数理解析研究所講究録
95巻 1970年 130-147

整数計画法における群論的手法

京都大学・数理工学教室　　茨木 俊秀

§1. まえがき

整数計画法に関する本格的研究が始まって既に十余年経過しているが，多くの研究者の努力にもかかわらず，まだ，必ずしも満足できる状態にあるとはいえない．問題の種類によっては，充分実用化されている場合もあるが，一般には，とくにLPに比較して，問題が残されている．

本報告では，数多くの既存のアルゴリズムの中で，最近注目をあびており，計算的にも比較的良好な結果の得られている群論的手法について述べる．

整数計画法のこの分野はやはりGomoryによって創始された．[(1)(2)] LPにおけるシンプレックス法の考え方を巧妙に利用することによって，整数計画問題を有限アーベル群上の最小化問題（群問題）に変換することから出発する．得られた問題は，諸アルゴリズム[(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)]によって比較的容易に

解ける．しかし，実は，上記の変換に際して，問題の拘束条件をやや緩和しているために，群問題の最適解が必ずしも元の整数計画問題の最適解であるとは限らない．この難点を解決するために，Shapiro 等は分枝限定法（Branch and Bound Method）を利用して，いくつかの部分問題を解くことによって最適解を求めることを試みている．[14] [15]

§2．整数計画問題の変換

整数計画問題P（詳しくは全整数計画問題）は一般に次のように書かれる．

$$
\begin{aligned}
P: \qquad & \min \quad \mathbb{c}x \\
& \text{subject to} \quad Ax = \mathbb{b} \qquad\qquad (1) \\
& \qquad x_j：\text{非負整数} \quad \text{if } j \notin S \\
& \qquad x_j = 0 \text{ or } 1 \quad \text{if } j \in S
\end{aligned}
$$

ただし，Aは $m \times (m \times n)$ 行列，$\mathbb{c}$ は $m+n$-ベクトル，$\mathbb{b}$ は m-ベクトルであり，その要素はすべて整数である．A は $[A' I]$ の形に書ける，すなわち，x はスラック変数も含むものとする．x は $m+n$ 次元の変数ベクトルである．整数計画問題では，その値を0あるいは1に限定された0-1変数がとりわけ重要であるが，S によって0-1変数の集合を示す．

問題Pから整数条件を除き，$x_j \geq 0$，$j=1, 2, \ldots, m+n$ のみ

を加えて得られるLP問題を$\bar{P}$と記す．（$j \in S$ならば$0 \leq x_j \leq 1$を考えるのが妥当であるが，これは$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$に含められているものと考える．）

$\bar{P}$をシンプレックス法によって解くには，次の手順に従がう．すなわち，Aを非基底行列R（$(m \times n)$行列）および基底行列B（$(m \times m)$行列）に分割し，それに伴ない，$\mathbf{x}$をも非基底変数$\mathbf{x}^R$および基底変数$\mathbf{x}^B$に，$\mathbf{c}$を$\mathbf{c}^R$および$\mathbf{c}^B$に分割し，$\bar{P}$を

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{c}^R \mathbf{x}^R + \mathbf{c}^B \mathbf{x}^B \\
\text{subject to} \quad & R\,\mathbf{x}^R + B\,\mathbf{x}^B = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x}^R,\ \mathbf{x}^B \geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

とする．ただし，Bは正則行列である．(2)はB^{-1}を両辺に乗じ，

$$\mathbf{x}^B = B^{-1}(\mathbf{b} - R\,\mathbf{x}^R) \tag{3}$$

を目標関数に代入することによって次の形に変換される。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \bar{\mathbf{c}}^R \mathbf{x}^R \\
\text{subject to} \quad & \mathbf{x}^B = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}R\,\mathbf{x}^R \\
& \mathbf{x}^B \geq 0,\quad \mathbf{x}^R \geq 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ただし，

$$\bar{\mathbf{c}}^R = \mathbf{c}^R - \mathbf{c}^B B^{-1} R.$$

したがって，

$$\text{(i)}\quad B^{-1}\mathbf{b} \geq 0 \qquad \text{および} \qquad \text{(ii)}\quad \bar{\mathbf{c}}^R \geq 0 \tag{5}$$

を満足する B^{-1} が得られれば，明らかに

$$x^B = B^{-1} b \qquad x^R = 0 \tag{6}$$

が $\bar{P}$ の最適解である．(6)の x^B が整数解であれば，(6)は同時に P の最適解を与えるが，一般には整数解ではない．ここで(4)において $x^B \geq 0$ の条件を除き，

$$\begin{aligned} x_j^R &: \text{非負整数} \quad \forall\ j \notin S \\ x_j^R &= 0 \text{ or } 1 \quad \forall\ j \in S \\ x^B &: \text{整数} \end{aligned} \tag{7}$$

という拘束条件の下で考えると，次の群問題 Q を得る．

Q:

$$\begin{aligned} &\min \ \bar{c}^R x^R \\ &\text{subject to} \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \alpha_b \ (\mathrm{mod}\ 1) \\ &x_j : \text{非負整数} \quad \forall\ j \notin S \\ &x_j = 0 \text{ or } 1 \quad \forall\ j \in S \end{aligned} \tag{8}$$

ただし，a_j を R の各列として，

$$\begin{aligned} \alpha_j &= B^{-1} a_j - [B^{-1} a_j] \\ \alpha_b &= B^{-1} b - [B^{-1} b] \end{aligned} \tag{9}$$

であって，列の各要素の整数部分をとったものである．Q においては x^B が完全に消去されて，x^R のみに関する問題になっていることに注意する必要がある．また，Q においては

$$\bar{c}^R \geq 0 \tag{10}$$

が満たされていると仮定しているが，これは条件(5)の片方であって双対許容条件(Dual Feasible Condition)と呼ばれているものである．

§3. 群問題Q

本章では，Qに関する有益な2，3の性質を検討する．

まず，(8)式の意味を検討するために，(8)式の等式

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j - \alpha_b = 0 \quad (\mathrm{mod}\ 1) \tag{11}$$

の両辺にBを乗じて考えると，これは

$$R x^R - b = 0 \quad (\mathrm{mod}\ B x^B) \tag{12}$$

に等しい．ただし，x^Bは任意の整数ベクトルである．これは$A = [R\ B]$に対して，モジュール

$$M(A) = \{ A x \mid x: \text{整数ベクトル} \}$$

$$M(B) = \{ B x^B \mid x^B: \text{整数ベクトル} \}$$

より構成される剰余加群

$$G = M(A) / M(B) \tag{13}$$

を考えていることに相当する．すなわち，(12)は$R x^R$がGの元としてbに等しいことを要請している．Aは単位行列を含んでいるから，M(A)はすべてのm次元整数ベクトルより成るモジュールである．

以上の考察より，加群GがQにおいて本質的な役割を果し

ていることが理解される．Gの構造は線形加群における単因子定理[12]によって完全に解明されている．すなわち，基底行列Bに適当な変換を施こせば，

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_m \end{pmatrix} \tag{14}$$

の標準形に書くことができ，Gは

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_m \tag{15}$$

のように直和分割できる．ただし，G_iは位数ε_iの巡回群であって　$\varepsilon_1 | \varepsilon_2 | \cdots | \varepsilon_m$　（ε_iはε_{i+1}を割り切る）である．とくにGの位数は　$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_m = |\det B|$ である．以後，

$$D = |\det B|$$

と置く．(15) の直和分解はアーベル群の基本定理として知られているが，Gの簡便な表現手段を与える．すなわち，(15)より位数1のG_iを除き，

$$G \cong G_{i_1} \oplus G_{i_2} \oplus \cdots \oplus G_{i_p}$$

とする時，Gの要素を p-tuple $(l_1, l_2, \ldots, l_p)$，$0 \le l_i \le \varepsilon_j - 1$，によって記せば良い．各 p-tuple を辞書式順序にしたがい並べればGの要素を列挙する場合都合がよい．

(9)より容易に分かるように，α_j，α_b をそれぞれD倍すると，整数ベクトルになる．そこで，

$$\alpha_j' = D\alpha_j \quad , \quad \alpha_b' = D\alpha_b \tag{16}$$

と書くと(11)式は次のようになる．

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j' x_j = \alpha_b' \pmod{D} \tag{17}$$

(17)式によれば，すべての計算を整数のみを用いて行なえるため，丸め誤差の影響を除くことができ都合がよい．さて，(17)式の意味は，モジュール $M=\{\sum \alpha_j' x_j \mid x_j:\text{整数}\}$ の元を剰余加群 M/N の元とみなすことである．ただし，

$$N=\{\sum_{j=1}^{n} D e_j x_j \mid x_j:\text{整数}\}\cap M$$

$$e_j=(0\cdots 0\overset{j}{1}0\cdots 0)^T.$$

これは，上での考察より，

$$G = M(A)/M(B) \cong M/N \tag{18}$$

を導く．そこで

$$f(\alpha')=\bar{\alpha}=\alpha'+N \tag{19}$$

によって定まる準同形写像 $f: M\to M/N$ を導入すると，(17)式は次式に等しい．

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j x_j = \bar{\alpha}_b \tag{20}$$

結局，Qは(20)を満足する非負整数（$j\in S$ ならば 0 or 1）x_j の組で $z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ を最小にするものを見出す問題である．

§4．問題Pと問題Qの関係

Qの最適解を $\tilde{x}^R$ とし，(3)によって $\tilde{x}^B$ を計算する時，$\tilde{x}^B$（これは整数ベクトルである）が

$$\hat{x}^B \geq 0, \quad \text{and} \quad \hat{x}_j^B = 0 \text{ or } 1 \quad \text{if } j \in S$$

を満足すれば，($\hat{x}^R$, $\hat{x}^B$)はPの最適解であることに注意しよう．なぜなら，Qは$x^B \geq 0$という条件を持たないだけPに比べ緩い拘束条件下の問題である．したがって，Qの最適解がPの許容解であれば，実はPの最適解でもある．

次節以下に述べるようにQを解くのは比較的簡単であるため，Pのかわりに Qを解くのは大いに意味のあることである．しかし，Qの最適解がPの許容解でない場合には，White[4]によるQのr番目の最適解，r= 1, 2, …，を順次求め最初のPの許容解をPの最適解とする方法，あるいは8章の分枝限定法に依らねばならない．

§5．群問題Qを解くアルゴリズムⅠ

本章ではGomory[2]によって提案され，White[4], Mine-Narihisa,[5] Ibaraki[6]等によって改良されたQのアルゴリズムを述べる．ただし，3章の終りで述べたように，QをGの要素間の演算を用いて定義する．すなわち，

$$
\begin{aligned}
Q: \qquad & \min \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \\
& \text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j x_j = \bar{\alpha}_b \qquad (21) \\
& \qquad x_j：非負整数 \qquad \text{if } j \notin S \\
& \qquad x_j = 0 \text{ or } 1 \qquad \text{if } j \in S,
\end{aligned}
$$

ただし，$\bar{c}_j \geq 0$, $\bar{\alpha}_j \in G$. アルゴリズムを導びくために，

$$\psi_s(\bar{\alpha}) = \{ \min \sum_{j=1}^{s} \bar{c}_j x_j \mid \sum_{j=1}^{s} \bar{\alpha}_j x_j = \bar{\alpha}$$
$$x_j: \text{非負整数} \ \forall j \notin S,\ x_j = 0 \text{ or } 1 \ \forall j \in S \}$$

と置く．当然ながら $\psi_n(\bar{\alpha}_b)$ が我々の求める値である．$\psi_s(\bar{\alpha})$ に対し，次の関係式が成立する．

$$\psi_s(\bar{\alpha}) = \min\{\psi_s(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s)+\bar{c}_s,\ \psi_{s-1}(\bar{\alpha})\} \quad s \notin S \quad (22)$$

$$\psi_s(\bar{\alpha}) = \min\{\psi_{s-1}(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s)+\bar{c}_s,\ \psi_{s-1}(\bar{\alpha})\} \quad s \in S \quad (23)$$

(23) 式の適用は $s=1, 2, \cdots$ の順に計算していけば容易であるが，(22) 式は $\psi_s(\bar{\alpha}-\bar{\alpha}_s)$ の値を $\psi_s(\bar{\alpha})$ の計算に先立って求めておかねばならないためやや工夫を要する．これは次のアルゴリズムにまとめられている．

Step 1:
$$\psi_0(\bar{\alpha}) = (D-1)\max_j \bar{c}_j, \quad \bar{\alpha} \in G$$
$$\psi_s(e) = 0, \quad s = 1, 2, \cdots, n \quad (24)$$

と置く．ただし，e は G の単位元である．$s=1$ と置く．

Step 2: $s \notin S$ ならば Step 3 へ．$s \in S$ ならば (23) 式にしたがい，すべての $\bar{\alpha} \in G$, $\bar{\alpha} \neq e$ に対して $\psi_s(\bar{\alpha})$ を計算する．$s=n$ ならば計算終了．さもなければ，s を 1 増加させ Step 2 に戻る．

Step 3: $P_{s-1} = G$ と置く．

(i) $$\psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*) = \min\{\psi_{s-1}(\bar{\alpha}) \mid \bar{\alpha} \in P_{s-1}\} \quad (25)$$

を満足する $\bar{\alpha}^*$ を求め，$\psi_s(\bar{\alpha}^*) = \psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*)$ と置く．これ

から出発し，$\psi_s(\bar{\alpha}^*+k\bar{\alpha}_s)$ を計算する．

$$\psi_s(\bar{\alpha}^*+k\bar{\alpha}_s)=\min\{\psi_s(\bar{\alpha}^*+(k-1)\bar{\alpha}_s)+\bar{c}_s,\ \psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*+k\bar{\alpha}_s)\}$$

$$k=1,2,\ldots,O(\bar{\alpha}_s)-1, \qquad (26)$$

ただし $O(\bar{\alpha}_s)$ は $\bar{\alpha}_s$ の位数である．

(ii) $P_{s-1}-\{\bar{\alpha}^*,\bar{\alpha}^*+\bar{\alpha}_s,\ldots,\bar{\alpha}^*+(O(\bar{\alpha}_s)-1)\bar{\alpha}_s\}$ を改めて P_{s-1} と置き，$P_{s-1}\neq\phi$（空）ならば (i) に戻り，ϕ ならば (iii) へ．

(iii) $s=n$ ならば計算終了．さもなければ，s を 1 増加し Step 2 に戻る．

計算終了時点で，$\psi_n(\bar{\alpha}_b)$ が最適値を与える．最適解を求めるには，上の計算順序を示す適当なインデックスを記憶しておき，$\psi_n(\bar{\alpha}_b)$ を導出したステップをさかのぼる必要がある．この点に関しては，たとえば，(11) 参照．

このアルゴリズムは DP の直接の応用であり，その正当性はほぼ自明であるが $\psi_s(\bar{\alpha}^*)=\psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*)$ の成立することのみ簡単に証明しておく．これが成立しないと仮定すると，

$$\psi_s(\bar{\alpha}^*)=\psi_s(\bar{\alpha}^*-\bar{\alpha}_s)+\bar{c}_s<\psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*)$$

が成立し，

$$\psi_s(\bar{\alpha}^*-\alpha_s)<\psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*) \qquad (27)$$

を得る．つぎに，$\bar{\alpha}^*-\alpha_s$ に対して (26) を適用すると，$\psi_s(\bar{\alpha}^*-\alpha_s)=\psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*-\alpha_s)$ の場合には (27) より $\psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*-\bar{\alpha}_s)<\psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*)$ を得るため，(25) の仮定に矛盾する．したがって，

$$\psi_s(\bar{\alpha}^*) = \psi_s(\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}_s) + \bar{c}_s = \psi_s(\bar{\alpha}^* - 2\bar{\alpha}_s) + 2\bar{c}_s$$

でなければならないが，同様の議論を繰り返すと

$$\psi_s(\bar{\alpha}^*) = \psi_s(\bar{\alpha}^* - O(\bar{\alpha}_s)\bar{\alpha}_s) + O(\bar{\alpha}_s)\bar{c}_s$$

が結論される．$O(\bar{\alpha}_s)\bar{\alpha}_s = e$ のため，結局 $\bar{c}_s = 0$ でなければならない．しかし，$\bar{c}_s = 0$ を仮定すると，

$$\psi_s(\bar{\alpha}^*) = \psi_s(\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}_s) = \cdots = \psi_s(\bar{\alpha}^* - (O(\bar{\alpha}_s)-1)\bar{\alpha}_s) < \psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*)$$

となりやはり矛盾である．結局 $\psi_s(\bar{\alpha}^*) = \psi_{s-1}(\bar{\alpha}^*)$ が証明された．

§6. Qのグラフに依る解釈

Qに対応して，グラフ $\Gamma = [N, A]$ を考える．ただし，Nは節点の集合であって，Gの要素 $\bar{\alpha}$ に対応して節点 $\bar{\alpha}$ を持つ．Aは有向枝の集合であって，

$$(\bar{\alpha}, \bar{\alpha} + \bar{\alpha}_j), \quad \bar{\alpha} \in G, \ j = 1, 2, \dots, n \qquad (28)$$

の形に書けるすべての有向枝より成る．Γにおいて，各枝 $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha} + \bar{\alpha}_j)$ が $\bar{c}_j$ の長さを持つと考えよう．以上の解釈の下で，QはΓの節点 e（Gの単位元に対応）から節点 $\bar{\alpha}_b$ に至る最短経路を見出す問題に等しいことが分かる．最短経路の問題は広く研究されており，種々の能率の良いアルゴリズムが知られている．次節のアルゴリズムはその内の一つ Dijkstra のアルゴリズム[13]をΓに適合するように変形したものである．

§7. Ωのアルゴリズム II

最短経路問題に基ずくアルゴリズムは Shapiro(7) によっても考察されたが，以下に述べるものは Greenberg(8), Hu(9), Ibaraki(10) 等による．アルゴリズムの各 Step においてラベル $(\bar{\alpha}, c(\bar{\alpha}))$ が $\bar{\alpha} \in G$ に対して生成され，List 1 あるいは List 2 に記憶される．List 1 のラベルでは $c(\bar{\alpha})$ は e から $\bar{\alpha}$ に至る最短経路の長さを与え，List 2 においてはその長さの上限値を示す．$\bar{\alpha}_b$ に対するラベルが List 1 に入った時，計算終了になる．

<u>Step 1</u>：$(e, 0)$ を List 1 に入れ，List 2 は空とする．

$\bar{\alpha}^* = e$ と置き，Step 2 へ．

<u>Step 2</u>：$\bar{\alpha}^* + \bar{\alpha}_j$ のラベルが List 1 にない（これを $\bar{\alpha}^* + \bar{\alpha}_j \notin$ List 1 と書く）j について $c(\bar{\alpha}^*) + \bar{c}_j$ を計算し，

$$c'(\bar{\alpha}^* + \bar{\alpha}_j) = \begin{cases} c(\bar{\alpha}^*) + \bar{c}_j & \text{if } \bar{\alpha}^* + \bar{\alpha}_j \notin \text{List } 2 \\ \min\{c(\bar{\alpha}^*) + \bar{c}_j,\ c(\bar{\alpha}^* + \bar{\alpha}_j)\} & \text{if } \bar{\alpha}^* + \bar{\alpha}_j \in \text{List } 2 \end{cases}$$

を求める．$(\bar{\alpha}^* + \bar{\alpha}_j, c'(\bar{\alpha}^* + \bar{\alpha}_j))$ を改めて $\bar{\alpha}^* + \bar{\alpha}_j$ のラベルとして List 2 に記憶する．

<u>Step 3</u>：List 2 が空であれば，Ωは許容解を持たない．さもなければ

$$c(\bar{\alpha}') = \min_{\bar{\alpha} \in \text{List } 2} \{c(\bar{\alpha})\} \tag{29}$$

を満たす $\bar{\alpha}'$ を選び，Step 4 へ．

Step4：$\bar{\alpha}'=\bar{\alpha}_b$であれば計算終了．$c(\bar{\alpha}_b)$が最適値である．
$\bar{\alpha}'\neq\bar{\alpha}_b$であれば，ラベル$(\bar{\alpha}', c(\bar{\alpha}'))$をList 2からList 1に移し，$\bar{\alpha}^*=\bar{\alpha}'$としてStep 2に戻る．

最適解を求めるには，計算中，$c(\bar{\alpha}_b)$を得るために，次々と加えられる$\bar{\alpha}_j$のjを記憶しておく必要がある[10]．

このアルゴリズムの正しいことを示すには，Step 4におけるラベルの$c(\bar{\alpha}')$が，節点eから節点$\bar{\alpha}'$への最短経路の長さを示していることを証明すればよい．帰納法によるために，List 1のラベルはすべて正しい値を有すると仮定しよう．仮にStep 4の$c(\bar{\alpha}')$が最短経路の長さを与えないとする．これはList 2に属す節点$\bar{\alpha}''$を経由し$\bar{\alpha}'$に至る最短経路の存在することを意味する．（なぜならば，(29)より，$c(\bar{\alpha}')$はList 1に属す節点のみを経由し，$\bar{\alpha}'$に至る最短経路の長さを与えるから）しかし，この時，$\bar{\alpha}''$が$c(\bar{\alpha}'')<c(\bar{\alpha}')$を満足することが結論されるから，(29)式による選び方に矛盾する．

分枝限定法に利用する場合のように，$\bar{\alpha}_b$としてGの要素すべてを考えるには，Step 4で計算終了せず，常にList 2が空になるまで続ければよい．5章のアルゴリズムでは，そのままで，すべてのGの要素に対して最適値が求められている．

なお，上のアルゴリズムでは簡単のため$S=\phi$とし0-1変数を想定していないが，$S\neq\phi$への拡張は容易である．

アルゴリズムⅠおよびアルゴリズムⅡの計算量はほぼ同じである．計算量に大きな影響を持つのは G の位数 D であって，基底行列 B をどのように選んで D の値を調節するかが問題である．（B は双対許容条件さえ満足しておればよい）

§8．群問題に基づく分枝限定法

既に述べたように，Q の最適解は必ずしも P の許容解を与えない．この点を解決するために Shapiro 等[14][15] によって提案されている分枝限定法によるアルゴリズムを説明する．

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \quad \xi_j : \text{非負整数 if } j \notin S, \ \xi_j = 0 \text{ or } 1 \text{ if } j \in S$$

を満たす訂正ベクトルを問題 Q に対して考え，Q の変数を

$$\hat{x}_j = x_j - \xi_j \tag{30}$$

（その結果 $\hat{b} = b - \sum a_j \xi_j$ ，$\hat{\alpha}_b = \bar{\alpha}_b - \sum \bar{\alpha}_j \xi_j$ となる）

に置いて得られる問題，

$$P(\xi): \qquad \min \sum c_j \hat{x}_j$$

$$\text{subject to} \quad \hat{x}^B = B^{-1}\hat{b} - B^{-1}R\hat{x}^R \tag{31}$$

$$\hat{x}_j^B, \hat{x}_j^R \geq 0, \ \text{Integer if } j \notin S$$

$$\hat{x}_j^B, \hat{x}_j^R = 0 \text{ or } 1 \quad \text{if } j \in S \ (=0 \text{ if } \xi_j = 1)$$

を P の ξ による部分問題という．同様に，

$$Q(\xi): \qquad \min \quad \sum \bar{c}_j \hat{x}_j$$

$$\text{subject to} \quad \sum \bar{\alpha}_j \hat{x}_j = \hat{\alpha}_b \tag{32}$$

$$x_j : \text{非負整数} \quad \text{if } j \notin S$$
$$x_j = 0 \text{ or } 1 \quad \text{if } j \in S \text{ and } \xi_j = 0$$
$$x_j = 0 \qquad \text{if } j \in S \text{ and } \xi_j = 1$$

をQのξによる部分問題という．$Q(\xi)$の最適解は，Qがアルゴリズム I あるいは II によって解かれていれば，$\psi_n(\hat{\alpha}_b)$あるいは$C(\hat{\alpha}_b)$を調べることによって直ちに求められる．

分枝限定法においては，訂正ベクトルξを次々と生成し，$P(\xi)$を解くことを試みる．ξの生成法の一例として，文献(14)による方法を述べる．すなわち，$K(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$とする時，$K(\xi)=1$を満たす訂正ベクトルをすべて生成し，つぎに$K(\xi)=2$を満たすベクトルを生成し，…という手順をとる．$K(\xi)=k$の$\xi$から$K(\xi)=k+1$の訂正ベクトルを作るには次のようにする．

$K(\xi)=k$なるξに対し

$$j(\xi) = \begin{cases} \hat{j}(\xi) - 1 & \text{if } \hat{j}(\xi) \in S \\ \hat{j}(\xi) & \text{if } \hat{j}(\xi) \notin S \end{cases}$$
$$\hat{j}(\xi) = \min\{ j \mid \xi_j > 0 \} \tag{33}$$

によって$j(\xi)$を計算し，$j = j(\xi), j(\xi)-1, \ldots, 1$に対して

$$\xi' = \xi + e_j \tag{34}$$

を作る．ただし，e_jはj番目の単位ベクトル．

しかし，すべてのξについて$P(\xi)$を解くことを試みる必要はなく，Pの最適解を導びく可能性のあるものだけを調べれ

ばよい．分枝限定法はその目的に利用される．

計算途中，しばしば部分問題の最適解としてPの許容解が得られるが，その内最小の値を持つものを暫定解x^*として記憶しておく．x^*の値をz^*とする．この時，(i) $P(\xi)$がz^*より小さな値を与え得ない（たとえば，$Q(\xi)$の最適解の値$\geq z^*$），(ii) $P(\xi)$が許容解を持たない（たとえば，$Q(\xi)$が許容解を持たない時），(iii) $P(\xi)$の最適解が分かっている（たとえば，$Q(\xi)$の最適解が$P(\xi)$の許容解である時），が証明されれば，$P(\xi)$をさらに検討する必要はなく，$P(\xi)$は終端されたという．分枝限定法はすべての部分問題が終端された時終了する．

上の例から分かるように，$Q(\xi)$を分枝限定法に利用するのは，$Q(\xi)$が$P(\xi)$より解き易いこと，$Q(\xi)$が$P(\xi)$に比較して緩い拘束条件下の問題であるため，$Q(\xi)$を解くことによって，$P(\xi)$に関する種々の情報が得られるという理由による．したがって，この性質を満たす問題であれば何を利用してもよく，たとえば，$P(\xi)$から整数条件を除いたLP問題[16]，あるいは，相異なる基底行列B'に基ずく群問題$Q'(\xi)$[14]等が報告されている．

以下のアルゴリズムにおいては，終端されていない$K(\xi)=k$を満足する訂正ベクトルをk-Listに記憶し，P_kによってその個数を示す．

<u>Step 0</u>：1-Listに$(10\cdots0)$，$(010\cdots0)$，…，$(0\cdots01)$を置く．

$k=1$, $z^*=\infty$, $P_k=n$, $P_{k+1}=0$ と置き Step 2 へ.

Step 1: $P_k=0$ ならば計算終了. 暫定解が P の最適解を与える. さもなければ, $p=1$, $P_{k+1}=0$ と置き Step 2 へ.

Step 2: (i) $p>P_k$ ならば, $k \leftarrow k+1$, Step 1 へ. さもなければ, k-List の p 番目の訂正ベクトル ξ に対し $P(\xi)$ を終端できるか調べる. 終端できれば Step 2 (ii) へ, できなければ Step 2 (iii) へ.

(ii) $P(\xi)$ の最適解が得られれば, 暫定解と比較し, 小さな値の方を改めて暫定解とする. $p \leftarrow p+1$, Step 2 (i) へ.

(iii) (34) にしたがい訂正ベクトルを生成し, $k+1$-List に置く. $P_{k+1} \leftarrow P_{k+1}+j(\xi)$, $p \leftarrow p+1$ の後 Step 2 (i) へ戻る.

Gorry-Shapiro(5) の計算結果によると, 以上の方法は全整数計画アルゴリズムとしてかなり有望であると思われる. とくに D の値が適当 (D の値が大きいと群問題を解くために時間が費やされ, 不適当に小さいと $Q(\xi)$ の最適解が P の許容解を与える可能性が小さい) である場合には, 比較的小数の部分問題を解くだけで計算が終了し, 極めて能率がよい. まだ研究すべき余地は多く残されているが, 今後次第に解明されていくことと思われる.

末筆ながら, 日頃御指導いただく京都大学三根久教授に深謝の意を表します.

[文献]

(1) R.E. Gomory, in Recent Advances in Math. Programming, McGraw-Hill 1963.

(2) R.E. Gomory, Proc. of Nat. Academy of Sci. 53, pp 260-265, 1965

(3) R.E. Gomory, Proc. of Nat. Academy of Sci. 57, pp 16-18, 1967

(4) W.W. White, Rept. ORC 66-27, Univ. of California-Berkeley, 1966

(5) H. Mine and H. Narihisa, Memoirs of Faculty of Eng. Kyoto Univ. 30 pp. 578-591, 1968

(6) T. Ibaraki, Working Paper, Kyoto University, 1970

(7) J.F. Shapiro, Operations Research, 16, pp 103-121, 1968

(8) H. Greenberg, J. of Math. Analysis and Applications, 26, pp 454-459 1969.

(9) T.C. Hu, Integer Programming and Network Flows, Addison-Wesley 1969.

(10) T. Ibaraki, Working Paper, Kyoto University, 1969

(11) M.L. Balinski and K. Spielberg, Methods for Integer Programming, in Progress in Op. Research, Wiley, 1969

(12) ファン・デル・ヴェルデン, 現代代数学 3, 銀林浩訳, 東京図書

(13) E.W. Dijkstra, Numerische Mathematik, 1, pp 269-271, 1959.

(14) J.F. Shapiro, Operations Research, 16, pp 928-947, 1968.

(15) G.A. Gorry and J.F. Shapiro, Working Paper, MIT, 1969

(16) A.M. Geoffrion, Operations Research, 17, pp 437-454, 1969