数理解析研究所講究録
90巻 1970年 208-234

V 質疑応答，評

(3.) 討論の集録について．の(C) 講演者→討論者

(討論の集録について
講演者（南出成康）に対する討論の再現)

◦質問者（古川）　『最適制御 u_0 は可測函数になりますか？』

◦講演者（南出）の応答　『最初から可測函数の全体からなるバナッハ空間 X（例えば $X=L_p$）を考えているわけですから，最適制御 $u_0 \in X$ は，その空間の元として当然可測となります。』

◦質問者（古川）　『非線型系の場合には，どうなりますか？』

◦講演者の回答　『ここでは線型系の場合しか考察しておりません。非線型系への拡張も考えておりますが，それは別の機会に又発表したいと思っております。』

(3) 討論の集録について (b) 討論者→講演者

講演者(石川)に対する討論

・質問者(関土)『このような内容の論文は初めて伺ったものですが、大変面白そうなことをやられておられるように思います。どのような問題を考察されておられるのか、その問題だけでも理解させて頂きたいと思います。もう少し解りやすく説明して頂けませんでしょうか?』

北川先生御討論への講演者の御返事

[I]　偏微分方程式に変換することのメリットは次のようであると考えます。

第一に、むだ時間系はその有限の過去までの時間関数を現在の状態として有することを明確にできることであり、

第二には、入力関数 u と状態 x との陰な関係を表わす偏微分方程式が、半群を用いて解くことができるために、入力 u と状態 x との間の陽な関係が求められるということ。このことはもとのむだ時間系のままで入力 $u(\cdot)$ と状態 $x(t,\cdot)$ との間の関係を求めようとすると、シーケンシャルにしか求められないということと比べますと確かにメリットであると考えられます。

第三には、このように偏微分方程式に変換することによって最適解の存在と一意性、ならびにその表現を容易に示すことができることであります。これは偏微分方程式を差分近似して準最適解を求めたとき、この準最適解が最適解に収束することを議論するうえで非常に重要な意味を持ちます。このことについては筆者等の文献[4]を御参照下さい。

[II]　入力 u を可微分関数だけに限ったことによって生ずる不都合なことは、レギュレーター問題を考察する場合にはみられません。一般には超関数の意味での微分を考えることによ

って可微分性の仮定は取り除かれると考えます。

辻先生御討論に関する講演者の御返事

まず時間系を偏微分方程式系に変換しますと、境界条件を通して制御入力が加えられることになりますので、最適解を求めますときには境界条件の扱い方が問題になります。しかしながら最適条件は積分方程式でありますから、これを解くことは解析的にはもちろん不可能でありますし、数値的にも解くことは困難であると考えます。それ故、偏微分方程式を差分近似により常微分方程式に変換して準最適解をもとめることで満足することにしますと、境界条件の扱いはまったく容易になります。なおこの準最適解が最適解に収束することは筆者等の文献[4]を御参照下さい。

討論の集録

（Ⅰ）質問例

i）松尾氏の講演された論文に対して：

"系同定問題を考えておられる以上，系の構造はわかっていない筈ですが，ここに示されたように，ZLt により入力を制限することが可能なのでしょうか。"

辻 節三 より

ii）野村氏の講演された論文に対して：

"論文中の（35），（36）式をつくるに当り，境界条件（6-2）式はどのように考慮されているのでしょうか。"

辻 節三 より

iii）茅氏の講演された論文に対して：

a）"対象としている系の次元が10程度以下であれば，まず高次系モデル同定を行ない，実際系に合せて決定次元数を少なくしていくという逆の立場もあるのではないのでしょうか。"　辻 節三 より

b）"決定次元数の妥当性の判定基準に用いてあるMの具体的数値はどのようにして定めるものでしょうか。

また，仮決定した次元数が不適当な場合，この判定方法でそれが顕著に見い出せるものでしょうか。"

熊丸耕介 より

IV)．深道氏の講演された論文に対して：

a) "この論文では，時変系に対する収束速度に，時変系自身の収束速度の影響が入っていないように思われますがそれでいいのでしょうか"

辻 節三 より

b) "確率近似法を具体的に応用してみると，余り収束が早くなくて非常に苦労した経験がありますが，確率近似法を使える分野にはおのずと制約があるのではないのでしょうか。"

熊丸耕介 より

V) 浅居氏の論文に対して：

"極値が他の離れたセクションに移った場合よりも，割合い近い所に移った場合の方が，追従の悪さが後まで残っているように例題ではみうけられますが，これについて著者の見解は如何"

辻 節三 より

vi). 加納氏の講演された論文に対して：

"§3-1 における制御行列 C の決定規範は何か"

辻 節三 より

vii). 田中氏の講演された論文に対して：

" 学習というのは，知識や判断力を授ける Teacher なるものがいて，これを受けた Student は，自然と自分自身の中に知識，判断力を養っていき，これに基づいて事象に対して自分の判定を下し，その結果を Teacher の判定と比較検討していくことにより更に自分の知識，判断力を養っていく姿であると私は考えるが，氏の論文では，Student 自身による判定が考慮されておらず，これは学習というよりはむしろ教育というべきものではないでしょうか。"

熊丸耕介 より。

（Ⅱ） 質問に対する回答.

"非線形系状態推定法による系同定" 辻、熊丸：

に対して。

i). "本文（2-2.3）式における $\mu(\hat{x}_{k/k})$ の意味する所は何か." 茅氏よりの質問

回答：

$\mu(\hat{x}_{k/k})$ は種々の見方が考えられる。たとえば，非線形関数 $f(x)$ の推定値 $\hat{f}(x)$ を $f(\hat{x})$ として求めんがための修正項とみる場合，すなわち

$$\hat{f}(x) \simeq f(\hat{x}) + \mu(\hat{x}).$$

また，ここに示す2次近似法フィルタは，その推定規範として不偏推定値を採用しているが，一段予測値 $\hat{x}_{k+1/k}$ が不偏推定値となるように，$\mu(\hat{x}_{k/k})$ で補正したとみることもできる。いずれにしても，この $\mu(\hat{x}_{k/k})$ なる項が，非線形系状態推定においてここに示した推定法が従来の近似線形化法に比べて，より広い適用性と良好な推定結果をもたらし得た重要な項である。

ii) "例題（4）における，評価関数が未知であるという問題の設定は，どのような物理的背景から生じるものか"

茅氏よりの質問.

回答：

制御合成に際しては，当初より状態値や操作量の既知関数（たとえば2次形式など）が設計規範として与えられ，それを基にして操作量を決定していくことが普通行なわれている。ここで考えた未知損失（評価）関数とは，制御の規範ではあるが，操作量の事前合成に用いられる上述の意味の既知~~関数~~評価関数ではなく，特定の操作量と状態値が実現しなければ，それに対する損失とか効率の具体的数値が把握できない，すなわち制御の過程において学習探索されながらおのずと明らかとなり信頼比重が次第に増加していくがごとき，最初は未知の制御規範として用いられる損失関数である。これが静的な場合に対しては，最適化制御における山登り法のように，利得を大にする方向を探索しつつ最大傾斜の途を辿って頂点へできるだけ近く接近させる試行錯誤的方法が広く用いられている。本論文で考えたのは，状態遷移に動特性を伴なっており，いわば動的山登り問題と考えることができる。このような問題を考えるに当っては，実現状態値，操作量に対して逐次的に出現した特定の損失値を，単に局所的な勾配探索のみに用いるのではなく，大域的な未知損失関数の学習探索にも用いつつ，極値探索を行なえば，動的最適化問題をより一般的な学習問題と

して処理できるものと思われる。

（Ⅲ）アドバイス

i）"非線形状態推定法による系統同定：辻、熊丸"に関して

a）．未知関数を既知の独立関数系で有限項展開近似して，その展開係数を推定することにより未知関数学習を行なう場合，展開項数の決定規範が重要となる。これに関した参考文献を紹介し度い

北川敏男氏より

b）．極値探索において，対象を未知関数とみなしてこれを学習していく方法は，局所的探索には有効であるが，大域的探索に対しては多大の危険性を伴なうので，初めは，基本的立場より出発したがより得策であると思われる。

北川敏男氏より

論文7についての質問

(1) 熊丸(九大工学部)さんより私が述べたような学習のアルゴリズムでは先生が一方的で学習と云うよりは教育と呼ばれるものではないかとの質問を受けた。これについては加納先生の講演にありましたように強化(心理学において)を導入することが今後の課題と思われる。

(2) 工藤(九大理学部)先生からアルゴリズムによって推定されたものによる Bayes risk は実際の Bayes risk に収束するかと云う質問があったが、これについてはとけなかった。

(3) 北川(九大理学部)先生より Self-learning の criterion についての質問がありましたが、ここでは情報の少ないときの一つの criterion について述べました。

あいまいオートマトンによる学習制御

浅居喜代治　北嶋靖三（講演者）

辻節三氏の質問

目的関数の値にノイズが含まれる場合はどうか。

講演者の答

シミュレーション実験は標準偏差0.1，平均値0のノイズがあるものとして行なった。最適点に到達したのちの変動はこのノイズによるものである。他の試行法たとえばファクトリアル法などではノイズにより試行回数が多くなるが，この方法ではノイズによる影響が少ない。

中村嘉平氏の質問

試行が失敗したとき，メンバシップ関数を減少させるための係数αは定数か。

講演者の答

試行が成功のときは状態の遷移のメンバシップ関数$f(n)$を$f(n+1)=\alpha f(n)+(1-\alpha)$で増加し，失敗のときは$f(n)$はそのままにしておき出力選択のメンバシップ関数$g(n)$を$g(n+1)=\alpha g(n)$で減少させる。このときに用いた$\alpha$としては$\alpha=1-|(I-\bar{I})/\bar{I}|$により計算される値を用いている。また，ある状態における出力をすべて選択しても失敗であれば，前述のように$g(n)$

を減少させかつこの状態には最適出力が存在し得ないとして，他の状態からこの状態への遷移のメンバシップ関数を減少させる。このときの $f(n)$ の値は $f(n+1)=\alpha' f(n)$ により決定される。ここでは係数 α' は一定としているが，前述のように現在までに得られた情報から α' を決定できるように検討中である。

論文 9 （加納） について

質問 1. （質問者 辻） 制御過程の係数 c_{ij} のとり方と収斂との関係は如何か。
答 （ 北川 ） この問題は初め品質管理の問題として起ったものである。そこでは、分布関数及び特性関数を用いて c_{ij} による収斂と振動の問題を論じている。過去の値をいつまでも用いるのは分散が大きくなって結果がよくない。一般にはやく収斂させようとすると分散が大きくなり、両者は適当なところで均衡させねばならない。これらの点の詳しいことは、参考文献（4）に詳しく論じてあるので参照されたい。

質問 2. （質問者 浅居） パターン認識の場合には、目標関数は如何う考えられますか。
答 （ 加納 ） 只今 工藤さんの云われたように、パターン認識の場合には、判別関数を逐次構成してゆくのであるから、理想的な判別関数が目標関数となる。
質問 3. （質問者 浅居） 確率学習のときの π_i としては具体的には何のようにとればよいか。
答 （ 北川 ） これは ゲーム理論の場合の混合方略にあたる。これと同じに考えればよい。

論文 10 (古川) について

質問1、(質問者 加納) 時間Tが無限の場合の評価関数の最小値と、時間Tに最適停止を考えたときの最小値とは何のような関係にあるか。

答 (古川) その場合はどうとも云えない。両者の間にはっきりした関係はないと思う。

論文(4)についての質疑応答

北川先生の質問

1° よく知られた問題としては，どんな分野の問題がこの一般的理論の中に入るのか。

(答) 例えば，dynamic programming problem, Waldの sequential analysis, Chow-Robbins や Shiryaev 等の optimal stopping problem 等がこれに含まれる。

2° もっと adaptive な要素をくみいれてはどうか。

(答) この論文では system の運動法則が完全に分っていて，かつ complete observation の場合に限定しているが，これは見かけ上そうなっているだけであって本質的にはそうでない場合も含まれる。すなわち，system の運動法則が部分的にしか分らない，または全く分らない場合，および incomplete observation の場合，またその両方が同時に起った場合等，何らかの意味で unknown factor の有るときは，Bayes 的な適応制御の下での optimization は，しばしばこの論文の型の optimization に帰着させ得る。

3° 連続時間の system で、これと平行した議論が出来るか。

(答) 連続時間の system では、policy を時間に関して piecewise constant なものに限定すると扱いやすいが、policy の admissible class をそれ以上に広げると observation と action とのかね合いで定式化が非常に複雑で、まだ殆んど出来ていない。

松尾氏の論文について

九大理 北川 敏男

松尾氏の論文において，

$$(f|_s g)(t) = f(t), \qquad t<s$$
$$\qquad\qquad = g(t), \qquad t \geqq s$$

という，いわば継ぎはぎの関数変換が導入され利用されている。 $u = u|_t 0 + 0|_t u$ もこれに類するものである。

この考えは，形式的には，いろいろな方向へ拡張できる。

例えば，$\{f_i(t)\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $-\infty<t<\infty$ に対して分割 $(-\infty,\infty)=\sum_{i=1}^{n} I_i$, $I_i\cap I_j=\phi$ (i,j) を与えたとき

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ I_1 & I_2 & \cdots & I_n\end{pmatrix}(t) = f_i(t), \text{ for } t_i\in I_i$$

$(i=1,2,\cdots,n)$

によって，継ぎはぎの関数を定義することもできる。

そんなものが何の役に立つかということは，当然起る質問であるが，Spline関数の利用ということも，微分方程式の数値解法でみられるように，応用があるのは，制御問題でも注目してよいことであろう。

わたくし自身は，Operational Calculus の問題にとりかかっていたころ，一種の継ぎはぎ関数の利用を試みた経験がある。Operational Calculus で基本となる

演算は $Mf(t)=tf(t)$ と $Df(t)=\frac{df(t)}{dt}$ とである。後者は，移動 $T^{\alpha}f(t)=f(t+\alpha)$ $(-\infty<\alpha<\infty)$ と密接な関係があり，従って filter 論に関連してくる。そこで登場してくる関数は，解析的になるべく一般であり，かつ $|t|\to\infty$ の状況に制約がないことが望ましい。そういう観点から 継ぎはぎ関数 が必要になってくるわけである。$n=3$，$f_1(t)=f_3(t)\equiv 0$，$f_2(t)\equiv f(t)$ という場合が役に立ってくるわけである。

この意味で，松尾氏の論文の手法に関心をもつのであるが，C^{∞} に制限することの可否については，わたくしは，数学的方法のために，不当に局面を制限しているのではないかと危ぶむものである。

[1] Kitagawa, T.: The Characterizations of the Fundamental Linear Operations by Means of the Operational Equations, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 1, No. 1 (1940), 1–28.

辻節三氏・熊丸耕介氏の論文について

九大理　北川敏男

1. この論文のなかには、次のような統計学的問題がふくまれている。母数θの推定量$\hat{\theta}$があるとする。このとき、既知関数型$f(\cdot)$について、$f(\theta)$の推定値を求めようという問題である。大標本論的にいうと、$f(\hat{\theta})$によってそれが与えられるように想像される。もちろんこのためには、いろいろの附帯条件が関数型fについても、$\hat{\theta}$についても要請されることになる。ところで、精密標本論として問題をみるとどうなるか。これについては、十年近く以前に、私どもの研究室で論じたことがある。そののち、Univ. of California, Berkeleyの統計学教室でもNeyman達の研究がある。

それらの研究は、minimum variance, unbiassed estimatorに関するものであって、当面の辻・熊丸論文にすぐ役立つとはいえないように思われるが、しかし、これらの論文にみられる統計学者の用心は一顧には値するように思われる。

[1] Washio, Y., Morimoto, H. and Ikeda, N.: Unbiassed estimation based on sufficient statistics, Bull. Math. Sta-

となる。さてある特定の選点系 $\tau=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ に関連して，正規多項式系 $\{\varphi_\mu(t;\tau)\}$ $(\mu=1,2,\cdots,n)$ を導入する。ここに

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_\mu(t_i;\tau)\varphi_\nu(t_i;\tau)=\delta_{\mu,\nu}=\begin{cases}1 & (\mu=\nu)\\ 0 & (\mu\neq\nu)\end{cases}$$

すると

$$\hat{c}_\mu=\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_{i\cdot}\,\varphi_\mu(t_i;\tau)$$

とおくとき

$$\hat{g}_k(t)\equiv\sum_{\mu=1}^{k} \hat{c}_\mu\,\varphi_\mu(t;\tau) \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

はたしかに，$g(t)$ の推定になっているのではないかという見当がつく。

ここに $\hat{g}_k(t)$ の suffix k がどうとられるべきかが問題である。なぜそういうことを申すのかというと k が大きい程よりよい推定になるであろうと見当つけられるにもかかわらず，事情はそう簡単ではない。$\hat{c}_\mu$ は推定量であって不変な母数ではない。一般に $\hat{c}_\mu$ には $\{y_{ij}\}$ からくる変動がおりたたまれている確率変数なのである。このような事情のもとでは，極く粗い言い方をすれば，k が

tistics, 6 (1956), 69–93.
[2] Kitagawa, T.: The operational calculus and the estimation of functions of parameter admitting sufficient statistics, Bull. Math. Statistics, 6 (1956), 95–108.

2. この論文において，未知関数の推定問題がとりあつかわれているところで，次のような統計学的問題に直面しているのではないかと思う。それは趣旨を簡単に言いあらわすために，次のような形式で表現しよう。$\varphi(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ は未知関数である。この関数を推定するために，選点 $0 \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqq 1$ をとり，各 t_i で m 回づゝ測定したとしよう。各測定には，互い偶然誤差 ε が伴うものとしよう。第 i 番点 t_i における第 j 回目の観測値を y_{ij} としよう。すると $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$

$$y_{ij} = \varphi(t_i) + \varepsilon_{ij}$$

となっている。

このとき，$i=1,2,\cdots,m$ に対して

$$\bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = \varphi(t_i) + \bar{\varepsilon}_{i\cdot}$$

大きくなれば、推定量と真値との差すなわち偏り(bias)は次第に小さくなる一方、好からざることも生じる。すなわち他方、これに伴って分散が次第に大きくなる。そこで偏りを小さくして分散には眼をつぶることにするのか、あるいは偏りが小さくなれば、分散も小さくなるだろうと思うのは、あまり根拠のない想定である。

これに関してはさいごに参考論文をあげるのにとどめておこう。

[3] Kitagawa, T.: Estimation after preliminary tests of significance, Univ. of California Publications in Statistics, Vol. 3, No. 4 (1963), 147−186.

[4] 北川敏男：実験計画法講義、I、基礎編(1)、培風館(1955)、特に第3章確率化と標本分布、3.2.8. 直交比較とその分布、95−104. 就中 101−104における解説参照。

茅陽一氏の論文について

九大理　北川敏男

1、制御理論において模型の問題にされるとき、普遍的な妥当性よりも、当面の制御目標に関連しての適格性が問われるという場面によく遭遇する。ふつう両者はさほど鋭く対立的にはとられないことが多い。普遍的な妥当性さえ確保できていたら、それぞれの特殊な場合にも当然に適格なモデルになろうという想定があるからである。しかし費用、時間、労力、資源等々が有限であり、取扱うシステムが多変量になると、普遍的な妥当性は、実は観念上のことでしかないという事態になる。茅氏の論文はそうした場面を取扱い、こうした現実の制約のもとにおいての制御問題への接近として、評価されるべきものと思う。

2、茅氏の論文の数学的な面に関連して一言申し添えたいことは、Richard Bellman を中心として開発されたところの所謂 differential approximation の方法が、ここに想起されるということである。

[1] R. Bellman, H. Kagiwada and R. Kalaba: Quasilinearization, system

identification, and prediction, Memorandum RM-3812-RR, August, 1963.

[2] R. Bellman, R. Kalaba and R. Sridhar: Adaptive control via quasilinearization and differential approximation, RM-3928-PR, November, 1963.

[3] R. Bellman, H. Kagiwada and R. Kalaba: Identification of linear systems via numerical inversion of Laplace transforms, RM-4262-PR, August, 1964

これらはいわば最初の論文であり、その後成書にもまとめられて述べられている筈である。

古川氏の論文について

九大理　北川敏男

離散時間確率的体系に対する最適化問題において，最適停止の問題を取扱うのにあたり，著者は無限和の評価関数を採用することが，現実の問題をよく反映していないことを，研究の出発点においているように思われる。私のこの論文に対するコメントは，この出発点に関連しての発言である。

この種の問題において，最も大切なことは，決定というからには，決定の方式が具体的に与えられること，できれば方式のアルゴリズムが与えられるものであって欲しいということである。次にいかなる知識を事前に前提しているか，また決定過程の進行とともに，どれだけの情報が加えられてくるかという諸点に，関心を払うことである。この二点に関してみるかぎりでは，古川氏の論文では，いまだ未解決のように思われる。現実の問題をよく反映しようという著者の趣意は，このような未解決の方面にも貫徹して欲しいと思われる。