数理解析研究所講究録
96巻 1970年 1-13

Derivation と point derivation について

東教大・理　　神 保 敏 弥

§1. 序

Topological algebra 上の微分と点微分についての主な問題は，次の事を調べることである：

① 0でない（有界）微分や（有界）点微分が，それぞれ存在するための必要十分条件，

② 微分又は点微分が，それぞれ有界微分や有界点微分となるための必要十分条件．

①，②について，Banach algebra や有理関数の algebra R(X) に対して，多くの興味ある結果が得られている．さらに，Banach algebra から順次他の topological algebra への拡張が，試みられている．ここでの目的は，これらを簡潔に紹介することである．

§2. 定義と記号

定義1. A : <u>topological algebra</u>

$\Longleftrightarrow$ A : ① 複素線形位相空間, ② 単位元をもつ可換多元環

③ 双線形写像 $(x,y) \longrightarrow xy$ が, 各個連続.

A, B を topological algebras とするとき,

$H(A,B) \equiv \{h \mid h$ は A から B の上への algebra 準同形$\}$,

$H_c(A,B) \equiv \{h \in H(A,B) \mid h$ は連続$\}$ とする.

$S(A) \equiv H(A,\mathbb{C})$ は, A の spectrum と言う. $S_c(A) \equiv H_c(A,\mathbb{C})$

M_A : A の maximal ideals の space.

rad(A) : A のすべての maximal ideals の共通部分.

A^{-1} : A の可逆元の集合. $x \in A$, $h \in S(A)$ に対して,

$\hat{x}(h) \equiv h(x)$ で $\hat{x}$ を定める. $\hat{A} \equiv \{\hat{x} \mid x \in A\}$.

$S(A)$ の位相は、Gelfand 位相とする.

X を位相空間とするとき,

$F(X)$: X 上のすべての複素数値関数の algebra,

$B(X)$: X 上のすべての複素数値有界関数の algebra,

$C(X)$: X 上のすべての複素数値連続関数の algebra.

X を複素平面 $\mathbb{C}$ の compact set とするとき,

$R(X)$: X 上に極を持たぬすべての有理関数の algebra $R_0(X)$ の X 上の uniform closure,

$A(X)$: X 上で連続, X° 上で analytic なすべての関数の algebra.

定義2. $B' < B$, $h \in H(A, B')$ に対して, 写像

$D: A \longrightarrow B$ が <u>h-微分</u> $\iff$ D: ① 線形写像,

② $D(xy) = h(x)Dy + h(y)Dx$, $\forall x, y \in A$.

写像 $D: A \longrightarrow B$ が <u>h-連続微分</u>

$\iff$ D: ① h-微分, ② 連続.

線形写像Dが有界のときは, <u>h-有界微分</u>ともいう.

$\mathcal{D}(A, B, h) \equiv \{D \mid D$ は h-微分$\}$

$\mathcal{D}_c(A, B, h) \equiv \{D \mid D$ は h-連続微分$\}$. h が, 恒等写像 id や Gelfand map $\wedge$ のとき, $\mathcal{D}(A, A, id)$, $\mathcal{D}(A, B, \wedge)$ †) の元を単に<u>微分</u>といい, $\mathcal{D}(A, A)$, $\mathcal{D}(A, B)$ とそれぞれかく. 同様に連続のとき, 単に<u>連続</u>(又は<u>有界</u>)<u>微分</u>といい, $\mathcal{D}_c(A, A)$, $\mathcal{D}_c(A, B)$ とかく. 特に, $h \in S(A)$, $B = \mathbb{C}$ のとき, $\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, h)$ の元を<u>h での点微分</u>, $\mathcal{D}_c(A, \mathbb{C}, h)$ の元を, <u>h での連続</u>(又は<u>有界</u>)<u>点微分</u>という.

†) ここでは $B \supset \hat{A}$ とする.

§3. 微分

定理1. (Singer と Wermer[1]) A: 可換 Banach algebra.

$D \in \mathcal{D}_c(A, A) \Rightarrow D(A) \subset rad(A)$.

特に, A: semi-simple $\Rightarrow$ $D = 0$.

証明. $\phi \in S(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathfrak{A}$ に対して, $\psi_\lambda(x) \equiv \phi(e^{\lambda D}(x))$ とすると, $\psi_\lambda \in S(A) = S_c(A)$ から, 関数論の Liouville の定理を

用いて，$\phi(Dx)=0$．$\therefore Dx\in rad(A)$．

系１．（Šilov）区間$[a,b]$上での無限階微分可能なすべての複素数値関数の algebra $C^{\infty}[a,b]$を，Banach algebra とする norm は，存在しない．

系２．定理１の結論は，$\mathfrak{h}$が同形連続ならば，$\mathfrak{h}$-有界微分でも成立する．

次の定理は，微分が，有界微分と有限個の非有界点微分の和であることを，示している．

定理２．（Curtis [5]）．A：単位元をもち regular，可換，semi-simple Banach algebra．$D\in\mathcal{D}(A,B(S(A)))$．

$\Longrightarrow$ 次の条件を満たす有限集合$E\subset S(A)$と$D_1\in\mathcal{D}_c(A,B(S(A)))$が存在する：① $D_2\equiv D-D_1$とすると，$D_2x(\phi)=0$，${}^{\forall}x\in A$，$\phi\in S(A)-E$，② $\phi\in E$に対しては，$f_\phi(x)\equiv D_2x(\phi)$は，非有界点微分である．

証明．次の Bade と Curtis [3]の結果が有効な手段である：

『$\|\ \|_1$：Aを normed algebra とする一つの norm

$$\mathcal{G}\equiv\{G\subset S(A)\mid G\text{は open，}carr(\hat{x})\subset G\text{なるすべての}x\in A\text{に対して，}\|x\|_1\leqq M_G\|x\|\text{なる定数}M_G\text{が，存在する}\}$$

$\Longrightarrow$ 次の 1)，2)を満たす有限集合Fが存在する： 1) Gが open，$\overline{G}\cap F=\phi\rightarrow G\in\mathcal{G}$，2) $G\in\mathcal{G}\rightarrow G\cap F=\phi$』．

さて，今 $\|x\|_1 \equiv \|x\| + \|Dx\|_\infty$，ここで $\| \ \|_\infty$ は sup-norm，とする．$E \equiv F$．$\phi \in E$ に対し，$f_\phi(x) \equiv Dx(\phi)$ は，uniform boundedness の原理を用いて，有界線形汎関数であることがわかる．$E \neq \Phi$，D が非有界のとき $D_1x(\phi) \equiv Dx(\phi)$，$\forall\phi \in E$，$\equiv 0$，$\forall\phi \notin E$，で D_1 を定めると，有界となり $D_2 \equiv D - D_1$．

系．[5]．A は定理2と同じ $\Rightarrow \mathcal{D}(A, C(S(A))) \equiv \mathcal{D}_c(A, C(S(A)))$．

次の定理は，下記の topological algebra $\mathfrak{A}$ においては，定理2の regularity の条件が，不要な事を示している．

$\mathfrak{A}$：① 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の可換 algebra，② 距離づけ可能な完備局所凸位相空間，③ 乗法が連続，④ 単位元（1とかく）を含む，⑤ $\mathfrak{A}^{-1}$ は1の近傍，⑥，②と⑤については，$\mathfrak{A}$ の位相は semi-norm の列 $\{\| \ \|_i\}$ によって与えられ，

$\|x - 1\|_1 < 1$，$x \in \mathfrak{A} \longrightarrow x \in \mathfrak{A}^{-1}$ とする．

$\Phi \equiv \{ \phi \in S(\mathfrak{A}) \mid |\phi(x)| \leq \|x\|_1, \forall x \in \mathfrak{A} \}$．

定理3．（Johnson [9]）$\mathfrak{A}$ と Φ は上記のものとする．

Φ は $\mathfrak{A}$ の点を分離 $\Longrightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{A}, \hat{\mathfrak{A}}) = \mathcal{D}_c(\mathfrak{A}, \hat{\mathfrak{A}})$．

証明．次の Lemma [9] が有効である：『$D \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}, F(\Phi))$，無限個の $\phi_1, \phi_2, \cdots \in \Phi$ に対して $x \longrightarrow Dx(\phi)$ が不連続 $\Longrightarrow Dx \notin B(\Phi)$ となる $x \in \mathfrak{A}$ が存在する』．さて $Dx \in B(\Phi)$ より $x \to Dx(\phi)$ は，$\phi \neq \phi_1, \cdots, \phi_n$ で有界．計算で，$\phi_1, \cdots \phi_n$ でも有界となり，closed graph theorem

を用いて，Dは連続となる．

定理4．(Johnson [9])．A：単位元をもつ可換Banach algebra．$C(S(A))$は，点別収束より強い局所凸距離づけ可能な位相をもつ．$D \in \mathscr{D}(A, C(S(A)))$．

$\Longrightarrow$ 次の条件を満たす直交巾等元$e_0, e_1, \cdots, e_n \in A$が存在する： 1) $e_0 + \cdots + e_n = 1$，2) $D|e_0A$は連続，3) 各algebra e_iA, $i = 1, \cdots, n$, は一意のmaximal idealをもつ．

証明．前のLemmaより，$x \longrightarrow Dx(\phi)$の不連続な点を，$\phi_1, \cdots, \phi_n$とし，この中での孤立点を，$\psi_1, \cdots \psi_k$とすると，Šilovの定理から，$\exists\, e_i \in A$で$\psi_i(e_i) = 1$, $\phi(e_i) = 0$, ${}^\forall \phi \neq \psi_i$．$e_ie_j = 0$ $(i \neq j)$となるので，1)は$e_0 \equiv 1 - (e_1 + \cdots + e_k)$とすればよい．2)は，$e_0A \ni x_i \longrightarrow 0$, $Dx_i \longrightarrow y$ $\Rightarrow$ $y = 0$を$De_i = 0$とyの連続性によって言い，故にclosed graph theoremよりわかる．3)は，明らか

§4．点微分

Banach algebraの場合，次の定理は，点微分存在の必要十分条件として，よく知られている．証明は，Hahn-Banachの定理を用いる．

定理5．A：単位元をもつ可換Banach algebra，$\phi \in S(A)$とすると，

$\mathcal{D}(A,\mathbb{C},\phi)\neq\{0\} \iff \ker\phi \neq (\ker\phi)^2$

$\mathcal{D}_c(A,\mathbb{C},\phi)\neq\{0\} \iff \ker\phi \neq \overline{(\ker\phi)^2}$.

さて，function algebra について考える．

A : X 上の function algebra .

$x\in X$ に対して，$\phi_x(f)\equiv f(x)$, $\forall f\in A$.

X に，metric topology を $\|x-y\|\equiv\|\phi_x-\phi_y\|$ で入れる．

次の定理は，単位元をもつ Banach algebra のときも，成立するが，定理の逆は，正しくない．

定理 6. (Browder [12]) A : X 上の function algebra

$x\in X$ は，上の metric topology で，孤立点でない

$\Longrightarrow \mathcal{D}(A,\mathbb{C},\phi_x)\neq\{0\}$

証明．対偶を示す．$\ker\phi_x=(\ker\phi_x)^2$ とする．

$K\equiv\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i g_i \mid f_i, g_i\in\ker\phi_x$, n は任意正整数,

$\lambda_i\in\mathbb{C}$, $\|f_i\|=\|g_i\|=1$, $\sum|\lambda_i|\leqq 1\}$.

$\ker\phi_x=\bigcup_{n=1}^{\infty} nK$ より，Baire category theorem を用いて，$\overline{K}$ が，0 の近傍となるので，$\psi\in M^*$ に対して，$C\|\psi\|\leqq\sup\{|\psi(f)| : f\in K\}$ なる $C>0$ が，存在する．ψ が，かつ乗法的，$\neq 0$ ならば $\|\psi\|\geqq C$ となる．特に，ある $y\in X$ に対して，$\psi=\phi_y$ かつ $x\neq y$ ならば $\|\psi\|\leqq\|x-y\|$ より $\|x-y\|\geqq C$.

次の定理は，$x\in X$ が peak sets の共通部分でもよい．

定理7.(cf [12], [16]) A: X上の function algebra
$x \in X$: peak point $\Longrightarrow \mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi_x) = \{0\}$.

証明. $\ker \phi_x$ は approximate identity をもつので, Cohen の分解定理 [10] から, $\ker \phi_x = (\ker \phi_x)^2$ となる.

又, 単位元をもつ可換 Banach algebra A の $\ker \phi$ が, approximate identity をもつならば, $\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi) = \{0\}$.

さて, Gleason part との関連をみる.
Wermer は Dirichlet algebra, Hoffman は log-modular algebra, さらに Lumer は function algebra で $\phi \in S(A)$ が unique representing measure をもつとき, それぞれ ϕ を含む Gleason part[†)] は, ϕ のみか, ϕ での analytic disc からなることを示した.

Sidney は, これに有界点微分を結びつけた.

†) $P_\phi \equiv \{ \psi \in S(A) \mid \|\psi - \phi\| < 2 \}$.

定理8.(Sidney) A: X上の function algebra
$\phi \in S(A)$ は unique representing measure をもつ.
$\Longrightarrow$ 1) $P_\phi = \{\phi\}$, あるいは, 2) 次の条件を満たす単位開円板から P_ϕ (metric topology は A^* で…) の上への位相同形な写像 π が存在する: $\hat{f} \circ \pi$ ($\forall f \in A$) が正則, $\pi(0) = \phi$.
そして 1) のとき, $\ker \phi = \overline{(\ker \phi)^2}$,
2) のとき, $\overline{(\ker \phi)^n} / \overline{(\ker \phi)^{n+1}}$ は一次元である, $n \geqq 0$.

次に $R(X)$ についての点微分を考える.

定理9. (Browder [12]) $x \in X$.

$\mathcal{D}(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \Longleftrightarrow x$ は $R(X)$ の Choque 境界点でない.

証明. 定理6と「norm topology で孤立点は Choque 境界点である」と [11] の定理から得られる.

系.[12] $R(X) = C(X) \Longleftrightarrow \mathcal{D}(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) = \{0\}, \ ^\forall x \in X$.

Swiss cheese に関しては, $R(X) \neq C(X)$ で, 0でない有界点微をもたぬ $R(X)$ の例として, Wermer [13] は, ある Swiss cheese を作った. 点微分存在の十分条件は 次のものである.

定理10. (Browder) X: 中心 a_i, 半径 r_i の開円板 D_i, $i=1, 2, \cdots$ を取り除いた Swiss cheese. $z \in X$, $z \notin \partial D_i$, $i=1,2,\cdots$, $|z| \neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{|z-a_i|^2} < \infty$

$\Longrightarrow \mathcal{D}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_z) \neq \{0\}$.

証明 「$\mathcal{D}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \exists k$ (定数) で $|f'(x)| \leqq k \cdot \|f\|, \ ^\forall f \in R_c(X)$ となる」であるので, Cauchy の公式を用いて $f'(x)$ を評価すればよい.

さて analytic capacity を用いて $R(X)$ の有界点微分の存在の必要十分条件を表わせる. 次の定理は Melnikov の結果の analogue とのことである.

S^2: Riemann sphere

$\Delta(x, r) \equiv \{ z \in \mathbb{C} : |z - x| \leqq r \}$

$A_n(x) \equiv \{ z \in \mathbb{C} : 1/2^{n+1} \leqq |z - x| \leqq 1/2^n \}$

$U \subset \mathbb{C}$: 有界平面集合

$\mathcal{H}(U)$: 次の条件を満たす関数全体 : U のある compact subset 以外で analytic, 絶対値 1 以下, ∞ で 0 をとる.

$\mathfrak{A}(U) \equiv \{ f \in \mathcal{H}(U) \cap C(S^2) \mid \|f\| \leqq 1 \}$

$\gamma(U) \equiv \sup \{ |f'(\infty)| : f \in \mathcal{H}(U) \}$

$\alpha(U) \equiv \sup \{ |f'(\infty)| : f \in \mathfrak{A}(U) \}$, ここで $f'(\infty) = \lim_{z \to \infty} z f(z)$. $\gamma(U)$, $\alpha(U)$ をそれぞれ analytic capacity, continuous analytic capacity と言う.

定理11. (Hallstrom [15]) $x \in X$,

$\mathcal{D}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \gamma(A_n(x) \setminus X) < \infty$,

$\mathcal{D}_c(A(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \alpha(A_n(x) \setminus X^\circ) < \infty$.

証明. 略.

次の定理は, $R(X)$ の order n の有界点微分の存在するための必要十分条件で analytic capacity を用いての結果は [15] にみられる.

正整数 n に対して, $x \in X$ での $R(X)$ 上の order n の有界点微分が存在するとは, 次のときを言う:

$\forall f \in R_0(X)$ に対して, $|f^{(n)}(x)| \leqq k \|f\|$ なる定数 k が存在する.

定理12.（Wilken[17]）$x \in X$ で order $n \geqq 1$ の $R(X)$ 上の 0 でない有界点微分が存在する $\Longleftrightarrow$ 次の条件を満たす（complex）representing measure μ_x が，存在する：

$$\int d|\mu_x|(z) \Big/ |z-x|^n < \infty .$$

参　考　文　献

Derivation ;

[1] Singer I. M. and J. Wermer, Derivations on commutative normed algebras, 129 (1955), 260-264.

[2] Kaplansky I., Derivations of Banach algebras, in Seminars on analytic functions, Vol 2, Princeton Univ Press, 1958.

[3] Bade W. G. and P. C. Curtis, Jr., Homomorphisms of commutative Banach algebras,. Amer. J. Math. 82 (1960), 589-608.

[4] Rickart C. E. General Theory of Banach algebras, Van Nostrand, New York, 1960.

[5] Curtis P. C., Jr., Derivations of commutative Banach algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961),

271 – 273

[6] Rosenfeld M. Commutative F-algebras, Pacif. J. Math. 16 (1966), 159–166.

[7] Johnson E. and A. M. Singer, Continuity of derivations and a problem of Kaplansky, Amer. J. Math. 90 (1968), 1067–1073.

[8] Sinclair A. M. Continuous derivations on Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 166–170.

[9] Johnson B. E. Continuity of derivations on commutative algebras, Amer. J. Math. 91 (1969), 1–10.

Point derivation;

[10] Cohen P. J. Factorization in group algebras, Duke Math. J. 26 (1959), 199–206.

[11] Curtis P. C., Jr and Figá-Talamanca, A. Factorization theorems for Banach algebras, in "Function Algebras", pp 169–185. Scott Foreman, 1966.

[12] Browder A. Point derivations on function algebras, J. Functional analysis 1 (1967), 22–27.

[13] Wermer J., Bounded point derivations on certain Banach algebras, J. Functional Analysis, 1 (1967) 28–36.

[14] Sidney S. J., Point derivations in certain sup-norm algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968) 119–127.

[15] Hallstrom A.P., On ~~bounded~~ point derivations and analytic capacity, J. Functional Analysis 4 (1969), 153–165.

[16] Browder A., Introduction to Function Alogebras, WA. Benjamin, INC, 1969, 63–78.

[17] Wilken D.R., Bounded point derivations and representing measures on R(X), Proc. Amer Math. Soc. 24 (1970), 371–373.