数理解析研究所講究録
96巻 1970年 112-121

Non-archimedian Banach algebras

東京電機大　鶴見和之

§1. 序

$\mathbb{C}$上の Banach algebra と non-archimedian Banach algebra X over F の間には差がある。例えば, $x \in X$ の spectrum $\sigma(x)$ が空である様に出来ます。又一般に X の maximal ideal M に対して, $X/M \cong F' \supset F$ である, そして, non-archimedian Banach algebra X の maximal ideal space $\mathfrak{M}$ は 0次元である。又 Function algebra に於ては Kaplansky の定理が或る意味で重要である様に思はれます。ここでは基本的事実を述べます。

§2. 定義

F を field with a real valued non-archimedian valuation $|\cdot|$ とする。

F上のベクトル空間 X が non-archimedian Banach space

$\Longleftrightarrow$ i) 次の性質を持つ $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する,

① $\|x\| \geq 0$ for $x \in X$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

② $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ for $\alpha \in F$, $x \in X$,

③ $\|x + y\| \leqq \max(\|x\|, \|y\|)$ for $x, y \in X$,

この $\|\cdot\|$ を norm という。

ii) X は norm $\|\cdot\|$ に関して complete である。

commutative algebra X with identity e over F が

non-archimedian Banach algebra

$\Leftrightarrow$ i) X: non-archimedian Banach space over F,

ii) $\|e\| = 1$, $\|xy\| \leqq \|x\| \cdot \|y\|$.

次の notations を用いることにします。

X: non-archimedian Banach algebra over F,

$\sigma(x) := \{\lambda \in F \mid (\lambda - x)^{-1}$ が存在しない$\}$: x の spectrum,

$r_\sigma(x) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$: x の spectral radius,

$\mathfrak{M}$: X の maximal ideal space,

$X (\ni e)$, $^\forall M \in \mathfrak{M}$ に対して、一般に $X/M \cong F' \supset F$ である

$x(M) := x + M$ for $^\forall x \in X$, $M \in \mathfrak{M}$.

$X/M \ni x + M = x(M) \longleftrightarrow \alpha \in F'$, α と $x(M)$ とを同一視する、これにより $\sigma(x) = \{x(M) \mid M \in \mathfrak{M}\} \cap F$ となる。

$\|x + M\|_M := \inf_{z \in M} \|x + z\|$ とおくことにより X/M は

non-archimedian Banach algebra with identity e である。

又，$X/M \cong F$，$M \in \mathfrak{M}$ のとき γ_σ について次の事が成りたつ

$$\gamma_\sigma(x+y) \leqq \max(\gamma_\sigma(x), \gamma_\sigma(y)).$$

§ 3.

通常の Banach algebra と同様に次の事が成りたつ。

<u>定理 1.</u> X : division algebra（即ち $x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in X$）

$\sigma(x) = \phi$ for $\forall x \in X \iff X$ と F とは等距離同型.

<u>例 1.</u> F: field with trivial valuation

K: 多項式環の商体，y : K 上の超越的元

$X := K[y]$ とし，M を X の maximal ideal とすると

X/M は algebra over F で無限個の元を含む.

$X/M \cong F$ for $M \in \mathfrak{M}$ とする. $\mathfrak{M}$ の topology は Gelfond topology とする，即ち $\forall M \in \mathfrak{M}$ の近傍基は次の形の集合

$$U(M; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) := \{M' \in \mathfrak{M} \mid |x_i(M') - x_i(M)| < \varepsilon,\ i = 1, \cdots, n\}.$$

ultrametric inequation により，この topology で $\mathfrak{M}$ は 0-dim. Hausdorff space である。

<u>命題.</u> T : 任意の集合，$F(T)$: algebra of all bdd F-valued fts on T, operation は pointwise

$F(T)$ の任意の maximal ideal M が次のものである，即ち，或る $t_0 \in T$ が存在して $M = \{ f \in F(T) \mid f(t) = 0 \}$.

$\Longrightarrow \quad F(T)/M \cong F \quad \text{for } {}^\forall M \in \mathfrak{M}.$

<u>定理2</u>　T : compact, 0-dim, Hausdorff space

$F(T)$: algebra of all continuous F-valued fts on T.

F : nontrivially valued field

$\Longrightarrow$ T と $F(T)$ の maximal ideals とは 1 対 1 に対応する，即ち

$T \ni t \longleftrightarrow M_t = \{ f \in F(T) \mid f(t) = 0 \}$

<u>証明</u>.　$t \longrightarrow M_t$ は 1 対 1 である，これが onto である事を示す。onto でないとする。次の様な $F(T)$ の maximal ideal M が存在する，即ち ${}^\forall t \in T$ に対して ${}^\exists f_t \in M$, $f_t(t) \neq 0$.　f_t の連続性により，次の様な open set U_t がとれる，即ち $f_t(x) = 0$, $x \in U_t$.

そうすると $T = \bigcup_{t \in T} U_t$．$T$ は compact であるから有限個の $t_1, \cdots t_n$ がとれ $T = \bigcup_{i=1}^n U_{t_i}$．$T$ は 0-dim であるから U_{t_i} は clopen にとれる．　$W_1 := U_{t_1}$, $W_2 := U_{t_2} \setminus U_{t_1}, \cdots, W_j := U_{t_j} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} U_{t_i}$ とおくと，$W_i \cap W_j = \phi \ (i \neq j)$ で $T = \bigcup_{i=1}^n W_i$.

$$g_i(t) := \begin{cases} 1 & : t \in W_i \\ 0 & . \text{その他} \end{cases} \qquad \text{とおく}$$

函数 g_i は T 上で連続である，即ち $g_i \in F(T)$

$$g(t) := \sum_{i=1}^n g_i(t) f_{t_i}(t) \qquad \text{とおく}$$

明らかに $g(t) \in M_t$. $^\forall t \in T$ に対しては,或る i に対して
$t \in W_i$ であるから $g(t) = g_i(t) f_{t_i}(t) = f_{t_i}(t) \neq 0$ よって g の逆
函数が存在する. 故に $M = F(T)$.

系. T: compact totally disconnected Hausdorff space
$\Longrightarrow$ T と $F(T)$ の maximal ideals とは 1 対 1 に対応する.

定理 3. (Kaplansky の定理) T: compact totally disconnected Hausdorff space, $F(T)$: normed algebra (sup norm) of continuous fts from T into F,
B: closed subalgebra of $F(T)$ containing constants and separating points.
$\Longrightarrow$ $B = F(T)$.

§ 4.

$V := \{\alpha \in F \mid |\alpha| \leq 1\}$: F の valuation ring

$P := \{\alpha \in F \mid |\alpha| < 1\}$: V の maximal ideal

F の residue class field V/P と類似のものを non-archimedian Banach algebra X (with identity e) においても考える。

$V' := \{x \in X \mid \|x\| \leqq 1\}$

$P' := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$: V' の ideal

次の事が成りたつ

定理4.

P': maximal ideal in V' $\Longleftrightarrow$ $\|x\|=1$ なら x は invertible

証明. $x\in X$, $\|e-x\|<1$ なら x は invertible で $x^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n$ である事を用いればよい。

系. $\|X\| = \|F\|$, P': maximal ideal in V'.
$\Longrightarrow$ X は体である。

$W'_M := \{x\in X \mid \|x+M\|_M \leq 1\}$, $W' := \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} W'_M$ とおく

明らかに $V'\subseteq W'$ であるが逆の包含関係は成りたたない

例2. F: algebraically closed field with trivial valuation

$X := F[x]$, $^\forall f(x)\in X$ に対して, $f(x)$ の norm を次の様に定義す

$\|f(x)\| = \|\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n\| := \max_i (|\alpha_i| c^i)$ 但し $c>1$.

とすると, $X/M \cong F$ ($M\in\mathfrak{M}$) で $W'=X$, $V'\subsetneqq W'$.

例3. X: finite dim. algebra over F with basis $e_1,\cdots,e_n$,

ここで $e_i e_j = 0$ ($i\neq j$), $e_i^2=e_i$. $^\forall x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ に対して

$\|x\| := \max_i |\alpha_i|$. X には n 個の maximal ideals $M_1,\cdots M_n$ が

があり, M_i は $e_1,\cdots e_{i-1}, e_{i+1},\cdots,e_n$ によって generate された ideal.

$X/M_i \cong F$, で $V'=W'$ である.

定理5. $X/M \cong F$ for $M \in \mathfrak{M}$, $W' = V'$,

$\mathfrak{M}$: compact in Gelfond topology.

$\Longrightarrow$ $\gamma_\sigma(x) = \|x\|$.

証明. 明らかに, $\gamma_\sigma(x) \leqq \|x\|$ であるから, $\gamma_\sigma(x) \geqq \|x\|$ を示せばよい. $\gamma_\sigma(x) \leq 1$ とする, $|x(M)| \leq 1$ for $\forall M \in \mathfrak{M}$. $W' = V'$ であるから, $x \in W'$ に対して, $\|x\| \leq 1$ 若し $\gamma_\sigma(x) < \|x\|$ なら次の様な $\exists \lambda \in F$.

(*) $\gamma_\sigma(x) = |\lambda| < \|x\|$

$\mathfrak{M}$ が compact であるから, $\gamma_\sigma(x)$ の sup は, 実際或る $M \in \mathfrak{M}$ でとる. $y := x/\lambda$ とすると $\|x\| \leq |\lambda|$. これは (*) に反する. よって $\gamma_\sigma(x) = \|x\|$

系. $W' = V'$ で, $\gamma_\sigma(x) < \|x\|$ なる $x \in X$ が存在する。

$\Rightarrow$ $\mathfrak{M}$: non-compact in Gelfond topology.

特別なものとして次の事実が成り立つ。

命題. X, F : 例3のもの, 函数族 $\{\hat{x} \mid x \in X\}$ (ここで $\hat{x} : \mathfrak{M} \longrightarrow F$ ($\hat{x} : M \longmapsto x(M)$)) は $\mathfrak{M}$ 上の全ての函数の族である。

証明. $\mathfrak{M}$ は有限集合であるから, $\forall$ 函数 f に対して $f(M_i) = \alpha_i$ とする. $x := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ とおくと $\hat{x} = f$.

<u>定理6.</u> $X \ni e$, $X/M \cong F$ for $^\forall M \in \mathfrak{M}$, $W' = V'$,

$\mathfrak{M}$: compact in Gelfond topology.

$\Longrightarrow \quad \hat{X} = F(\mathfrak{M})$

<u>証明.</u> Kaplansky の定理により $\hat{X}$ は constant fts を含み、点を分離し、closed である事を示せばよい。

$e(M) = 1$ for $^\forall M \in \mathfrak{M}$ であるから、$^\forall \alpha \in F$ に対して

$(\alpha e)(M) = \alpha$ for $^\forall M \in \mathfrak{M}$, 故に $\hat{X}$ は constant fts を含む。

$M_1 \neq M_2$, $\in \mathfrak{M}$ に対して $x \in M_1$, $x \notin M_2$ なる x をとれば、

$\hat{x}(M_1) \neq \hat{x}(M_2)$ よって $\hat{X}$ は $\mathfrak{M}$ の点を分離する。

次に $\hat{X}$ は closed である事を示す、即ち $\hat{X} = \overline{\hat{X}}$. $f \in \overline{\hat{X}}$ とすると、$^\exists \hat{x}_i \in \hat{X}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ $\hat{x}_i \longrightarrow f$. $\{\hat{x}_i\}$ は Cauchy 列で、$W' = V'$ で、$\mathfrak{M}$ は compact であるから、定理5により次の事を得る

$$r_\sigma(x_n) = \|\hat{x}_n\| = \|x_n\|.$$

ここで、$\hat{x} \in F(\mathfrak{M})$ の norm は $\|\hat{x}\| := \sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$.

$x \longmapsto x$ $(\hat{x}(M) = x(M))$ は isometry で $\{x_n\}$ は Cauchy 列で X の完備性により、次の様な $x \in X$ が存在する、即ち $\hat{x}_n \longrightarrow \hat{x} = f$ よって $\hat{x} \in \hat{X}$, 故に $\hat{X}$ は closed.

文　献

[1] E. Beckenstein : On regular nonarchimedian Banach algebras, Arch. Math. 19 (1968). 424 — 427.

[2] L. Narici : Nonarchimedian Banach algebras. Arch. Math, 19 (1968). 428 — 435.

[3] N. Shilkert : Non-archimedian Gelfond theory. Pacific J. Math. 32 (1970) 541 — 550.

[4] I. Kaplansky : The Weierstraß theorem in fields with valuations, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) 356 — 357

[5] D. G. Cantor : On the Stone - Weierstraß approximation theorem for valued fields. Pacific Jour. Math. 21 (1967) 473 — 478.

[6] P. R. Chernoff, R. A. Rasala and W. C. Waterhouse : The Stone-Weierstraß theorem for valuable fields. Pacific Jour. Math 27 (1968) 233 — 240.

[7] R. Kiehl : Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. Jour. reine angewandte Math. 234 (1969) 89 — 98.

[8] R. Kiehl : Die analytische Normalität affinoider Ringe, Arch. Math. 18 (1967) 479 — 484.

[9] H. Grauert und R. Remmert : Nichtarchimedische Funktionentheorie, Weierstraßfestband, Opladen 1966.

[10] E. Artin : Algebraic numbers and algebraic functions, Princeton (1950).

[11] G. Bachman : Introduction to p-adic numbers and valuation theory, Academic Press, (1964).

[12] A. Browder : Introduction to function algebras, Benjamin (1969)

[13] T. W. Gamelin : Uniform algebras, Prentice Hall (1969).

[14] 永田雅宜 ; 可換体論 裳華房

[15] R. Staum : The structure of non-archimedian Banach algebras, Notices A.M.S. 17 (1970) 663-664.

[16] A.F. Monna : Over Nict-Archimedische Lineaire Ruimten, Indag. Math. 5 (1943) 308—321.

[17] —— : Over Geordende en Lineaire Ruimten, Indag. Math. 6 (1944) 178—182.

[18] —— : Sur les espaces normes, I et II. Indag. Math. 8 (1946) 1045—1062.

[19] —— : Sur les espaces non-archimediens, I et II, Indag. Math. 18 (1956) 475—489.

[20] H. Grauert und R. Remmert : Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis, Inventiones math. 2 (1966) 87—133.