数理解析研究所講究録
96巻 1970年 122-136

On the topology in Stein algebras

千葉大 教育　鵜沢正勝

§1．序

$(X,\mathcal{H})$ を Grauert[8]の意味の解析空間とし，Xは可算位相をもつとする．$\mathcal{F}$をX上の任意の連接解析層とすると，$\mathcal{F}$はFrechet層となり，X上の任意の閉集合Wに対して，W上の$\mathcal{F}$の切断の全体$\Gamma(W,\mathcal{F})$はFrechet空間となる(定理1系)．この位相は，Xがreducedな場合と違って，CU位相ではない．

$\mathbb{C}$上の位相環は，あるStein空間$(X,\mathcal{H})$があって，位相環$\Gamma(X,\mathcal{H})$に同型であるとき，Stein algebraという．Xを$\mathbb{C}^n$の正則領域とし，$\Gamma(X,\mathcal{O})$をX上の正則関数全体とするとき，Cartan及び井草は次のことを証明した．

1．$\mathfrak{a}$を$\Gamma(X,\mathcal{O})$のイデアルとし，$\mathcal{O}\mathfrak{a}$を$\mathfrak{a}$から生成されるイデアルの層とすると，$\Gamma(X,\mathcal{O}\mathfrak{a})$は$\mathfrak{a}$の閉包$\bar{\mathfrak{a}}$に等しい[2]．

2．$\mathfrak{a}$がとくに有限生成的なら，$\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{a}}$である[2]．

3．$\mathfrak{m}$を$\Gamma(X,\mathcal{O})$の極大イデアルとすると，次の条件は同値である： (イ)．$\Gamma(X,\mathcal{O})/\mathfrak{m}\simeq\mathbb{C}$．　(ロ)．$\mathfrak{m}$は$\Gamma(X,\mathcal{O})$の閉イデアル．

(ii). 一点 $a\in X$ があり，$\mathfrak{m}=\{f\in\Gamma(X,\mathcal{O})\mid f(a)=0\}$ [9].

この小論の目的は上の定理を一般のStein空間 $(X,\mathcal{H})$ 即ちStein algebraにまで拡張することである（定理2.3,5）．更にこれらがStein加群にまで拡張されることを示す．

§2. Frechet層

以下 $(X,\mathcal{H})$ と書いたらGrauertのいみの解析空間を表わし，$(X,\mathcal{O})$ と書いたらSerreのいみの解析空間[11]を表わすとする．又，解析空間はすべて可算位相をもっているとする．

定義1. 解析空間 $(X,\mathcal{H})$ は次の条件をみたすとき，Stein空間という：

(1). $\Gamma(X,\mathcal{H})$ は X の点を分離する．

(2). X は正則凸．

Stein空間に対しては次の基本定理が成りたつ[8].

<u>Cartanの定理A.B</u>. $\mathfrak{F}$ をStein空間 $(X,\mathcal{H})$ 上の連接層とすると，

A. 各点 $x\in X$ に対して，$\Gamma(X,\mathfrak{F})$ は $\mathcal{H}_x$ 上 $\mathfrak{F}_x$ を生成する．

B. $H^p(X,\mathfrak{F})=0$，$p\geq 1$.

定義2. $\mathfrak{G}$ を位相空間 X 上のベクトル空間の層とする．次の条件を満足する開集合の近傍基 $\mathfrak{U}=\{U\}$ が存在するとき，$\mathfrak{G}$ をFrechet層という：

(1). すべての $U\in\mathfrak{U}$ に対して $\Gamma(U,\mathfrak{F})$ にはFrechet空間の位相

が入る．

(2). $U, V \in \mathfrak{U}$, $U \supset V$ なる制限写像 $r_{VU}: \Gamma(U, \mathcal{G}) \to \Gamma(V, \mathcal{G})$ は連続である．

<u>定理1</u>．$(X, \mathcal{H})$ を解析空間とすると，すべての連接層に対して，次の条件が成りたつように，Frechet の層の位相を一意的に入れることが出来る．即ち任意の2つの連接層 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ に対して，近傍系 $\mathfrak{U}$ があって，すべての $U \in \mathfrak{U}$ に対して $\Gamma(U, \mathcal{F})$, $\Gamma(U, \mathcal{G})$ は Frechet 空間であり，任意の層準同型写像 $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ に対して，φ によりひきおこされた写像 $\Gamma(U, \varphi): \Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{G})$ は Frechet 空間の連続写像である [4, 5]．

次の補題1はよく知られている．

<u>補題1</u>．D を $\mathbb{C}^n$ の領域とすると，D 上の正則関数全体のなす環 $\Gamma(D, \mathcal{O})$ はコンパクト一様収束の位相で Frechet 空間となる．従って任意の正整数 q に対して，$\Gamma(D, \mathcal{O}^q) \simeq \{\Gamma(D, \mathcal{O})\}^q$ も Frechet 空間となる．

<u>補題2</u>．D を $\mathbb{C}^n$ の領域，$\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}^q$ の（必ずしも連接ではない）解析的部分層とすると，$\Gamma(D, \mathcal{F})$ は $\Gamma(D, \mathcal{O}^q)$ で閉じている．従って $\Gamma(D, \mathcal{F})$ は Frechet 空間である [4]．

証明．$f_\nu \in \Gamma(D, \mathcal{F})$ を $f_\nu \longrightarrow f \in \Gamma(D, \mathcal{O}^q)$ なる点列とする．$w \in D$ に対して，$\mathcal{F}_w$ は $\mathcal{O}^q_w$ の部分加群で，$f_{\nu, w} \in \mathcal{F}_w$．故に加群の局所閉性定理 [2] によって，$f_w \in \mathcal{F}_w$ となる．従って $f \in \Gamma(D, \mathcal{F})$.

定理の証明　$x\in X$ とすると，xの近傍 U_x と，U_xからある$\mathbb{C}^k$の多重円板$(\Delta(0;1),\mathcal{O})$の閉解析部分空間$(V,\mathcal{H}')$への同型写像とがある．ここに$\mathcal{H}'$は$\mathcal{O}$のあるイデアルの連接層$\mathcal{J}$をとって$V=\mathrm{supp}(\mathcal{O}/\mathcal{J})$，$\mathcal{H}'=\mathcal{O}/\mathcal{J}|_V$とかける．このような複素空間$(V,\mathcal{H}')$を$(U_x,\mathcal{H})$に対する局所モデルという。$W_{r,x}$，$0<r<1$を$V|_{\Delta(0;r)}$のこの同型写像による原像とする．集合$\{W_{r,x}\}$は$X$の閉近傍基をなす。$\mathcal{F}'$を$\mathcal{F}$の像とする．これは$V$上の連接解析層である．$\tilde{\mathcal{F}}'$を$\mathcal{F}'$の$\Delta(0;1)$へのトリビアルな接続とすると$\tilde{\mathcal{F}}'$は$\mathcal{O}_{\Delta(0;1)}$加群の連接層だから基本定理A，Bがつかえる；任意の$r<1$に対して，$\tilde{\mathcal{F}}'$は有限な表現をもつ．即ち次のような$\mathcal{O}_{\Delta(0;r)}$-加群の完全列が存在する：

(1) $0\longrightarrow \mathcal{R}_{\Delta(0;r)} \longrightarrow \mathcal{O}^q \xrightarrow{f} \tilde{\mathcal{F}}' \longrightarrow 0$ on $\Delta(0;r)$.

従って任意の$r'\le r$に対して完全列

(2) $0\longrightarrow\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{R})\longrightarrow\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^q)\xrightarrow{\tilde f}\Gamma(\Delta(0;r'),\tilde{\mathcal{F}}')\longrightarrow 0$

がえられる、空間$\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^q)$はFrechet空間である（補題1），$\mathcal{R}$は$\mathcal{O}^q$の部分層だから$\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{R})$は$\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^q)$の閉部分空間となる（補題2），故に商位相を入れて

$$\Gamma(W_{r',x},\mathcal{F})\simeq\Gamma(V|_{\Delta(0;r')},\mathcal{F}')\simeq\Gamma(\Delta(0;r'),\tilde{\mathcal{F}}')\simeq \Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^q)/\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{R})$$

はFrechet空間となる．(1)の如き列が存在するような$W_{r,x}$の全体は，Xの近傍基$\mathfrak{U}=\{U\}$をなす．故に$\Gamma(U,\mathcal{F})$はFrechet空間となった．明らかに制限写像は連続である．この位相は$\mathcal{F}$の表

現の与え方に無関係である．実際別な表現があったとする：

$$0 \longrightarrow \Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{R}') \longrightarrow \Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^{s'}) \xrightarrow{\tilde{f}'} \Gamma(\Delta(0;r'),\tilde{\mathcal{F}}') \longrightarrow 0$$

を対応する完全列とすると，$\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^{s})$は$\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O})$上の自由加群だから$\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O})$-線型写像

(3) $\quad \gamma : \Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^{s}) \longrightarrow \Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^{s'})$

で $\tilde{f} = \tilde{f}'\circ\gamma$ となるものがある．これは連続写像

$$\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^{s})\big/\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{R}) \xrightarrow{\psi} \Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^{s'})\big/\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{R}')$$

をひきおこし，これは全単射である．故に開写像の定理からψは位相写像となる．また，$\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$を層の準同型写像とし，$\Delta(0;r)$をそこで，$\tilde{\mathcal{F}}'$，$\tilde{\mathcal{G}}'$が共に有限な表現があるような多重円板とする：即ち$\mathcal{O}_{\Delta(0;r)}$-加群の層の完全列

$$\mathcal{O}^{s}_{\Delta(0;r)} \xrightarrow{f} \tilde{\mathcal{F}}' \longrightarrow 0, \quad \mathcal{O}^{s}_{\Delta(0;r)} \xrightarrow{g} \tilde{\mathcal{G}}' \longrightarrow 0.$$

とすれば，(3)におけるように$\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O})$-線型写像$\psi$で次の図が可換となるものがある：

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^{s}) & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & \Gamma(\Delta(0;r'),\mathcal{O}^{s}) \\
\tilde{f}\big\downarrow & & \big\downarrow\tilde{g} \\
\Gamma(\Delta(0;r'),\tilde{\mathcal{F}}') & \xrightarrow{\Gamma(\Delta(0;r'),\phi)} & \Gamma(\Delta(0;r'),\tilde{\mathcal{G}}')
\end{array}$$

故に開写像の定理から$\Gamma(\Delta(0;r'),\phi)$の連続性が出る．定理証明終

さて，$(X,\mathcal{H})$を解析空間，$\mathcal{F}$をX上の連接層とするとXの局所有限な閉部分空間X_νによる被覆で，各νに対して，X_νをある$\mathbb{C}^{n_\nu}$の開多重円板U_νにおける閉部分空間へ写す解析的同型写

像が存在し，しかも各νに対して，U_ν上の連接層$\mathcal{F}_\nu$が有限な表現をもつようにX_νをとることが出来る．このとき各$\Gamma(X_\nu,\mathcal{F})$上にはすでにFrechet空間の位相が入った．次に自然な単射

$$\varphi:\Gamma(X,\mathcal{F})\longrightarrow\prod_\nu\Gamma(X_\nu,\mathcal{F}|_{X_\nu})$$

を与える．Frechet空間の可算積として$\prod_\nu\Gamma(X_\nu,\mathcal{F}|_{X_\nu})$はFrechet空間となる．$(g_\nu)\in\prod_\nu\Gamma(X_\nu,\mathcal{F}|_{X_\nu})$に対して，$(g_\nu)\in\overline{\mathrm{Im}\,\varphi}$であるとは，任意の$k\geq 0$と任意の$x\in X_\lambda\cap X_\mu$に対して，$\mathrm{Im}\,\varphi$の元$(f_\nu)$があって，$f_{\lambda x}-g_{\lambda x}\in m_x^k\mathcal{F}_x$, $f_{\mu x}-g_{\mu x}\in m_x^k\mathcal{F}_x$をいみする．ここに$m_x$は$\mathcal{H}_x$の極大イデアル．しかるに$f_{\lambda x}=f_{\mu x}$だから$g_{\lambda x}-g_{\mu x}\in m_x^k\mathcal{F}_x$である．これが任意の$k$に対して成りたつからKrullの定理より$g_{\lambda x}=g_{\mu x}$．このことは$(g_\nu)\in\mathrm{Im}\,\varphi$をいみする．即ち上の自然な写像$\varphi$で$\Gamma(X,\mathcal{F})$の像は$\prod_\nu\Gamma(X_\nu,\mathcal{F}|_{X_\nu})$の閉部分空間である．故に$\Gamma(X,\mathcal{F})$はFrechet空間となる．$X'$を$X$の任意の開部分空間とすると，制限写像$r_{X'X}:\Gamma(X,\mathcal{F})\longrightarrow\Gamma(X',\mathcal{F})$は明らかに連続となる．故に次の系がえられた．

系．任意の開部分集合$W\subset X$に対して，$\Gamma(W,\mathcal{F})$はFrechet空間となる．任意の開集合U,W, $U\subset W$に対して制限写像$r_{UW}:\Gamma(W,\mathcal{F})\longrightarrow\Gamma(U,\mathcal{F})$は連続である．

§3．閉イデアルと井草の定理

$(X,\mathcal{H})$を解析空間とし，$\mathcal{F}$をX上の連接層とする．以下

$\Gamma(X, \mathcal{F})$ は Frechet 空間とする. $A = \Gamma(X, \mathcal{H})$ とおく. 部分集合 $M \subset A$ に対して M によって生成されたイデアルの層を $\mathcal{H}M$ で表わす. x の層 $\mathcal{H}M$ の茎を $\mathcal{H}_x M$ で表わす. 次の定理2, 3及びその系は, X が C^n の正則領域のとき Cartan[2] によりあたえられた.

<u>定理2</u>. $\mathfrak{a} \subset A$ のイデアルとすると, $\mathcal{H}\mathfrak{a}$ は連接層である. $(X, \mathcal{H})$ が Stein 空間なら, $\Gamma(X, \mathcal{H}\mathfrak{a})$ は A における $\mathfrak{a}$ の閉包 $\bar{\mathfrak{a}}$ に等しい.

証明. $\mathcal{H}\mathfrak{a}$ の連接性は $\mathcal{H}\mathfrak{a}$ が局所有限生成的であることを示せば十分である. $\mathfrak{a}$ の生成元の数が有限なら問題はない. そこで今, $\mathcal{H}\mathfrak{a}$ が一点 $x \in X$ で局所有限でなかったとする. U を x の相対コンパクト近傍とすると, $\mathfrak{a}$ の元の列 f_ν で, $f_1 \dots f_\nu$ によって生成された層を $\mathcal{H}\mathfrak{a}_\nu$ とするとき, 各 ν に対して, $\mathcal{H}\mathfrak{a}_\nu|_U \subsetneq \mathcal{H}\mathfrak{a}_{\nu+1}|_U$ となるものがある. しかるに $\mathcal{H}$ の連接部分層の族 $\{\mathcal{H}\mathfrak{a}_\nu\}$ はつねに局所的に停留的でなければならない[12] からこれは矛盾である. 故に $\mathcal{H}\mathfrak{a}$ は連接層となる. 次に $\Gamma(X, \mathcal{H}\mathfrak{a})$ が A で閉集合であることを示す. それには定理1系のときと同様に, 自然な単射 $\varphi : \Gamma(X, \mathcal{H}) \longrightarrow \prod \Gamma(X_\nu, \mathcal{H}|_{X_\nu})$ において $(g_\nu) \in \overline{\varphi \Gamma(X, \mathcal{H}\mathfrak{a})}$ なら, 任意の $k \geq 0$ と任意の点 $x \in X_\lambda \cap X_\mu$ に対して, $(f_\nu) \in \varphi \Gamma(X, \mathcal{H}\mathfrak{a})$ で, $f_{\lambda x} - g_{\lambda x} \in \mathfrak{m}_x^k \mathfrak{a}$, $f_{\mu x} - g_{\mu x} \in \mathfrak{m}_x^k \mathfrak{a}$ なるものが存在することに注意すればよい. 次に $\Gamma(X, \mathcal{H}\mathfrak{a}) \subset \bar{\mathfrak{a}}$ を示せばよいのだが, それには, 次の2つの補題(証明は容易)

に注意すれば，あとは Cartan の証明が平行にゆく．その1つは $\mathbb{C}^n$ における加群の局所閉性定理が $(X,\mathcal{H})$ に対して次の形で与えられることである．

<u>補題3</u>．$\mathcal{M}$ を解析空間 $(X,\mathcal{H})$ の1点 $a\in X$ における茎 $\mathcal{H}^q_a$ の部分加群とする．a のある近傍 V に対して，$g\in\Gamma(X,\mathcal{H}^q)$ かつ g は $\Gamma(V,\mathcal{H}^q)$ の元で，点 a での芽が $\mathcal{M}$ に属すようなものの，$\Gamma(V,\mathcal{H}^q)$ における Frechet 位相での極限になっているとすると $g_a\in\mathcal{M}$．

同様に多面体上の近似定理は次の形で与えられる．

<u>補題4</u>．(Weil-Oka の近似定理)．$(X,\mathcal{H})$ を Stein 空間，P を X の Weil-Oka の多面体領域とすると，P での正則な関数は X で正則な関数によって $\Gamma(P,\mathcal{H})$ の Frechet 位相で近似される．

<u>系1</u>．$(X,\mathcal{H})$ を Stein 空間，$\mathfrak{a}$ を $\Gamma(X,\mathcal{H})$ の閉イデアルとすると $\mathcal{H}$ の連接イデアルの層 $\mathcal{M}$ で，$\mathfrak{a}=\Gamma(X,\mathcal{M})$ なるものがある．

実際 $\mathcal{M}=\mathcal{H}\mathfrak{a}$ とおけばよい．

<u>系2</u>．$(X,\mathcal{H})$ を Stein 空間，$\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$ の連接イデアルの層とすると $\mathcal{H}\Gamma(X,\mathcal{M})=\mathcal{M}$ が成りたつ．従って $\Gamma(X,\mathcal{M})$ は $\Gamma(X,\mathcal{H})$ で閉じている，従って $\Gamma(X,\mathcal{M})$ は Frechet 空間である．

証明．前半は $(X,\mathcal{H})$ が Stein だから明らか．故に定理2より

$$\overline{\Gamma(X,\mathcal{M})}=\Gamma(X,\mathcal{H}\Gamma(X,\mathcal{M}))=\Gamma(X,\mathcal{M}).$$

<u>系3</u>．$(X,\mathcal{H})$ を Stein 空間，$\mathfrak{a}\neq A$ を閉イデアルとすると，$\mathfrak{a}$ は少なくとも1つの共通零点をもつ．

証明．$\mathfrak{a}$にもし共通零点がなかったとすると$\mathcal{H}_{\mathfrak{a}}=\mathcal{H}$となるが，$\mathfrak{a}$は閉イデアルだから$\mathfrak{a}=\Gamma(X,\mathcal{H}_{\mathfrak{a}})=\Gamma(X,\mathcal{H})$となり矛盾．

系4．$(X,\mathcal{H})$をStein空間とすると，Aの任意の閉極大イデアル$\mathfrak{m}$は唯一つの共通零点をもつ．それをaとおくと$\mathfrak{m}=\{f\in A \mid f(a)=0\}$と表わせる．

証明．今$\mathfrak{m}$が2つの共通零点a,bをもったとする．AはXの点を分離するから，Aの元で$f(a)\neq f(b)$なるものがある．$g(x)=f(x)-f(a)$とおくとイデアル$\mathfrak{m}$は固有イデアル$\{\mathfrak{m},g\}$に含まれることになり，$\mathfrak{m}$の極大性に反す．後半は明らか．

定理3．$(X,\mathcal{H})$をStein空間とすると$\Gamma(X,\mathcal{H})$の任意の有限生成イデアルは$\Gamma(X,\mathcal{H})$で閉じている．

証明は補題3を使って，[2]に平行して，一様収束という所をFrechet位相での収束におきかえることによって同様に証明される．

定理4．$(X,\mathcal{H})$をStein空間とする．$\Gamma(X,\mathcal{H})$の極大イデアル$\mathfrak{m}$は有限生成のときに限り閉イデアルである．

証明．定理3より十分性は明らか．今$\mathfrak{m}$が閉であるとする．定理2系4より唯一つの点$a\in X$で，$\mathfrak{m}=\{f\in\Gamma(X,\mathcal{H})\mid f(a)=0\}$となるものがある．定理2より層$\mathcal{H}\mathfrak{m}$は連接だから有限個の元$f_1,\dots,f_k\in\Gamma(X,\mathcal{H})$で，$\mathcal{H}_a$と$\mathcal{H}_a\mathfrak{m}$を生成するものがある．集合$X'=\{x\in X\mid f_1(x)=\cdots=f_k(x)=0\}$は$X'=X_0\cup\{a\}$とかける．ここ

に X_0 は a を含まない(空かも知れない)解析集合である．他方 $g|_{X_0}=0$, $g(a)=1$ なる関数 $g\in\Gamma(X,\mathcal{H})$ が存在する．さすれば $f_0=g-1$ は $\mathfrak{m}$ に属し，$(f_0,f_1,\dots,f_k)$ は唯一つの共通零点をもつ．故に定理Bより関数 $f_0,f_1,\dots,f_k$ はイデアル $\mathfrak{m}$ を生成する．

定理5（井草[9]）．$(X,\mathcal{H})$ を Stein 空間，$\mathfrak{m}$ を $\Gamma(X,\mathcal{H})$ の極大イデアルとすると次の条件は同値である．

(1) $\Gamma(X,\mathcal{H})/\mathfrak{m}\simeq\mathbb{C}$ （位相環として同型）

(2) $\mathfrak{m}$ は $\Gamma(X,\mathcal{H})$ の閉極大イデアル．

(3) $\mathfrak{m}=\{f\in\Gamma(X,\mathcal{H})\mid f(a)=0\}$ なる点 a が存在する．

証明．(1) $\longrightarrow$ (2)．$\mathfrak{m}\subsetneqq I\subseteq\Gamma(X,\mathcal{H})$ なるイデアル I があるとする．関数 $f\in I$ と定数 $c\in\mathbb{C}$ で $f\notin\mathfrak{m}$, $f-c\in\mathfrak{m}\subset I$ なるものがある．これは $0\neq c\in I$ をいみし $\Gamma(X,\mathcal{H})=I$ となる．故に $\mathfrak{m}$ は極大イデアルである．他方位相環 $\mathbb{C}$ は Hausdorff だから空間 $\mathfrak{m}$ は $\Gamma(X,\mathcal{H})$ で閉じていなければならない[1]．

(2) $\longrightarrow$ (3) は定理2系3．(3) $\longrightarrow$ (1) は明らか．

§4．スペクトル論

定義4．Stein algebra A のスペクトル $S(A)$ とは，位相環 A から，位相環 $\mathbb{C}$ の上への次のような位相をもった複素準同型写像の集合をいう：元 $\phi\in S(A)$ の近傍基を次のように定める．

$$V(\phi,f,\varepsilon)=\{\psi\in S(A)\mid |\phi(f)-\psi(f)|<\varepsilon,\ f\in A,\ \varepsilon>0\}.$$

定理5′(井草)、$(X, \mathcal{H})$ を Stein 空間とし，$A = \Gamma(X, \mathcal{H})$ とおく．このとき標準写像 $\alpha: X \longrightarrow S(A)$, $\alpha(x) = \phi_x$, $\phi_x(f) = f(x)$, $f \in A$ が出来るがこの α は位相写像である[5].

証明．まず $\mathcal{H}$ の被約構造層 $\mathcal{O}$ を考える．$(X, \mathcal{H})$ を任意の解析空間とし，$\mathcal{N}_x$ を $\mathcal{H}_x$ の巾零元全体よりなるイデアルとする．$\mathcal{N} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{N}_x$ は連接層となる、何故なら局所モデル $(V, \mathcal{H}')$ において，$\mathcal{N} = \mathcal{J}'/\mathcal{J}$ となるからである．ここに $\mathcal{J}'$ は V 上 0 になる関数芽の層，$\mathcal{J}$ は $(V, \mathcal{H}')$ を定めるイデアルの層である．$(X, \mathcal{H})$ の被約解析空間 $(X, \mathcal{O})$ を，$\mathcal{O} = \mathcal{H}/\mathcal{N}$ で定める．$A_r = \Gamma(X, \mathcal{O})$ とおくと，自然な全射準同型 $\rho: A \longrightarrow A_r$ が出来る．$\mathcal{R} = \mathrm{Ker}\, \rho$ とおくと $\mathcal{R} = \{f \in \Gamma(X, \mathcal{H}),\ f(x) = 0,\ \forall x \in X\}$ とかける．

補題5．$\mathcal{R}$ は A の Jacobson 根基に含まれる．

証明．そうでなかったとし，極大イデアル $\mathfrak{m}$ をとって，$\mathfrak{m} + \mathcal{R} = A$ とする．従って，$g \in \mathfrak{m}$, $f \in \mathcal{R}$ で $g + f = 1$ なるものがある．f_x は各点 $x \in X$ で巾零元だから，近傍 $U(x)$ と自然数 $N(U)$ ですべての $n \geq N(U)$ に対して $f^n|_U = 0$ となるものがある．故に列 $\{f^n\}$ は A で 0 に収束する．故に $g = 1 - f$ は逆元 $\sum_{n=0}^{\infty} f^n$ をもつことになり $1 \in \mathfrak{m}$ となりこれは矛盾である．

さて準同型 $\phi: A \longrightarrow \mathbb{C}$, $\phi \in S(A)$ が与えられたとする．$\mathrm{Ker}\, \phi$ は A の極大イデアルだから補題5より ϕ は $A \xrightarrow{\rho} A_r \xrightarrow{\phi_r} \mathbb{C}$ と分解出来る．ここに ϕ_r は全射だから閉写像の定理により，

Φ_r は連続である．故に $S(A)=S(A_r)$ となる．故に証明は Serre の空間 $(X,\mathcal{O})$ の場合に帰着した．以下 [10] と同じである．証終．

注．Stein algebra A に対して，A の閉極大イデアルの集合を $M(A)$ とおくと，$M(A)=\{\mathrm{Ker}\,\phi \mid \phi\in S(A)\}$ となる．$(X,\mathcal{H})$ が Stein 空間で $A=\Gamma(X,\mathcal{H})$ なら $S(A)$ と $M(A)$ との間には1対1の対応がある．逆に任意に与えられた Stein algebra のスペクトル $S(A)$ から $S(A)$ 上の環の層 $\tilde{A}$ を定めて，$(S(A),\tilde{A})$ に解析空間の構造を入れることが出来る．Forster [6] は次のことを証明した．

定理6．A を Stein algebra とし，Stein 空間 $(X,\mathcal{H})$ の切断 $\Gamma(X,\mathcal{H})$ に同型とすると，$(X,\mathcal{H})$ と $(S(A),\tilde{A})$ は双正則同値である．

§5．Stein 加群

$(X,\mathcal{H})$ を解析空間，$\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$-加群の層とすると，$\Gamma(X,\mathcal{M})$ は位相 $\Gamma(X,\mathcal{H})$-加群となる．

定義5．Stein algebra A 上の位相加群 M は，Stein 空間 $(X,\mathcal{H})$ と連接 $\mathcal{H}$-加群の層 $\mathcal{M}$ と位相環及び位相加群としての同型写像 $\varphi: A\longrightarrow\Gamma(X,\mathcal{H})$，$\psi: M\longrightarrow\Gamma(X,\mathcal{M})$ があって，すべての $f\in A$，$m\in M$ に対して $\psi(fm)=\varphi(f)\psi(m)$ なるとき，M を Stein 加群という．

定理2及びその系の証明と同じ方法で次のことが示される．

定理7. $(X,\mathcal{H})$を解析空間, $\mathcal{M}$を連接層とする. Mを$\Gamma(X,\mathcal{M})$の部分集合とすると$\mathcal{M}$の部分層$\mathcal{H}M$は連接層である. $(X,\mathcal{H})$がStein空間で, Mが$\Gamma(X,\mathcal{M})$の部分群なら$\Gamma(X,\mathcal{H}M)$はMの閉包$\bar{M}$に等しい.

系1. $(X,\mathcal{H})$をStein空間, $\mathcal{M}$を連接層とする. $\mathcal{M}$の任意の連接部分層$\mathcal{N}$に対して, $\Gamma(X,\mathcal{N})$は$\Gamma(X,\mathcal{M})$で閉じている.

系2. Stein加群Mの部分加群Nは, NがStein加群であるときに限り閉じている.

さて, $(X,\mathcal{H})$を解析空間, $\mathcal{M},\mathcal{N}$をX上の連接層とすると任意の開集合$U\subset X$に対して, $\Gamma(U,\mathcal{M}),\Gamma(U,\mathcal{N})$はFrechet空間であった. 任意の層の準同型写像$\phi:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$に対して, ひきおこされた写像: $\Gamma(U,\phi):\Gamma(U,\mathcal{M})\longrightarrow\Gamma(U,\mathcal{N})$は連続である. Forster[7]は次のことを証明した.

定理8. $(X,\mathcal{H})$をStein空間, $\mathcal{M},\mathcal{N}$をX上の連接層とする. $A=\Gamma(X,\mathcal{H})$, $M=\Gamma(X,\mathcal{M})$, $N=\Gamma(X,\mathcal{N})$とおく. 任意のA-線型写像$\phi:M\longrightarrow N$に対して, $\phi=\Gamma(X,\psi)$なる$\mathcal{H}$準同型写像$\psi:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$が唯一つ存在する.

系1. 上の定理と同じ仮定の下で, 任意のA-線型写像ϕは連続であり, $\mathrm{Im}\,\phi$はNで閉じている.

証明. 上の定理より$\mathcal{H}$準同型写像$\psi:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$で$\phi=\Gamma(X,\psi)$なるものがあるから, ϕは連続である. 他方定理Bから,

$\phi(M)=\Gamma(X,\psi(\mathcal{M}))\subset\Gamma(X,\mathcal{H})=N$ で、$\psi(\mathcal{M})$ は $\mathcal{H}$ の連接部分層だから，定理7系1により，$\phi(M)$ は N で閉じている．

系2．（拡張された升尊の定理）．Stein algebra A 上の任意の Stein 加群 M,N に対して，任意の代数的同型写像 $\phi:M\to N$ は位相同型写像である．

さて，A を任意の環とし，M を A-加群とするとイデアル化の原理により，M は環 $A'=A\oplus M$ のイデアルとなる．次の定理[7]は Stein 空間 $(X,\mathcal{H})$ の構造層 $\mathcal{H}$ が1つの X において，十分沢山あることを示している．

定理9．$(X,\mathcal{H})$ を解析空間，$\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}$-加群の連接層とする．層 $\mathcal{H}'=\mathcal{H}\oplus\mathcal{M}$ を $\mathcal{H}'_x=\mathcal{H}_x\oplus\mathcal{M}_x$ で定めると付環空間 $(X,\mathcal{H}')$ は解析空間となる．$(X,\mathcal{H})$ が Stein 空間なら，$(X,\mathcal{H}')$ も Stein 空間である．

この定理を使えば加群に関する定理はイデアルに関する定理に還元される．故に定理3から次の定理がえられる．

定理3'．$(X,\mathcal{H})$ を Stein 空間，$\mathcal{M}$ を X 上の連接層とする．$\Gamma(X,\mathcal{M})$ の任意の有限生成 $\Gamma(X,\mathcal{H})$-部分加群は $\Gamma(X,\mathcal{M})$ で閉じている．

References

[1] N.Bourbaki, Topologie générale, Chap.3,Herman,1960.

[2] H.Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiqes de variables comlexes, Bull.Soc.math.France,78(1950),29-64.

[3] ______, Séminaire,E.N.S,1951/52.

[4] ______, Sémunaire,E.N.S, 1953/54.

[5] O.Forster, Primärzerlegung in Steinschen Algebren, Math.Ann. 154(1964), 307-329.

[6] ______, Uniqeness of topology in Stein algebras, Function Algebras, Proc.Intern.Symposium,Tulane, 1965.

[7] ______, Zur Theorie der Steinschen Algebren und Modulen,Math.Z. 97(1967),375-405.

[8] H.Grauert, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Moduleräume koplexer Strukturen, I.H.E.S. No.5,Paris,1960.

[9] J.Igusa, On a property of the domain of regularity,Mem.Coll.Sc.Univ. Kyoto,27(1952), 95-97.

[10] R.Iwahashi, A characterization of holomorphically complete spaces, Proc.Japan Acad,36(1960),205-206.

[11] J_P.Serre, Géométrie algébriqe et géométrie analytiqe,Ann.Inst.Fourier, 6(1960), 1-42.

[12] ______, Prolongement de faiseaux analytiqes cohérents, Ann.Inst. Fourier, 16(1966), 363-374.