数理解析研究所講究録
93巻 1970年 86-92

非線形半群とその応用

お茶大 理　高村幸男

線形偏微分方程式の解の存在と一意性を証明する方法は種々知られているが、結果の精密さをあまり考慮しないとすれば

1. 楕円型方程式を直交射影の方法（あるいはそれの拡張にあたるLax-Milgramの定理）により解く。
2. 放物型方程式をHille-Yosidaの定理により楕円型方程式の解法に帰着させる。

のが便利と思われる。双曲型方程式も放物型と同じくHille-Yosidaの定理で取扱えるが、高階の場合ともなるとそう簡単ではない。

非線形偏微分方程式の場合、直交射影の方法に相当するものとしてmonotone（あるいはaccretive）作用素の理論があり、これを用いて楕円型方程式を割に簡単に解くことができる。また放物型方程式は、非線形半群の理論によって、楕円型の

方程式の解法に帰着させることができる。非線形双曲型方程式は，事実上まだ取扱いができない段階で，非線形半群の理論の適用は将来の問題であろう。

以上，今迄のところでは，非線形半群の理論によって非線形偏微分方程式論に新しい知見がもたらされたとは言えないが，線形の場合と平行した簡単な取扱いが可能になったという面はあると思われる。その事を2階偏微分方程式を例として説明しよう．

§1. Monotone 作用素の理論と楕円型方程式

Hを実または複素ヒルベルト空間とする。Hにおける（非線形）作用素Bが monotone であるとは

1) $\quad \mathrm{Re}\langle Bu - Bv,\ u - v\rangle \geq 0 \qquad \forall u, v \in D(B)$

が成立することである。以下実ヒルベルト空間のみを取扱う。

Minty の定理　Monotone 作用素 B が H 全体で定義されさらに連続であれば，任意の $\lambda > 0$，$f \in H$ に対し

$$(B + \lambda)u = f$$

は一意の解 $u \in H$ をもつ。

この定理を，次の Dirichlet 問題

$$2)\quad \begin{cases} (A - \lambda)u = f & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

に適用することを考える。こゝに Ω は R^n の有界領域で、境界 $\partial\Omega$ が適当になめらかなもの、A は

$$A\cdot u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j a_j(x, u, \partial_1 u, \cdots, \partial_n u) \quad , \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

によって定まる楕円型作用素とする。a_j が適当になめらかであれば $0 < \theta < 1$ なる θ が存在して

$$A\cdot u - A\cdot v = \sum_j \partial_j \Big\{ \sum_k \tilde{a}_{jk}\cdot \partial_k(u-v) + \tilde{a}_j\cdot(u-v)\Big\},$$

$$\tilde{a}_{jk} = \frac{\partial}{\partial u_k} a_j(x, v+\theta(u-v), \partial_1 v + \theta(\partial_1 u - \partial_1 v), \cdots),$$

$$u_k = \partial_k u$$

$$\tilde{a}_j = \frac{\partial}{\partial u} a_j(x, v+\theta(u-v), \partial_1 v + \theta(\partial_1 u - \partial_1 v), \cdots).$$

A が楕円型であるとは $(\tilde{a}_{jk})$ が positive definite であること・ $\exists c, \exists C > 0$

$$c|\xi|^2 \le \sum \tilde{a}_{jk}\xi_j\xi_k \le C|\xi|^2$$

とする。

$L^2(\Omega)$ における内積を $\underbrace{\langle\ ,\ \rangle}_{\text{ノルムを}\ \|\ \|}$ で表す。$C_0^\infty(\Omega)$ の元 f, g の H_1-内積を $\langle f, g\rangle_1 = \sum_{i=1}^{n}\langle \partial_i f, \partial_i g\rangle \ (= -\langle \Delta f, g\rangle)$ で定め、これから導かれたノルム $\|\ \|_1$ による $C_0^\infty(\Omega)$ の完備化を $H_1(\Omega)$ とする（Ω が有界領域であることに注意）。

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u-v\rangle &= -\sum_{j,k}\int \tilde{a}_{jk}\partial_j(u-v)\partial_k(u-v)\,dx \\ &\quad - \sum_j \int \tilde{a}_j(u-v)\partial_j(u-v)\,dx \\ &\le -c\|u-v\|_1^2 + K\|u-v\|\|u-v\|_1 \\ &\le \mu\|u-v\|^2\end{aligned}$$

であるから $\mu I - A$ は monotone ($L^2(\Omega)$ において)。いま

$$\langle Bu, w\rangle_1 = \langle(\mu I - A)u, w\rangle$$

によって B を定めれば B は $H_1(\Omega)$ における monotone 作用素 (形式的には $\mu I - A = -\Delta \cdot B$ 即ち $B = -\Delta^{-1}(\mu I - A)$)。

a_j の滑らかなことから $B : H_1(\Omega) \longrightarrow H_1(\Omega)$ の連続性が従うから Minty の定理より

$$Bu = g \qquad g \in H_1(\Omega)$$

の解 u は一意に存在する。 $f \in L^2(\Omega)$ に対し $g = -\Delta^{-1} f$ とおけば $g \in H_2(\Omega) \subset H_1(\Omega)$. よって

$$(\mu I - A)u = f \iff \Delta^{-1}(\mu I - A)u = \Delta^{-1} f \iff Bu = g.$$

[注意]

Minty の定理を拡張して具体的な方程式に応用することは種々試みられているが、例えば (Dirichlet 条件の下で)

$$\Delta u - u^{2p+1} = f \qquad p \text{ は自然数}$$

が一意の解を持つことが証明出来る。

§2 非線形半群と放物型方程式

ヒルベルト空間 H における (多価の) monotone 作用素 B に対し、その canonical restriction B^0 を次のように定義する：

$$B^0 x = y \quad (y \text{ は } y \in Bx,\ \|y\| = \inf \|Bx\| \text{ なるもの})$$

B が maximal monotone ならば $D(B)=D(B^\circ)$.

<u>基本定理</u> $\{T_t \mid t \geq 0\}$ が contraction の作る半群として極大であれば、その generator A_0 は次の family $\mathcal{L}$:

$\{-B^\circ \mid B$ は H における max. monotone 作用素$\}$

の中で極大なものであって $D(T_t)=\overline{D(A_0)}$. 逆に A が上の family $\mathcal{L}$ の中で極大であれば、A を generator とする極大な半群が一意に存在する。

この定理から、前節の非線形楕円型作用素 A によって定まる放物型方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u = Au, \quad u|_{\partial\Omega}=0, \quad u|_{t=0}=g \in H_2(\Omega)$$

の解が一意に存在することがわかる。また前節の注意より

$\frac{\partial}{\partial t}u = \Delta u - u^{2p+1}$ の場合も解が一意に存在する。

抽象的発展方程式 $\frac{d}{dt}u = Au$ は、非線形の場合には、resolvent 方程式 $(\lambda I - A)u = f$ が解けなくとも解ける事がある。即ち、(基本定理より少し一般に、) $A=-B^\circ$, B は max. monotone, であればよい。次にそのような例を与える。

[例] φ を単調増加な正の函数, $\tilde{\varphi}$ を φ のグラフが連続になるよう拡張した(多価)函数とする。また $\varphi^\circ(t)=\tilde{\varphi}(t-0)$ とおく.

$$Bu = -\tilde{\varphi}(\|u\|_1)\Delta u$$

なる B は max. monotone で，B の canonical restriction B° は次の通り：

$$B^\circ u = -\varphi^\circ(\|u\|_1)\Delta u .$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \varphi^\circ(\|u\|_1)\Delta u$$

は一意の解をもつ。しかし φ が不連続ならば $\tilde{\varphi} \neq \varphi^\circ$ であって、$(\lambda - \varphi^\circ(\|u\|_1)\Delta)u = f$ は必ずしも解をもたない。

§3 双曲型方程式の半群的取扱い

二階双曲型方程式 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = Au$ を次の形に書く：

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$-A$ はヒルベルト空間 H において max. monotone とする。A が線形ならば

$$\|u\|_1^2 = -\langle Au, u\rangle$$

によってノルムを定め，そのノルムに関して $D(A)$ を完備化したものを H_1 とする。H_1 は通常 $H_1(\Omega)$ と一致するが、ノルムは異なり、Banach空間となる。$-\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix}$ は $H_1 \times H$ において monotone なので、半群の理論を適用出来る。即ち resolvent 方程式

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \qquad f \in H_1 , \ g \in H$$

が解ければ、 3) も解ける.

A が非線形の場合には

$$\rho(u, v) = -\langle Au - Av, u - v \rangle$$

として距離 ρ を定義する。非線形半群を距離空間において論ずることは可能であるが、可成り強い条件を必要とするため、この方法で解ける非線形双曲型方程式はごく特殊なものに限られる。

［例］ §1 の注意を用いて

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u + \left(\frac{\partial}{\partial t} u\right)^{2p+1} = 0$$

の解が一意に存在することがわかる。