cap S^*} \varphi^*({}^t g^{-1} \cdot y) \Big)\, dg$$

とおけば，仮定Iが成立するとき，$W^{L}_{\varphi}(s)$ は $s$ の整函数であり，$X^{L}_{\varphi}(s)$，$X^{L^*}_{\varphi^*}(s)$ は $\mathrm{Re}\, s$ が十分大なるとき，$s$ の正則函数で，

等式 $Z_\varphi^L(s) = W_\varphi^L(s) + X_\varphi^L(s)$

$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = C_{L^*} W_{\varphi^*}^L(n-s) + X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$

が成立する。いま次の仮定を"仮定II"とよぶことにしよう。

仮定II $X_\varphi^L(s)$, $X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ はともに, $s$ の全平面で有理型な解析函数に接続され, 等式 $X_{\varphi^*}^{L^*}(s) = C_{L^*} X_{\varphi^*}^L(n-s)$ が成立する。

仮定I, 仮定IIが成立するならば, $Z_\varphi^L(s)$, $Z_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ はともに $s$ の有理型函数に解析接続され, 函数等式

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = C_{L^*} Z_{\varphi^*}^L(n-s)$$

を満足する。よって定理 A と命題 1 とをあわせて次の命題をうる。

命題 2

仮定I, 仮定II がともに満足されているならば, $\Xi_i(s)$, $\Xi_i^*(s)$, $(i=1, 2, \cdots, \ell)$ は全平面で有理型な解析函数に解析接続され, 函数等式

$$\Xi_i(n-s) = C_L b_0^s (2\pi)^{-ds} (\sqrt{-1})^{ds} \prod_{k=1}^{d} \Gamma(s+s_k) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{\ell} (sgn_i P\, sgn_j Q)^s C_{ji}(s) \Xi_j^*(s)。$$

（記号については定理 A を参照）を満足する。

いま仮定 I が満足されているとして，仮定 II が成立するための一つの十分条件を与えよう。

いま $G_1 = \{ g \in G ;\ \chi(g) = 1 \}$ とする。

仮定 $\mathrm{II}_1'$

任意の $\varphi \in \mathcal{S}(V)$ ，$\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*)$ に対して

積分 $\displaystyle\int_{G_1/\Gamma} \sum_{x \in L} \varphi(g \cdot x)\, dg$ ，$\displaystyle\int_{G_1/\Gamma} \sum_{y \in L^*} \varphi^*({}^t g^{-1} \cdot y)\, dg$

は絶対収束する。

仮定 $\mathrm{II}_2'$

$S$，$S^*$ はともに有限個の $G_1$-orbit（それぞれ $S_1, \cdots, S_m$ ; $S_1^*, \cdots S_{m^*}^*$ とする）の和となり，各々の orbit は $G_1$ の作用で不変な測度をもち（それぞれ $\mu_1, \cdots, \mu_m$ ; $\mu_1^*, \cdots, \mu_{m^*}^*$ とする）さらにそれら不変測度は次の性質をもつとする。

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(V)$，$\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*)$ に対して

$$\int_{S_i} \varphi(g \cdot x)\, d\mu_i(x) = |\chi(g)|^{-\lambda_i} \int_{S_i} \varphi(x)\, d\mu_i(x)$$

$$\int_{S_i^*} \varphi^*({}^t g^{-1} \cdot y)\, d\mu_i^*(y) = |\chi^{-1}(g)|^{r_i^*} \int_{S_i^*} \varphi^*(y)\, d\mu_i^*(y)$$

$(\forall g \in G\ ;\ \ r_i,\ r_i^*$ は定数 $)$ 。

いま仮定 $\mathrm{II}_1'$, $\mathrm{II}_2'$ が満足されているとして
$L \cap S_i$ の $\Gamma$- 同値類の代表系を $z_i(\mu)\ (\mu=1,2,\cdots)$
$L^* \cap S_i^*$ の $\Gamma$- 同値類の代表系を $z_i^*(\mu)\ (\mu=1,2,\cdots)$
としよう。

$H_{z_i(\mu)}$ を $z_i(\mu)$ の等方群とし, $\Gamma_{z_i(\mu)} = \Gamma \cap H_{z_i(\mu)}$
とおく, $G_1$, $H_{z_i(\mu)}$ の不変測度 $dg_1$, $dh_{z_i(\mu)}$
をそれぞれ, $dg = d^\times|\chi(g)|\, dg_1$

$$dg_1 = d\mu_i(g_1 \cdot z_i(\mu))\, dh_{z_i(\mu)}$$

なるように定め

$$\sigma_{z_i(\mu)} = \int_{H_{z_i(\mu)}/\Gamma_{z_i(\mu)}} dh_{z_i(\mu)} \qquad \text{とおく。}$$

$\sigma_{z_i^*(\mu)}$ も同様に定義する。

仮定 $\mathrm{II}_1'$, $\mathrm{II}_2'$ が満足されているならば,
$\sigma_{z_i(\mu)}$ , $\sigma_{z_i^*(\mu)}$ はともに有限で, $X_\varphi^L(s)$, $X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$
を定義する積分と和とは順序を交換することができ, 初等的変形ののち, $\mathrm{Re}\, s$ が十分大なるとき次式の成立することが証明できる。

$$X_{\varphi}^{L}(s) = C_L \sum_{i=1}^{m^*} \frac{1}{s-r+r_i^*} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i^*(\mu)) \right) \int_{S_i^*} \hat{\varphi}(y)\, d\mu_i^*(y) - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-r_i} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i(\mu)) \right) \int_{S_i} \varphi(x)\, d\mu_i(x)$$

$$X_{\varphi^*}^{L^*}(s) = C_{L^*} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s-r+r_i} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i(\mu)) \right) \int_{S_i} \hat{\varphi}^*(x)\, d\mu_i(x) - \sum_{i=1}^{m^*} \frac{1}{s-r_i^*} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i^*(\mu)) \right) \int_{S_i^*} \varphi^*(y)\, d\mu_i^*(y)\text{。}$$

（仮定 $\mathrm{II}_1'$ によって上式右辺の積分と級数は絶対収束する）

従って次の命題を得る。

命題 3 仮定 I，仮定 $\mathrm{II}_1'$，$\mathrm{II}_2'$ が成立しているなら仮定 II が成立している。

（注意 仮定 $\mathrm{II}_1'$ が成立しておらず，仮定 II の成立している例はある）

§2

以下 $V = V^{(n)}$ を $n$ 次の Hermite 行列のなす vector 空間とし，$G = G^{(n)} = GL(n, \mathbb{C})$ とする。G の V への作用は，　$g \cdot x = g x \bar{g}'$　である。

V とその双対を内積 $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr} xy$ によって

以後同一視する。さすれば ${}^t g^{-1}\cdot x = \bar{g}^{-1} x\, g^{-1}$ である。

$V$ の測度 $dx$ を

$$dx = K_n \prod_{i<j} d\,\mathrm{Re}\,x_{ij}\; d\,\mathrm{Im}\,x_{ij} \prod_i dx_{ii}$$
$$\left( K_n = 2^{-\frac{n}{2}} ,\quad x = (x_{ij}) \right)$$

と定める。さすれば Fourier 反転公式は下図の如くなる。

$$\hat{\varphi}(y) = \int \varphi(x)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle} dx$$
$$\Rightarrow \varphi(x) = \int \hat{\varphi}(y)\, e^{-2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle} dy \quad .$$

$L = L^{(n)}$ を行列要素がすべて Gauss の整数となる $V$ の元のなす格子とし、$\Gamma = \Gamma^{(n)} = GL(n, \mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$ とする。$L$ は $\Gamma$ の作用で不変で、$L$ の双対格子 $L^*$ は $L$ の元で対角要素がすべて偶数なるもののなす部分格子である。

$\chi(g) = |\det g|^2$, $P(x) = Q(x) = \det x$ とおけば、

$$P(g\cdot x) = \chi(g)\, P(x)$$
$$Q({}^t g^{-1}\cdot y) = \chi^{-1}(g)\, Q(y)$$

である。

また $d(g\cdot x) = \chi(g)^n dx$ であり従って前節の $\kappa$ はいまの場合 $n$ に等しい。

$S = S^* = \{ x \in V,\ \det x = 0 \}$、とおき、$V_i$ を正の固有値 $i$ 個、負の固有値 $n-i$ 個を有する $V$ の元のなす集合とすれば、

$V-S=V^*-S^*=\bigcup_{i=0}^{n} V_i$ で $V_i$ は $G$ の1つの orbit である。前節定理Aは、この特別な場合は、次のようになる。

定理 A′　いま

$$t_{ij}(s)=(-1)^{(n-i)(n-1)}e^{\pi\sqrt{-1}s\left(\frac{n}{2}-i-j\right)}\sum_{k=0}^{i}\binom{j}{k}\binom{n-j}{i-k}e^{2\pi\sqrt{-1}ks}$$

とおけば、

$$\int_{V_i}\Phi(x)|\det x|^{s-n}dx$$

$$=K_n\,\pi^{-sn+\frac{n(n-1)}{2}}\Gamma(s)\Gamma(s-1)\cdots\Gamma(s-n+1)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{n}t_{ij}(s)\int_{V_j}\varphi(x)|\det x|^{-s}dx$$

［証明］

定理Aより、$\varphi$ の台は $\det x\,\det\begin{pmatrix}x_{22}&\cdots&x_{2n}\\ x_{n2}&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix}\cdots x_{nn}=0$ なる集合と交わらない compact set であるとして証明すれば十分である。いま

$$B_+=\left\{\begin{pmatrix}t_1&&\\&\ddots&\\&&t_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\z_{ij}&&1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}t_1,\cdots,t_n>0\\ z_{ij}\in\mathbb{C}\end{matrix}\right\}$$

とおけば、$V$ は $B_+$ の作用に関してすでに概均質で、測度0の集合を無視すれば、

$$V_i=\bigcup_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)}B_+\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_1&&\\&\ddots&\\&&\varepsilon_n\end{pmatrix}\quad\text{である。}$$

（ただし $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1$,　$\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n=2i-n$）

いま $B_+$ の left Haar measure $db_+$ を

$$db_+ = d^\times t_1 \cdots d^\times t_n \prod_{i>j} d\,\mathrm{Re}\, z_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\, z_{ij}$$

で定義すれば,

$$\int_{V_i} \hat{\varphi}\, |\det x|^{s-n} dx$$

$$= 2^n \cdot K_n \int_{B_+} \sum_{(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)} \int \varphi(y)\, e^{2\pi\sqrt{-1}\langle y,\, b_+ \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \rangle} dy\, (t_1 \cdots t_n)^{2s} db_+$$

である。ここで積分の順序を交換すれば（その際多少注意を要する）初等的計算で定理の結果を得る。

以下仮定Iが成立していることを検証する。Hermite型式の理論によって $l$ を自然数とするとき, $\det x = (-1)^{n-i} l$ なる $L_{(i)} = L \cap V_i$ の元の全体は有限個の $\Gamma$-orbit の和となる。各軌道から一つずつ元をとってそれらを,

$x_1^{(i)}(l), \ \cdots\cdots, \ x_{h(l)}^{(i)}(l)$ とし, それらのうち $L^*$ に属するものを

$x_1^{(i)*}(l), \ \cdots\cdots, \ x_{h^*(l)}^{(i)}(l)$ としよう。

さすれば $\bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{h(l)} x_k^{(i)}(l)$, $\bigcup_{i=0}^{n} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{h^*(l)} x_k^{(i)*}(l)$ はそれぞれ, $L$, $L^*$ の $\Gamma$-同値類の代表系である。§1に従って $\Gamma(x_k^{(i)}(l))$, $m(x_k^{(i)}(l))$, $\Gamma^*(x_k^{(i)*}(l))$, $m^*(x_k^{(i)}(l))$ を定義する。

以下 $G$ の不変測度 $dg$ を，$i=0,\ldots,n$ なるとき，$m(x_k^{(i)}(l))$ が有限群 $\Gamma(x_k^{(i)}(l))$ の位数の逆数と等しくなるように正規化する（可能である）。

このとき $\sum_{k=1}^{h(l)} m(x_k^{(i)}(l))$，

は行列式 $(-1)^{n-i}l$ なる $L\cap V_i$ の元のなす種達の種の測度の和に等しい。$\sum_{k=1}^{h^*(l)} m(x_k^{(i)*}(l))$ についても同様のことがいへる。従って Hermite 型式の理論により，それらの $l\longrightarrow+\infty$ のときの増大度は $l$ の適当な巾乗でおさえられることがしられる。

よって Dirichlet 級数

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{h(l)} m(x_k^{(i)}(l))}{l^s}=\xi_i^{(n)}(s)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{h^*(l)} m(x_k^{(i)*}(l))}{l^s}=\xi_i^{(n)*}(s)$$

は $Re(s)$ が十分大なるとき絶対収束する。すなわち仮定 I が成立している。なお正規化された $dg$ は具体的には次のように記述される。いま $e_{ij}$ を $i$ 行 $j$ 列成分が $1$ で，他は $0$ なる $gl(n,\mathbb{C})$ の元とし，$\omega_{ij}$，$\omega'_{ij}$ をそれぞれ $e_{ij}$，$\sqrt{-1}\,e_{ij}$ と双対な $G$ 上の左不変微分形式とするとき，

$$\int f(g)\,dg=C_n\int f(g)\prod_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}\wedge\omega'_{ij}$$

$$\left(C_n=K_n\pi^{-\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}\Gamma(k)\right)$$

なお　後に用いられる定数 $\tau_n$ を次のように定義する。

$$\tau_n = \int_{G_1^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \prod_{i \neq j} dw_{ij}\, dw'_{ij} \prod dw'_{ii} \prod_{1<i<n} dw_{ii}$$

（$G_1^{(n)}$ の定義は下に与へられている）

次に仮定 $\mathrm{II}_1$, $\mathrm{II}_2$ が成立していることを検証する。Weil の論文 "La Formule de Siegel et les groupes classiques" (Acta 1965) 20頁の Lemma 5 によれば　今の場合

$$\int_{G_1/\Gamma} \sum_{x \in L} \varphi(g \cdot x)\, dg \qquad (\ \varphi \in \mathcal{S}(V)\ )$$

$$\int_{G_1/\Gamma} \sum_{y \in L^*} \varphi({}^t g^{-1} \cdot y)\, dg$$

がともに絶対収束することがわかる。よって仮定 $\mathrm{II}_1$ は成立している。

（ $G_1 = G_1^{(n)} = \{ g \in G,\ |\det g| = 1 \}$ ）

$V^{(n,r)}$ で rank $r$ の Hermite 行列のなす $V$ の部分集合，$V_i^{(n,r)}$ で正の固有値を $i$ 個，負の固有値を $r-i$ 個もつ元よりなる $V^{(n,r)}$ の部分集合を表わすことにすれば，$V_i^{(n,r)}$ は $G_1$ の1つの orbit で

$S = \bigcup_{r=0}^{n-1} \bigcup_{i=0}^{r} V_i^{(n,r)}$ である。

$V^{(n,r)}$ の測度 $d\mu^{(n,r)}$ を次の如く定めれば，それは $G_1$ の作用で不変である。

$r > 0$ なら $V^{(n,r)} \ni x = (x_{ij})$ なるとき

$$d\mu^{(n,r)} = \left| \det\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{r1} & \cdots & x_{rr} \end{pmatrix} \right|^{r-n} k_r \prod_{\substack{i>j \\ j\leq r}} d\,\mathrm{Re}\, x_{ij}\, d\,\mathrm{Im}\, x_{ij} \times \prod_{k\leq i\leq r} dx_{ii}$$

$r = 0$ ならば

$$d\mu^{(n,r)} = \delta(0)$$

そして

$$\int_{V_i^{(n,r)}} \varphi(g\cdot x)\, d\mu^{(n,r)} = |\chi(g)|^{r} \int_{V^{(n,r)}} \varphi(x)\, d\mu^{(n,r)}$$

$$(\varphi \in \mathcal{S}(V),\ g \in G)$$

である。よって仮定 $\mathrm{II}_2'$ が成立していることがわかる。

$L \cap V_i^{(n,r)}$ の $\Gamma$ 同値類の代表系として

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ x_r : L^{(r)} \cap V_i^{(r)} \text{ の } \Gamma^{(r)} \text{ 同値類の代表系} \right\}$$

をとることができることに注意すれば，$X_{\mathcal{L}}(s)$，$X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$ は前節よりさらに具体的に次の如く表示されることがわかる。

$$
\begin{aligned}
X^{L}_{\varphi}(s)
&= C_L \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{2ns-2n^2+2rn} \frac{C_n}{C_r} \gamma_{n-r}\, \Xi_i^{(r)*}(n) \times \\
&\qquad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}(x)\, d\mu^{(n,r)}(x) \\
&\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{2ns-2rn} \frac{C_n}{C_r} \gamma_{n-r}\, \Xi_i^{(r)}(n) \times \\
&\qquad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \varphi(x)\, d\mu^{(n,r)}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X^{L^*}_{\varphi^*}(s)
&= C_L^* \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{2ns-2n^2+2rn} \frac{C_n}{C_r} \gamma_{n-r}\, \Xi_i^{(r)}(n) \times \\
&\qquad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}^*(x)\, d\mu^{(n,r)}(x) \\
&\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{2ns-2rn} \frac{C_n}{C_r} \gamma_{n-r}\, \Xi_i^{(r)*}(n) \times \\
&\qquad \times \int V_{(i)}^{(n,r)}\, \varphi^*(y)\, d\mu^{(n,r)}(y)
\end{aligned}
\qquad (\#)
$$

。

（いまの場合 $C_L = 2^{\frac{n}{2}}$　$C_L^* = 2^{-\frac{n}{2}}$

また $\gamma_k$ は前々頁で定義された数

また $C_0 = 1$ とおく　）

最後に$\xi_i^{(n)}(s)$, $\xi_i^{(n)*}(s)$の極における留数を計算する。

いま$\varphi$の台がcompactで$V_i$に含まれているとする。さすれば

$$\xi_i^{(n)}(s)\int_{V_i}\varphi(x)|\det x|^{s-n}dx$$

$$=W_\varphi^L(s)+C_L\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{2ns-2n^2+2rn}\frac{c_n}{c_r}\gamma_{n-r}\times\xi_{i(n)}^{(r)*}$$

$$\times\int_{V_i^{(n,r)}}\hat{\varphi}(x)\,d\mu^{(n,r)}(x) \qquad (ナ)$$

である。

$W_\varphi^L(s)$, $\int_{V_i}\varphi(x)|\det x|^{s-n}dx$は, $\varphi$に関する仮定からともにexponential typeの整函数である。従って$\prod_{r=0}^{n-1}(s-n+r)\times$ $\times\,\xi_i^{(n)}(s)$はexponential typeの整函数の比として表示される整函数で, その位数は1を超えない。(Titchmarsh Theory of Functionsの255頁をみよ)さらに定理$A'$の証明と同じ方法で次の命題が証明される。

命題　$\varphi$の台がcompactで、$V-S$内に含まれるならば、

$$\int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}(x)\, d\mu^{(n,r)}(x)$$

$$= \kappa_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r)\Gamma(r-1)\cdots\Gamma(1) \times$$

$$\times (\sqrt{-1})^{rn}(-1)^{(r-i)(n+r+1)}\binom{r}{i} \times$$

$$\times \int_V \varphi(x)(\det x)^{-r}dx$$

この命題と前頁(4)より

$\xi_i^{(n)}(s)$の$s=n-r$における留数は

$$(-1)^{(n-i)r} C_L \frac{1}{2n} \frac{C_n}{C_r} \sigma_{n-r} \kappa_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r)\cdots\Gamma(1)\times$$

$$\times(\sqrt{-1})^{rn} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{(r-j)(n+r+1)} \xi_j^{(r)*}(n)$$

である。

同様にて$\xi_i^{(n)*}(s)$の$s=n-r$における residue は

$$(-1)^{(n-i)r} C_{L^*} \frac{1}{2n} \frac{C_n}{C_r} \sigma_{n-r} \kappa_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r)\cdots\Gamma(1)\times$$

$$\times(\sqrt{-1})^{rn} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{(r-j)(n+r+1)} \xi_j^{(r)}(n)$$

である。

以上で冒頭の定理は証明された。