数理解析研究所講究録
94巻 1970年 93-102

群多様体に附随する bialgebra の構造について

広島大 理　柳原弘志

§1 local semi-derivations

k を標数 $p>0$ の体とし，$(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$ を k を含む局所環で，$\mathcal{O}/\mathfrak{m} \cong k$ とする．D を $\mathcal{O}$ から k への k-linear map で，次の条件をみたすとき，height r の local semi-derivation という．

i) $D(fg) = D(f)g(0) + f(0)D(g)$, $f \in \mathcal{O}$, $g \in \mathcal{O}^{p^r}$

但し $f(0)$, $g(0)$ は k の元で $f - f(0) \in \mathfrak{m}$, $g - g(0) \in \mathfrak{m}$ となるものである．更に

ii) $D(\mathcal{O}^{p^r}) = 0$

をみたすとき，D は special semi-derivation of ht. r とよぶ。

$\mathcal{D}_r(\mathcal{O})$ で ht. r の semi-derivation 全体のなす k 上のベクトル空間，$\mathcal{G}_r(\mathcal{O})$ で ht. r の special semi-derivation 全体のなす $\mathcal{D}_r(\mathcal{O})$ の部分空間をあらわすと

$$\mathfrak{S}_r(\mathfrak{O}) \subset \mathfrak{D}_r(\mathfrak{O}) \subset \mathfrak{S}_{r+1}(\mathfrak{O})$$

が容易に分る。

Proposition 1. $\mathfrak{O}$ が正則局所環で rank が n なら

$$\dim_k \mathfrak{S}_r(\mathfrak{O}) = p^{nr} - 1, \qquad \dim_k \mathfrak{D}_r(\mathfrak{O}) = p^{nr} - 1 + n.$$

§2. 代数函数体の semi-derivations

k を標数 $p>0$ の体で K を k 上有限生成かつ分離的な拡大体とし，$K_r = kK^{p^r}$ とおく。このとき，K の k-linear endomorphism D が次の条件をみたすとき，ht. r の K の k 上の semi-derivation という。

i) $x \in K_r$ ならば $D(x) \in K_r$

ii) $D(xy) = D(x)y + xD(y), \qquad x \in K, \ y \in K_r.$

更に D が

iii) $D(K_r) = 0$

をみたせば，special という。

$\mathfrak{D}_r(K/k)$ で ht. r の K/k の semi-derivation 全体の集合をあらわせば，これは K_r 上のベクトル空間になる。同様に $\mathfrak{S}_r(K/k)$ で ht. r の K/k の special semi-derivation 全体をあらわせば，$\mathfrak{S}_r(K/k)$ は K 上のベクトル空間になる。

そして, $\mathfrak{G}_r(K/k) \subset \mathcal{D}_r(K/k) \subset \mathfrak{G}_{r+1}(K/k)$

がなりたつ。

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ を K/k の分離超越基とするとき,

$$\begin{cases} D^{(r)}_{e_1 \cdots e_n}(x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}) = 1 \\ D^{(r)}_{e_1 \cdots e_n}(x_1^{e'_1} \cdots x_n^{e'_n}) = 0 \quad , \quad (e_1, \ldots, e_n) \neq (e'_1, \cdots e'_n) \end{cases}$$

(但し $0 \leq e_i, e'_j < p^r, \sum_{i=1}^n e_i > 0, \sum_{j=1}^n e'_j > 0$)

をみたす $D^{(r)}_{e_1 \cdots e_n}$ が $\mathfrak{G}(K/k)$ に存在し, これらが, $\mathfrak{G}(K/k)$ の K 上の基になることが分る. 特に, $\dim_K \mathfrak{G}(K/k) = p^{nr} - 1$ となる。(但し $n = \mathrm{tr.}\deg_k K$)。更に,

$\mathcal{D}_r(K/k) = \mathfrak{G}_r(K/k) \oplus \sum_{i=1}^n K_r E_{i,r}$ となる K_r 上1次独立な $\mathcal{D}_r(K/k)$ の元 $E_{1,r}, \cdots\cdots, E_{n,r}$ が存在することが分る.

次に k を完全体, X を k で定義された代数多様体で K を X の k 上の有理函数体とする。$x \in X$ に対し $\mathcal{O}_{x,X}$ を X の x における stalk とし K の部分環と同一視する. このとき $D \in \mathcal{D}_r(K/k)$ が $D(\mathcal{O}_{x,X}) \subset \mathcal{O}_{x,X}$ をみたせば, D は x で regular であるという。特に x が k-有理的で, X の単純点であるとする。$\{t_1, \ldots, t_n\}$ を $\mathcal{O}_{x,X}$ の正則パラメター系とすると 次のことが分る.

Proposition 2. $D \in \mathcal{D}_r(K/k)$ (resp. $D \in \mathfrak{G}_r(K/k)$)

が x で regular であるための必要十分条件は $D(t_1^{e_1}\cdots t_n^{e_n})$ と $D(t_j^{p^r})$ (resp. $D(t_1^{e_1}\cdots t_n^{e_n})$) が $\mathfrak{O}_{x,X}$ に含まれることである．但し $0 \leqq e_i < p^r$.

$\mathcal{D}_r(X, x)$ で x で regular な $\mathcal{D}_r(K/k)$ の元全体の集合をあらわすと，$\mathcal{D}_r(X, x)$ は $\mathfrak{O}^{(r)}$—module になる。但し，$\mathfrak{O}^{(r)} = \mathfrak{O}_{x,X} \cap K_r$. 同様に $\mathfrak{S}_r(X, x)$ を $\mathfrak{S}_r(K/k)$ の x で regular なもの全体とすると，$\mathfrak{O}_{x,X}$-module になることが分る．そして，Prop. 2 より次の結果を得る．

Proposition 3. X, x, $\{t_1, \ldots, t_n\}$ を Prop. 2 と同様とするとき，$\mathfrak{S}_r(X, x)$ は rank $p^{nr}-1$ の free $\mathfrak{O}_{x,X}$-module, $\mathcal{D}_r(X, x) = \mathfrak{S}_r(X, x) \oplus \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{O}^{(r)} E_{i,r}$ となる．

次に $\mathfrak{O}_{x,X}$ の local semi-derivation と $\mathcal{D}_r(X, x)$ の関係を考える．$D \in \mathcal{D}_r(X, x)$ のとき，$f \in \mathfrak{O}_{x,X}$ に対して

$$D_x(f) \equiv D(f)(x)$$

とおくと，これは k の元で D_x は $\mathcal{D}_r(\mathfrak{O}_{x,X})$ にぞくすることが容易に分る．D_x を D の x における local component という。明らかに，$D \in \mathfrak{S}_r(X, x)$ なら $D_x \in \mathfrak{S}_r(\mathfrak{O}_{x,X})$ になる．π_x で，この $\mathcal{D}_r(X, x)$ から $\mathcal{D}_r(\mathfrak{O}_{x,X})$ への対応 $D \to D_x$ を

あらわすことにする.

Proposition 4. $\pi_x : \mathfrak{G}_r(X, x) \longrightarrow \mathfrak{G}_r(\mathcal{O}_{x,X})$ は surjection で, kernel は, $\mathfrak{m}_{x,X}\mathfrak{G}_r(X, x)$ となる.
但し, $\mathfrak{m}_{x,X}$ は $\mathcal{O}_{x,X}$ の極大イデアルである.

X, Y を k で定義された代数多様体で, α を $X \to Y$ の k-morphism, x を X 上の k-有理点とする. $y = \alpha(x)$ とすると, $\alpha^* : \mathcal{O}_{y,Y} \to \mathcal{O}_{x,X}$ なる k-準同型を得る.

$D \in \mathcal{D}_r(\mathcal{O}_{x,X})$ とするとき, 容易に分るように, $D \circ \alpha^*$ は $\mathcal{D}_r(\mathcal{O}_{y,Y})$ の元である. このとき, $\alpha_*(D) = D \circ \alpha^*$ と定義する. α_* を tangential map とよぶ.

§3. 群多様体の不変 semi-derivations

以後, k は標数 $p > 0$ の代数的閉体とする.

G を k で定義された群多様体, $K = k(G)$ を G の k 上の有理函数体とする. a を G の k-有理点とし, L_a を $x \to ax$ なる G から G への k-morphism とする. このとき, L_a により, $K = k(G)$ の k-自己同型 L_a^* が引きおこされる.
K/k の semi-derivation D に対して, $DL_a^* = L_a^*D$

なる関係が，Gのすべてのk-有理点に対してなりたつとき，Dを左不変な semi-derivation とよぶ。これは次の条件と同値である．

i) DはGの各点で regular

ii) a, bをGのk-有理点とするとき，$D_{ab}=(L_a)_*(D_b)$。

更に，Gがアーベル多様体であれば，i)からii)は従う．

$\mathfrak{g}(G)$でGの左不変な semi-derivation 全体の集合をあらわすことにするとき，$\mathfrak{g}_r(G)=\mathfrak{g}(G)\cap\mathcal{D}_r(k(G)/k)$，$\gamma_r(G)=\mathfrak{g}(G)\cap\mathfrak{S}_r(k(G)/k)$ とおく．次のことが分る。

(イ) eをGの単位元とするとき，$\pi_e: \gamma_r(G)\to\mathfrak{S}_r(\mathcal{O}_{e,G})$ はk-同型，特に，$\gamma_r(G)$はk上$p^{nr}-1$次元のk上のベクトル空間となる．（但し，$n=\dim. G$）．又，$\{t_1,\dots,t_n\}$を$\mathcal{O}_{e,G}$の正則パラメター系とするとき，

$$\begin{cases} D_{e_1,\dots,e_n}(t_1^{e_1}\cdots, t_n^{e_n})=1 \\ D_{e_1,\dots,e_n}(t_1^{e_1'}\cdots, t_n^{e_n'})=0 \quad \text{for } (e_1,\dots,e_n)\neq(e_1',\dots,e_n') \end{cases}$$

となる$\mathfrak{S}_r(\mathcal{O}_{e,G})$の元$D_{e_1\dots e_n}$が存在するが，$(0\leq e_i<p^r)$ これに対して，$I_{e_1\dots e_n}\in\gamma_r(G)$を

$$\pi_e(I_{e_1\dots e_n})=D_{e_1\dots e_n}$$

となるようにとる.

(ロ) $H_r(G) = k \oplus \mathfrak{Y}_r(G)$ は k 上の Hopf algebra の構造をもつ。algebra としての構造は，$\mathrm{Hom}_k(K, K)$ の sub-algebra としての構造であり，coalgebra としての構造は

$$\Delta(I_{e_1 \cdots e_n}) = \sum_{(e')+(e'')=(e)} I_{e_1' \cdots e_n'} \otimes I_{e_1'' \cdots e_n''}$$

(但し和は $e_i = e_i' + e_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ をみたすもの全体にわたるものとする。又 $I_{0 \cdots 0} = \text{identity}$.)

によって定義される。antipode は $x \to x^{-1}$ なる $G \to G$ の k-morphism から自然に与えられる。この Hopf algebra は cocommutative である。又，$H(G) = \bigcup_{r=1}^{\infty} H_r(G) = k \oplus \mathfrak{g}(G)$ とおくと，これに cocommutative Hopf algebra の構造が入いることは明らかである。

(ハ) G が commutative であるための必要十分条件は，$H(G)$ が commutative algebra になることである。

§4. Purely inseparable isogenies

G, G' を k で定義された群多様体，α を $G \to G'$ の isogeny とする。このとき，$L = k(G')$ は $K = k(G)$ の部分体と同一視出来る。$A_\alpha = \mathrm{Hom}_L(K, K)$ とおき，$N(\alpha)$ を A_α の元 u で $uL_a^* = L_a^* u$ が G のすべての k-有理点 a に対してなりたつ

ものからなる k-subalgebra とする。このとき，$N(\alpha)^+ = \{u \in N(\alpha) \mid u(1) = 0\}$ とおくとき，$L = \{f \in K \mid u(f) = 0$ for $u \in N(\alpha)^+\}$ となり，かつ $N(\alpha) = k \oplus N(\alpha)^+$ で k 上の Hopf algebra となることが Cartier によって知られている。特に α が purely inseparable isogeny のとき，この $N(\alpha)$ は上で述べた $H(G)$ の Hopf subalgebra になることが分る。更に a を G の k-有理点とするとき，R_a を $R_a(x) = xa$ なる $G \to G$ の k-morphism とする。$u \in \mathrm{Hom}_k(K, K)$ に対し，$ad_a(u) = R_a^{*-1} u R_a^*$ とおき，ad を G の adjoint 表現という。このとき次の定理を得る。

Theorem 1. G を k で定義された群多様体とするとき，G の purely inseparable isogeny $\alpha : G \to G'$ と，$H(G)$ の adjoint 表現で不変な有限次元の Hopf subalgebra は 1 対 1 に対応する。

α を $G \to G'$ の purely inseparable isogeny とし，$N(\alpha)$ をその対応する $H(G)$ の Hopf subalgebra とする。$N(\alpha)$ は有限次元の cocommutative Hopf algebra であるから，その linear dual $N(\alpha)^D$ は commutative Hopf algebra になり，$\mathrm{Spec}(N(\alpha)^D)$ は finite group k-scheme の構造をもつ。

一方，e'をG'の単位元，$\mathfrak{m}'$を$\mathcal{O}_{e',G'}$の極大イデアルとするとき，$\mathfrak{a} = \alpha^*(\mathfrak{m}')\mathcal{O}_{e,G}$とおくと，$R = \mathcal{O}_{e,G}/\mathfrak{a}$はArtin local ringとなる。そして，$N(\alpha)^D$とRはk-algebraとして同型であることが示される。又$N(\alpha)^D$のcoalgebraとしての構造はGのgroup multiplicationから導かれることが分る。更に，この$\mathrm{Spec}(N(\alpha)^D)$が$\alpha : G \to G'$の核とみなされることが分る．

§5. Purely inseparable isogenyとmodular拡大．

G, G', α等は§4と同じとする。$L = k(G')$を$K = k(G)$の部分体と同一視しておく。このとき，Hopf algebra $N(\alpha)$に対して，$w : N(\alpha) \otimes_k K \to K$を$w(u \otimes f) = u(f)$によって定義すると，$w$はSweedlerの意味で$k(G)$から$k(G)$にmeasureしている。このことから$K/L$はmodular拡大であることが分る，一方，代数函数体のmodular拡大について次の結果が得られる，

Proposition 5. kを完全体，Lをk上の代数函数体とし，KはLのpurely inseparable modular拡大とする。$K = L(x_1) \otimes_L \cdots \otimes_L L(x_s)$，$[L(x_i) : L] = p^{e_i}$ならば，$L$の元

$t_{s+1}, \cdots\cdots, t_n$ があって, $\{x_1, \ldots, x_s, t_{s+1}, \ldots, t_n\}$ が K/k の分離超越基, $\{x_1^{p^{e_1}}, \cdots\cdots, x_s^{p^{e_s}}, t_{s+1}, \ldots, t_n\}$ が L/k の分離超越基となる.

このことから, 次の結果が容易に分る。

Theorem 2. kを代数的閉体とし, G, G' を kで定義された群多様体, α を $G \to G'$ の purely inseparable isogeny で k上で定義されているとする。このとき, $\mathcal{O}_{e,G}$ の適当な正則パラメター系 $\{t_1, \ldots, t_n\}$ をとれば, $\{t_1^{p^{e_1}}, \cdots\cdots, t_s^{p^{e_s}}, t_{s+1}, \cdots, t_n\}$ が $\mathcal{O}_{e',G'}$ の正則パラメター系となる.

そして, $[k(G) : k(G)] = p^{e_1 + \cdots + e_s}$. 又, $N(\alpha)^D$ は k-algebra として, $k[X_1, \ldots, X_s]/(X_1^{p^{e_1}}, \cdots\cdots, X_s^{p^{e_s}})$ と同型になる.

References

[1] H. Yanagihara, " On the structure of bialgebras attached to group varieties", to appear in J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I.

[2] K. Kosaki and H. Yanagihara, " On purely inseparable extensions of algebraic function fields", to appear in ibid.