

乱流における非線形相互作用の構造

信州大 工 大 路 通 雄

はじめに

乱流を標語的にいえば、連続無限自由度をもつ非線形な散逸系の不規則過程であって、まさに三重・四重のかげでかまわれている。勿論、乱流が Navier-Stokes (以下 NS と略) 方程式で支配されていることは疑いなしとしても、果たして NS 方程式だけで十分なのか、ではないとすればどれだけの独立な原理が必要なのか、亦ら必ずしも自明ではない。

たとえば、「速度位相空間における確率保存」の要請を NS 方程式と組み合せて特性汎関数方程式は、乱流を最も広く規定するものとみなされる。もし、これを一般かつ厳密に“解く”とかでよければ問題はないか、今の所それが無条件に可能であるという保証はなく、実行の方法も確立されていない。

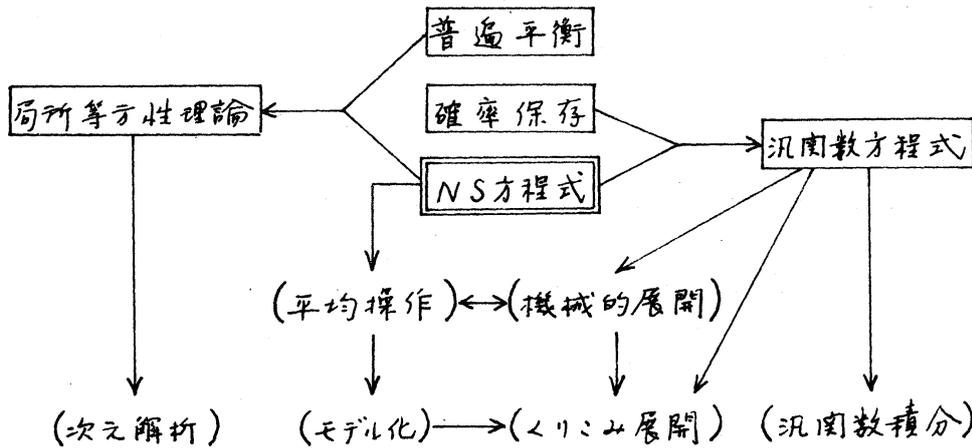
また、NS 方程式と独立に「普遍的平衡状態の存在」を仮定すれば、いわゆる $-5/3$ 乗スワクトル則が得られるか、それは乱

れの機構に立ち入らない一種の“熱力学的”考察による結果であり、これに具体的な肉づけをすることは別の問題である。

一方、より伝統的な方法では、直接NS方程式から出発し、早い段階で平均操作を行なって、低次のモーメントに注目する。このとき、よく知られた階級方程式の困難が必然的に生ずるか、これを物理的モデルによってまけるか、機械的展開の打ち切りによって処理するかに応じて、いく通りもの理論が提案されてきた。Heisenberg理論は前者、レイノルズ数またはキムラント展開法は後者の例である。しかしこれらの成功はごく限られたもので、満足というにはほど遠い。”

こうした背景のもとで、乱流理論は再び百家争鳴の渦中にある。詳細は文献^{(1)~(3)}に中するが、新しい試みの多くは、擾動をとる場合、単純な打ち切り法とちがって各次の近似に一定の物理的内容をもたせようとするものである。このような系統では、素朴なモデルの精密化・体系化ともいえる反面、形の上では機械的展開におけるすべての次数の項を適当に“くりこむ”ことにほかならない。つまり最低次の近似でも無限級数の部分和になっている。一般に、この種の方法は相互作用の強い系に対する常用手段であるけれども、どのようなくりにみか成功するかは、普通事前にはわからない。それでも何か説得力のある選択原理が要求されるのではなからうか。

下にこれらの事情を試みに図式化しておく。ただし、この小文では、特に図形によるくりこみの取扱いを中心として、乱流における非線形相互作用をとらえる手加減をこりとしたい。



1. 基本グラフ

場の量子論で散乱のS行列を計算するためFeynman(1948)が創案したダイアグラム法の本質的特長は、複雑な構造をもつ無限級数の部分和を、一定の規則で作られた図形により直観的に求める得る点にある。Wyld(1961)⁴⁾はこの考えを乱流相互作用のくりこみに応用し、Lee(1965)⁵⁾はMHDの場合に拡張した。以下、話をOHDに限って進めるとしよう。

(1) 基礎方程式

ソレノイダルな不規則外力 $\hat{f}_i(x, t)$ をうける非圧縮性流体のNS方程式は、慣用の記法で、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \hat{v}_i = \hat{f}_i - \frac{\partial \hat{v}_j \hat{v}_j}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} ; \quad \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

いま、体積V、時間Tの中で一様定常な乱れの場合を考え、波数k、

振動数 ω を成分とする 4 元ベクトル ω の 4 次元 Fourier 分解

$$\begin{cases} \hat{v}_i(x, t) \\ \hat{f}_i(x, t) \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{VT}} \sum_{\omega} \begin{cases} v_i(\omega) \\ f_i(\omega) \end{cases} e^{i(k \cdot x - \omega t)} ; \quad \omega = (k, -\omega) \quad (2)$$

を行なえば, (1) は, 圧力項を消去した形に,

$$(-i\omega + \nu k^2) v_i(\omega) = f_i(\omega) - \frac{i}{2\sqrt{VT}} P_{ijm}(k) \sum_{\omega'} v_j(\omega') v_m(\omega - \omega'), \quad (3)$$

および $k_i v_i(\omega) = k_i f_i(\omega) = 0$ に変換される。ただし,

$$P_{ijm}(k) = k_m \Delta_{ij}(k) + k_j \Delta_{im}(k) ; \quad \Delta_{ij}(k) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (4)$$

さらに, (3) の非線形項の結合パラメータ g (レイノルズ数と考えるとよい) を含むものを解釈し, 二つの演算子

$$\left. \begin{aligned} \text{propagator (またはグリーン関数)} : S_{ij}(\omega) &= \frac{1}{(-i\omega + \nu k^2)} \Delta_{ij}(k), \\ \text{vertex (operator)} : P_{ijm}(\omega) &= \frac{-i}{2\sqrt{VT}} P_{ijm}(k) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を定義すると, (3) は形式的に,

$$v_i(\omega) = S_{ie}(\omega) [f_e(\omega) + g P_{ijm}(\omega) \sum_{\omega'} v_j(\omega') v_m(\omega - \omega')] \quad (6)$$

と書ける。つまり, $v_i(\omega)$ の g べき級数展開

$$v_i(\omega) = v_i(\omega)_0 + g v_i(\omega)_1 + g^2 v_i(\omega)_2 + \dots \quad (7)$$

を仮定するが, この g は必ずしも小さいパラメータと考へることは単純な擾動法とちがっている。

(2) v-グラフ

展開 (7) の各項は (6) により結局 $v_i(\omega)_0$ に帰着するが, その複雑な構成を系統的に示すために, つぎの図形要素を用いる。

$$S_{ij}(\omega) \leftrightarrow \overset{i}{\text{---}} \omega \text{---} \underset{j}{\text{---}} \quad (\text{細い直線}); \quad P_{ijm}(\omega) \leftrightarrow \overset{i}{\text{---}} \underset{j}{\text{---}} \underset{m}{\text{---}} \quad (\text{小さい尖}). \quad (8)$$

すなわち, (7) を (6) に代入し, g の同べきの項を比べて, 逐次

$$\begin{aligned}
 v_i(\nu_0)_0 &= S_{il}(\nu_0) f_l(\nu_0) && \leftrightarrow \text{---} f \\
 v_i(\nu_0)_1 &= S_{il}(\nu_0) P_{ljm}(\nu_0) \sum_{\nu_0'} v_j(\nu_0')_0 v_m(\nu_0 - \nu_0')_0 && \leftrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \bullet \begin{array}{l} / f \\ \backslash f \end{array} \end{array} \\
 v_i(\nu_0)_2 &= S_{il}(\nu_0) P_{ljm}(\nu_0) \sum_{\nu_0'} 2 v_j(\nu_0')_0 v_m(\nu_0 - \nu_0')_1 && \leftrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \bullet \begin{array}{l} / f \\ \backslash \bullet \begin{array}{l} / f \\ \backslash f \end{array} \end{array} \end{array}
 \end{aligned} \tag{9a}$$

... のようなグラフ (波数, 添字略) が得られる. もっと簡単には, --- f の部分をすべて省くことに約束し, $v_i(\nu_0)_1$ 以下を

$$\begin{aligned}
 v_i(\nu_0)_1 &\leftrightarrow \text{---} \bullet \\
 v_i(\nu_0)_2 &\leftrightarrow 2 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\
 v_i(\nu_0)_3 &\leftrightarrow 4 \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet + \text{---} \bullet \begin{array}{l} / \bullet \\ \backslash \bullet \end{array}
 \end{aligned} \tag{9}$$

... としてもよい. これらの v -グラフは, いずれも木の枝構造をもち, 開放端に始まって vertex におわる. 一般規則は,

- (a) n 次のグラフは n 個の vertex を含み, ループをもたない.
- (b) vertex で波数保存 (左の波数 = 右の波数の和).
- (c) vertex 自身の波数は左にならい, 添字は両側でコントラクト.
- (d) 係数 = $2^{\alpha+\beta}$ (α : --- \bullet の数, β : 非対称枝分れの数).

つまり, n 個の vertex をもつ独立な木の枝配列の各々 n (d) の係数をかけて加え合わせれば, $v_i(\nu_0)_n$ を得るわけである.

(3) U-グラフ

乱れの一様定常性から, Fourier 成分の 2 次モーメントは,

$$\langle v_i(\nu_0) v_j(-\nu_0) \rangle = U_{ij}(\nu_0) \tag{10}$$

で与えられる, 展開 (7) に相当してその g 級数表示が導かれる.

この級数は, (9a)により $v_i(\phi)_0$ のさまざまなモーメントで表わされるが, 特に外力 $f_i(\phi)$, 従って $v_i(\phi)_0$ に正規分布を仮定すれば (これは非線形相互作用の統計的性質をみるためのにも適當な仮定である), 奇数次のモーメントはすべて0, 偶数次のそれは2次モーメント $U_{ij}(\phi)_0$ の積和 κ として (正規関係) から, 結局

$$U_{ij}(\phi) = U_{ij}(\phi)_0 + g^2 U_{ij}(\phi)_2 + g^4 U_{ij}(\phi)_4 + \dots \quad (11)$$

のように偶級数となり, $\kappa \rightarrow U_{ij}(\phi)_2, \dots$ は $U_{ij}(\phi)_0$ だけの合成積和 κ に帰着する。そこで, (8) のほか κ 新らしい図形要素として

$$U_{ij}(\phi)_0 = \langle v_i(\phi)_0 v_j(-\phi)_0 \rangle \leftrightarrow \overset{i}{\text{---}} \overset{+ (\phi) -}{\text{~~~~~}} \overset{j}{\text{---}} \quad (\text{細い波線}) \quad (12)$$

を用いるのは (11) に対して十分である。たとえば, 2次の場合

$$U_{ij}(\phi)_2 = \langle v_i(\phi)_2 v_j(-\phi)_0 + v_i(\phi)_1 v_j(-\phi)_1 + v_i(\phi)_0 v_j(-\phi)_2 \rangle \quad (13a)$$

において, (9a) を用いると, 第一項は,

$$\begin{aligned} \langle v_i(\phi)_2 v_j(-\phi)_0 \rangle &= 2 \sum_{\phi'} \sum_{\phi''} S_{il}(\phi) P_{lmn}(\phi) S_{mp}(\phi - \phi') P_{pqr}(\phi - \phi') \\ &\quad \times \langle v_j(-\phi)_0 v_n(\phi')_0 v_q(\phi'')_0 v_r(\phi - \phi' - \phi'')_0 \rangle \end{aligned}$$

であるが, これを正規関係により $U_{ij}(\phi)_0$ の積和 κ に分解すれば,

$$2 \frac{j}{i} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n \\ l \\ m \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p \\ r \\ q \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + 2 \frac{j}{i} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n \\ l \\ m \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p \\ r \\ q \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + 2 \frac{j}{i} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n \\ l \\ m \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p \\ r \\ q \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} .$$

$\langle v_i(\phi)_0 v_j(-\phi)_2 \rangle$ は各 $\gamma \rightarrow \bar{\gamma}$ と左右反転したものである。同様 κ ,

$$\begin{aligned} \langle v_i(\phi)_0 v_j(-\phi)_1 \rangle &= \sum_{\phi'} \sum_{\phi''} S_{il}(\phi) P_{lmn}(\phi) S_{jip}(-\phi) P_{pqr}(-\phi) \\ &\quad \times \langle v_n(\phi)_0 v_m(\phi - \phi')_0 v_q(-\phi)_0 v_r(-\phi - \phi'')_0 \rangle \end{aligned}$$

に対しては,

$$\frac{j}{i} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n \\ l \\ m \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p \\ r \\ q \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \frac{j}{i} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n \\ l \\ m \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p \\ r \\ q \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \frac{j}{i} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} n \\ l \\ m \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} p \\ r \\ q \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} .$$

これらの中、 のように n 本の  で連結した部分をもつグラフ("プロパーでない"という)は、波数保存の条件により DC 分($\omega=0$)を含むことになるので実は 0, また図形的に同じ形のグラフは区別の必要がなから、(13a)は,

$$U_{ij}(\omega)_2 \leftrightarrow 4 \text{---} \text{---} \text{---} + 4 \text{---} \text{---} \text{---} + 2 \text{---} \text{---} \text{---} \quad (13)$$

となる。さらに高次の U -グラフは文献²⁾⁻⁵⁾を参照されたい。

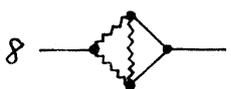
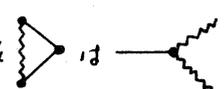
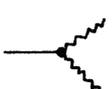
上の手続きを一般化すれば、 U -グラフの規則は、

- n 次のグラフは n 個の vertex を含み、各 vertex には 3 本の線が会するが、その中 \sim は n の n 本である。
- vertex で波数保存, n 本 \sim では左と右で逆符号をとる。すなわち, $\overset{+(\omega)}{\sim}$ または $\overset{-(\omega)}{\sim}$ のようにする。
- 係数は一般には 2^n , n 本 \sim だけ閉じたループをもつグラフについては 2^{n-1} とする ($n \geq 6$ では例外がある)。

要するに、 $l+m=n$ を満たすすべての l, m について、 l 次と m 次の U -グラフを向き合せ、,  または  の形の vertex を 1 本または 2 本の \sim で結んで (a) が成り立つようにする。こうしてできる独立なプロパーなグラフの各々に (c) の係数をかけて加え合せればよい。 U -グラフは、 U -グラフとちがって両端が開放であり、必ず閉じたループを含んでいる。

2. 変形されたグラフ

このような $U_{ij}(\omega)$ の g 展開は、それだけでは g が小さくない

限り役立たないが、 \mathcal{U} -グラフの構造を観察すると、それらはいくつかの型に分類できることがわかる。すなわち、一見複雑なグラフでも、その一部の機能をより簡単なパターンで代行させれば低次のグラフと同形になる場合が多い。たとえば、 8  (4次の \mathcal{U} -グラフの一つ) において、 4  は  の部分に対しあたかも一つのvertexのような役目をしており、これを仮りに \circ で示すと、2次グラフの形  に書ける。同様の考え方で、propagator $S_{ij}(06)$, vertex $P_{ijm}(06)$ のはたらしに注目し τ より τ のみ演算子をつづきのよう定義しよう。

(1) 変形 propagator (S' -グラフ)

$S_{ij}(06)$ の機能は、その両端でそれぞれ vertex を介してグラフを構成し得る点にある。そこで、両端に propagator をもち、それが1本の直線部分で連結された独立で Γ 口パーなグラフについて、 \mathcal{U} -グラフに準じた規則により作られる g 級数を変形 propagator $S'_{ij}(06)$ と呼ぶ。これは偶級数で

$$S'_{ij}(06) \leftrightarrow \text{---} + 4g^2 \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \quad (14)$$

この各項は、機能的に $S_{ij}(06)$ を代行することかできる。

(2) 変形 vertex (Γ -グラフ)

$P_{ijm}(06)$ の機能は、3本の線要素を介してグラフを構成し得る点にある。そこで、それぞれ2本の線要素に連結した3つの端点をもつ独立で Γ 口パーなグラフをとり、これから作ら

れる g 級数を変形 vertex $T_{ijm}(\alpha\beta, \alpha\beta')$ と呼ぶ。これは奇級数となり,

$$T_{ijm}(\alpha\beta, \alpha\beta') \leftrightarrow g \cdot + 4g^3 \left[\text{triangle with wavy line} + \text{triangle with zigzag line} + \text{triangle with dashed line} \right] + \dots \quad (15)$$

のように, 2つの端点の波数に關係する2波数関数(1次項だけは例外)であるが, その各項は $P_{ijm}(\alpha\beta)$ を代行できる。

それらについても, さらに高次の図形^{2)~5)}はこゝでは省き, 独立なグラフの数だけ表示しておく ($f_i(\alpha\beta)$ が正規的な場合)。

	0次	1次	2次	3次	4次	5次	...
V-グラフ	—	1	1	2	3	6	...
U-グラフ	1	0	3	0	29	0	...
S'-グラフ	1	0	1	0	9	0	...
T'-グラフ	0	1	0	3	0	54	...

3. くりこみ方程式

つぎの問題は, 以上のいろいろなグラフから, 振動級数の適当な部分初を構成して行くことである。その手続と結果を図示する R の R , あら R の T

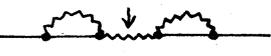
$$\left. \begin{aligned} U_{ij}(\alpha\beta) &\leftrightarrow \text{wavy line} && \text{(太い波線, 級数(11))} \\ S'_{ij}(\alpha\beta) &\leftrightarrow \text{thick line} && \text{(太い直線, 級数(14))} \\ T'_{ijm}(\alpha\beta, \alpha\beta') &\leftrightarrow \bullet && \text{(大きい点, 級数(15))} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

と書けば都合がよい(波数, 添字の表示は(8), (12)に準じる)。

(1) U-方程式

U-グラフは, A, B 2つのクラスに大別される。

クラス A: 1本の を切断すれば2つの部分に分れるもの。

(例) 2次:  など (計2つ); ↓は切断の位置を示す。
 4次: ,  など (計19個)。

クラス A だけの部分積 $U_{ij}^A(\phi)$ に対してつぎの定理が成立つ。

$$\left. \begin{aligned} U_{ij}^A(\phi) &= S_{il}(\phi) F_{lm}(\phi) S_{mj}(-\phi) \leftrightarrow \text{---} \boxed{\text{---}} \text{---} \\ F_{ij}(\phi) &= \langle f_i(\phi) f_j(-\phi) \rangle \leftrightarrow \boxed{\text{---}} \text{ (外カスノフトル) } \end{aligned} \right\} (17)$$

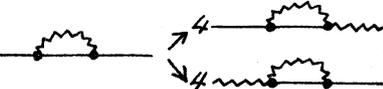
(略証) $S_{ij}(\phi)$ の逆演算子を $T_{ij}(\phi)$ とおくと, $S_{il}(\phi) T_{lj}(\phi) = \delta_{ij}$,

$$f_i(\phi) = T_{il}(\phi) U_l(\phi)_0; F_{lm}(\phi) = T_{lp}(\phi) U_{pq}(\phi)_0 T_{qm}(-\phi).$$

さらに, (14) を $S_{ij}(\phi) = S_{ij}(\phi)_0 + g^2 S_{ij}(\phi)_2 + \dots$ と書けば,

$$\begin{aligned} & S_{il}(\phi) F_{lm}(\phi) S_{mj}(-\phi) \\ &= [S_{il}(\phi)_0 + g^2 S_{il}(\phi)_2 + \dots] T_{lp}(\phi) U_{pq}(\phi)_0 T_{qm}(-\phi) [S_{mj}(-\phi)_0 + g^2 S_{mj}(-\phi)_2 + \dots] \\ &= U_{ij}(\phi)_0 + g^2 [S_{il}(\phi)_2 T_{lp}(\phi) U_{pq}(\phi)_0 + U_{ij}(\phi)_0 T_{qm}(-\phi) S_{mj}(-\phi)_2] + \dots \end{aligned}$$

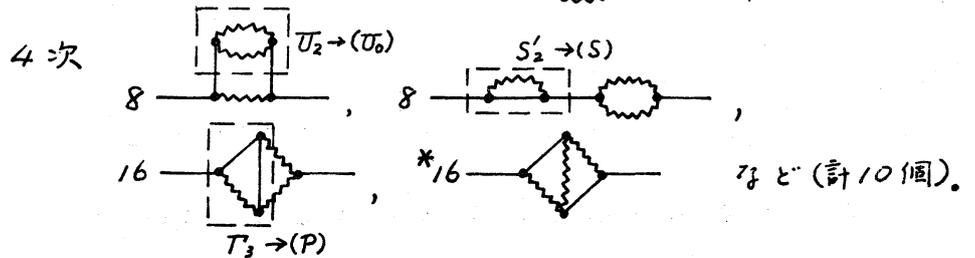
ここで $T \cdot U_0$ の形の部分は --- を消して wavy に代える操作を意味し,

g^2 の項では, $S_{ij}(\phi)_2 \leftrightarrow$ , あるいは,
 クラス A の 2 次の部分を与える。 g^4 以後も同様 (おわり)

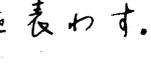
この結果は, 才の近似 $\text{wavy} = \text{---} \boxed{\text{---}} \text{---}$ の拡張に当り, クラス A に属する U -グラフのくりこみにほかならない。

クラス B: クラス A 以外のものをいう。

(例) 0次 なし; 2次: $*_2$  だけ。



図中[]でかこんだ部分はいずれも低次のパターンで、これに対
 応する図形要素()におきかえれば、クラスBの2次図形に帰
 する。このように、その一部を低次の図形でおきかえて下位
 の構造に帰着するものを"可約", そうでないもの(*で示す)を"既
 約"グラフという。後者はその次数に固有のパターンであり、高
 次の既約グラフは全部これから導かれる。従って、2 

 は2 
 に属するすべてのU-グラフのくりこみを表わす。
 こうして各次の既約グラフに次々とくりこんで行けば、クラ
 スBの部分 $U_{ij}^B(\nu_6)$ が得られるであろう。結局、記号的に

$$\text{wavy line} = \text{line with box} + 2 \text{ line with loop} + 16 \text{ diamond} + \dots \quad (18)$$

(2) S' , T -方程式

$S'_{ij}(\nu_6), T_{ijm}(\nu_6, \nu_6')$ についても、既約図形を見出して同様に、

$$\text{line} = \text{line} + 4 \text{ line with loop} + 16 \text{ diamond} + \dots \quad (19)$$

$$\bullet = \bullet + 4 \text{ triangle} + 4 \text{ triangle with loop} + 4 \text{ triangle with loop} + \dots \quad (20)$$

ただし、 S' -方程式(19)を得るには多少の技巧を要する。⁵⁾

(18)~(20)はもはや g 級数ではなく、その各項は g のすべての
 次数の奇点を含んでいる。Fourier分解(2)は、 $V, T \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{VT} \sum_{\nu_6} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4\nu_6 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \quad (21)$$

となるので、これらはまた $U_{ij}^B(\nu_6), S'_{ij}(\nu_6), T_{ijm}(\nu_6, \nu_6')$ に対する連
 立積分方程式とみなされるものである。

4. 近似理論

グラフによるくりこみの方法はきわめて巧妙ではあるが、級数の収束については全くわからず、図形がもつ物理的内容も明確でない、という批判は免れないであろう。しかし、形式論としてどこにも近似を含まないから、逆にさまざまな近似理論を統一的な立場から包括する可能性が期待できる。

(1) キュムラント打ち切り近似

最も簡単に、 $S_{ij}(\omega)$ と $T_{ijm}(\omega, \omega')$ を展開初項で代用すれば、 $U_{ij}(\omega)$ はそれ自身で閉じた積分方程式となる。これは偶数次のフェイメント間に正規関係を復定することを意味し、グラフでは

(22)

と書ける。キュムラント打ち切り法はその有限項による近似に当り、初項は線形近似、才2項までとれば Chandrasekhar の理論 (1955) と同等であって、和を積分に直すと、

$$U_{ij}(\omega) = S_{ij}(\omega) \left[F_{ep}(\omega) + 2 \int_{\omega_1, \omega_2}^{(\omega) - \omega} P_{L_{mz}}(\omega) U_{m_0}(\omega') U_{nr}(\omega - \omega') P_{ppr}(-\omega) d\omega' \right] S_{pj}(-\omega) \quad (23)$$

を与える。キュムラント打ち切り近似の本質的な難点は、propagator が \sim を含まないために相互作用の緩和機構が $U_{ij}(\omega)$ と無関係なモデルとなっている点にあると考えられよう。

(2) Kraichnan の近似

これに対し、 \bullet はそのまま、 --- は考慮する近似は、

$$\left. \begin{aligned}
 \text{~~~~~} &= \text{---} \boxed{} \text{---} + 2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \\
 \text{---} &= \text{---} + 4 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \\
 \bullet &= \bullet + 4 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots
 \end{aligned} \right\} (24)$$

直接相互作用

の形をもつが、このタイプは Kraichnan (1957~) が全く別な物理的考察で提案した方式に相当し、 n 項で打ち切れば $(n+1)$ 個の閉じた波数間の相互作用までを取入れたことになる。

いわゆる“直接相互作用近似”は $n=2$ の場合である。このとき、

$$\left. \begin{aligned}
 U_{ij}(\omega) &= S_{il}(\omega) \left[F_{lp}(\omega) + 2 \int_{(2\pi)^{-4}} P_{lmn}(\omega) U_{mp}(\omega') U_{nr}(\omega - \omega') P_{pqr}(-\omega) d\omega' \right] S'_{pj}(-\omega), \\
 S'_{ij}(\omega) &= S_{ij}(\omega) + 4 \int_{(2\pi)^{-4}} S_{il}(\omega) P_{lmn}(\omega) U_{mp}(\omega - \omega') S'_{mr}(\omega') P_{pqr}(\omega') S'_{pj}(\omega) d\omega'
 \end{aligned} \right\} (25)$$

で、Kraichnan は $S'_{ij}(\omega)$ を“衝撃応答関数”と呼んだ。⁶⁾ vertex は (16) が示す通り、 $\omega, \omega', \omega - \omega'$ 間の相互作用による寄与の重みを表わすから、いまの近似は、それか ω だけに依存すると仮定していることになる。後で示れるように、Kraichnan 理論で波数間の相互作用が $-5/3$ 乗スペクトル則と矛盾する原因は、こゝにあるのかも知れない。

(3) Ulymbkov の近似

変形 vertex の寄与を部分的に考慮する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned}
 \text{~~~~~} &= \text{---} \boxed{} \text{---} + 2 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \text{---} &= \text{---} + 4 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \bullet &= \bullet + 4 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}
 \end{aligned} \right\} (26)$$

Ulybko (1965)はこれによって $-5/3$ 乗スロクトル則が得られるとしているけれども、 --- の二次と \bullet の三次の項は厳密な展開とちがっており、それの結果にどの程度影響しているかはまだ明らかでない。²⁾

はじめ独立に作られたこれら近似理論の間に系統的な説明を与えて見通しをよくしたことは、たしかにダイアグラム法の効用である。厳密な展開図形(18)~(20)を適当に単純化して実用的な計算法が得られるわけであるが、問題はそのような省略に伴う誤差を定量的に見積る所にあり、これはこの方法の限界を超えるものとして今後にはまたなければならぬ。

5. 直接相互作用近似について

この10年余りの間に乱流の理論的研究を最も数多く発表しているものは、恐らく Kraichnan であろう。しかも、殆ど一貫して直接相互作用理論の展開にあるが、同時にその論文は難解かつ非常に流動的な部分もあって評價の分れる所である。筆者の知る限りでも、Proudman & Saffman らは多分に批判的である反面、Orszag, Betchov らの強い支持があり、実際に計算された結果がかなりの程度に合理的であることも見逃すわけには行かない。当面これについて詳しく述べる余裕はないが、つけ加えてごく簡単に言及しておこう。⁶⁾

Kraichnan は、時刻 t' に波数長のモードに加えられた小さい

攪乱 $\delta \xi_i(k, t')$ に対する時刻 t での平均応答関数 $G_{ij}(k; t|t')$ を導入し、運動方程式の非線形項をこのような小攪乱の集まりとみなして、波数空間におけるエネルギー伝達の寄与は、閉じた波数間の相互応答による部分が支配的であると仮定した。この考えを具体化する論旨は明快を欠いているが、結果は k, t 空間での 2 次モーメント $U_{ij}(k; t|t')$ と $G_{ij}(k; t|t')$ とで完結した積分方程式が得られ、乱れが定常な場合に $t'-t$ についての Fourier 変換をとれば、(25) に一致する。その意味で、 G_{ij} または S_{ij} は相互作用の緩和を表わしていることになり、それが $U_{ij}(k)$ と互に関連して変化するので、非線形効果によるエネルギーの流れは、常に分布の不平等を平均化するよう起るのである。この性質が Kraichnan のモデルの大きな特色であって、たとえば負のエネルギー領域が生じるような不都合は勿論現われまい。

ところで、一方高レイノルズ数における慣性領域のスペクトル $E(k)$ を求めると、散逸パワーを ϵ 、乱れの大局的特性速度を v_0 として、

$$E(k) \propto (\epsilon v_0)^{1/2} k^{-2/3} \quad (27)$$

となり、 $-5/3$ 乗則と一致しないばかりでなく、エネルギー伝達の局所化と矛盾する。

これに対して Kraichnan は、慣性領域にある小さい渦成分の挙

動を表現するのに Euler 座標が不適当であると考へ、一般化速度の概念を用いた LHDI (Lagrangian-History-Direct-Interaction) 理論を試みて $-5/3$ 乗則を導いたが、⁷⁾(27)の結果は、さきに述べたように、vertex に関する仮定と関係があるようにも思われる。

おわりに.

乱流における非線形相互作用の構造をめぐり話題はなお多岐に亘るが、要するに漸くその定性的な理解の糸口をつかんだ段階といえようか。それだけに今後への期待も大きいわけである。最後に、本稿では細部よりも全体に重点をおいたため、個々の記号や表現に及らねども厳密でない部分があったことをお断りしおければならぬ。

文 献

- 1) 栗友正: 自然 38(1968)114, 246, 流力懇談会誌 1巻2号(1969)14.
- 2) A. C. Мошин, и А. М. Яглом: Статистическая Гидромеханика II (1967), «Наука».
- 3) M. J. Biran: Statistical Continuum Theories (1968), Intersci. Publ.
- 4) H. Wyld: Ann. Phys. 14 (1961)143.
- 5) L. Lee: Ann. Phys. 32 (1965)292.
- 6) R. Kraichnan: JFM 5 (1959)497, Phys. Fluids I (1964)1030, 1163, 等.
- 7) R. Kraichnan: Phys. Fluids 8 (1965)575, 11 (1968)265, 等.