研究ノート

ヨハン・ベルヌーイ『水力学』における運動方程式

伊藤 和行*

Equation of motion in Johann Bernoulli's *Hydraulica*

Kazuyuki ITO

§1　序——古典力学史と 18 世紀の流体力学——

古典力学史は，科学史研究の中でももっとも歴史が古く，これまでも数多くの専門的研究が発表されてきた．しかしながらその多くは，ガリレオやニュートンの力学理論といった 17 世紀に関するものであり，18 世紀に関する研究は 1980 年代まで遅れていたと言えよう．その背景には，古典力学はニュートンの『プリンキピア』によってその基礎が築かれ，それ以後の発展はその単なる精緻化とみなされていたことが挙げられる．しかし 1990 年以降の 18 世紀力学史の興隆は，従来とは大きく異なるその姿を明らかにしている．

ニュートンが『プリンキピア』で展開した力学理論は幾何学的技法によっており，それを代数的かつ解析的なものに発展させたのは，18 世紀前半に活躍したヴァリニョン，ヨハン・ベルヌーイ，ダニエル・ベルヌーイ，ダランベール，オイラーらだった．我々の馴染んでいる「ニュートン力学」は彼らの活動によって誕生したのである[1]．近年の研究によって明らかとなったことは以下の二点にまとめられよう．第一に，『プリンキピア』においては幾何学的形式によって，微積分の手法を用いずに展開されていた力学理論が代数化され，解析化された．第二に，質点にのみ適応されていた理論が，剛体や流体といった質点系の問題に適用され，力学理論の適用範囲が拡大された．

本稿で取り上げる流体力学においても，18 世紀前半に「ベルヌーイの定理」が提唱され，さらに後半には，オイラーとラグランジュによって二つの形式で基本方程式が

* 京都大学大学院文学研究科 kito@bun.kyoto-u.ac.jp

[1] Blay 2002; Blay1992; Guiccardini 1999; Maltese 2001; Maltese 1992; 山本 1997.

与えられている[2]．最初の本格的な流体力学の理論とも言うべき「ベルヌーイの定理」は，それを提唱したベルヌーイ親子の名前を取ったものである．この定理は，まず息子のダニエル・ベルヌーイによって，1738 年に『動水学』（*Hydrodynamica*）において「活力」（vis viva）の保存を用いて導出され，次いで父のヨハン・ベルヌーイによって，1742 年に『水力学』（*Hydraulica*）において，力学の基本法則すなわち運動方程式から証明されたといわれる[3]．本稿では，17 世紀からダニエルまでの流体力学の発展を概括したうえで，ヨハンの流水の理論に焦点を当て，彼の運動方程式の概念を検討しよう．

§2 流体力学の誕生

近代における流体の運動，とくに流水に関する数量的研究は，ガリレオの弟子たちによって始められた．カステッリ（Benedetto Castelli, 1578-1643）は『流水の尺度について』（*Della misura dell'acque correnti*, 1628）において，流水の問題を数学書の形式で論じ，水の速度と水量の関係を定式化した．水が管を流れるとき，水量が一定の場合には, 速度と管の断面積は反比例するのであって，これは「連続性の法則」に他ならない[4]．

このカステッリの弟子であり，真空の実験で有名なトリチェッリ（Evangelista Torricelli, 1608–1647）は，ガリレオの落下法則が噴射する水の問題にも適用できると考えた．彼は, 物体の落下運動を扱った『重い物体の運動について』（*De motu gravium*, 1644）において，高さ h の水槽の底部から横方向に噴射する水の速度は $\sqrt{h}$ に比例すると述べている．これは，高さ h から落下する物体の速度が $\sqrt{h}$ に比例するのに対応する．「トリチェッリの法則」の信憑性は，17 世紀後半において大きな問題となり，パリの科学アカデミーでは実験が行なわれ，ホイヘンスやニュートンも論じていた[5]．

18 世紀に流体力学の問題は主として水に限定されていたが，様々な管の流れる水の問題に関して，基本法則とも言えるものを提示したのがダニエル・ベルヌーイである．彼は『動水学』において，運動エネルギー保存の考えに基づき，いわゆる「ベルヌーイの定理」を導出したと言われる．彼は管の中の流水の速度，圧力，断面積といった

[2] 18 世紀の流体力学に関する近年の研究としては，Calero 2008; Blay 2007. また流体力学の通史として，Darrigol 2005.

[3] 両者の英語訳が合本で出版されている．Daniel and Johann Bernoulli 1968.

[4] カステッリの流水の理論に関しては，羽片 1995; Maffioli 1994.

[5] Calero 2008, Chapter 6, pp. 268–282.

量の間の関係を一般的に扱う基本的な方法を初めて提示したのであり，彼から流体の力学が始まったと言うことができよう．ダニエルの『動水学』の出版から間もなくして，彼の父ヨハン・ベルヌーイが同じテーマに関する著作『水力学』を発表した．ヨハンはダニエルの著作に刺激され，管の中の流水という同じ問題に対して自らの解法を考察したのだった．しかしヨハンは，その執筆は息子ダニエルの著作の出版以前であるとして，自分の理論のオリジナリティを主張している．現存の史料からは，ヨハンが自分の著作を執筆したのは，ダニエルの著作を読んでからであることがわかっている．ダニエルが運動エネルギーに対応する「活力」の概念を理論の基礎としていたのに対し，ヨハンは，それは間接的な方法であるとして，もっと直接的な方法として運動方程式から同じ式を導こうとしたのである．

ヨハンが試みた運動方程式を基礎とする流水の力学理論は，オイラーとラグランジュによって，流体力学の基本方程式の定式化という形で結実する．オイラーは，1750 年代中頃に発表した一連の論文において，流体全体に対して，その速度や圧力の分布とその時間変化を記述する方程式を提示した[6]．一方ラグランジュは，『解析力学』(*Mécanique analytique*, 1788) において，流体の微小部分の運動を追跡する方法を提出した．両者の方法は流体力学の理論的基礎を与えるもので，オイラーとラグランジュによって，非圧縮性流体の基本的な理論が確立されたのである．

§3 ヨハン・ベルヌーイの『水力学』

『水力学』は，前節でも触れたように息子ダニエルの『動水学』に刺激されて書かれたものであるが，その目的は，その副題で示されているように「任意の形状の容器や管を流れる水の運動」に関して「純粋に力学的に原理から直接的に導出かつ論証された」理論を提示することだった[7]．著作の冒頭に置かれた「序論」(Prefactio) では，彼の方法論と基本的概念が説明され，第一部では，いくつかの連なっている円筒の中を流れる水の速度と圧力が検討され，第二部では，第一部での議論を拡張して様々な形状の管を流れる水の運動が論じられている．

「序論」の始まりで，ヨハンは流体に関する力学の現状をまとめている．「静水学」(hydrosatatica) すなわち容器の中で静止している水を扱った領域に関しては，すでに

[6] “Principe généraux de l’état de’équilibre des fluides”, “Principes généraux du mouvement des fluides”, “Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides”, *Mémoires de l’Académie de Sciences de Berlin*, 1755 (published in 1757).

[7] Bernoulli 1742, p. 387.

法則が論証され，原理も確立されており，それらから現象も明瞭に説明されているので，もはや望むべきことはほとんどない．それに対して「水力学」（hydraulica）と呼ばれる科学は非常に困難であって，力学の法則や規則から導かれていなかった．「水力学」とは，水が開口部より流出する際や，異なる大きさのパイプ間を進んでいく際の速度や圧力を求めるものである．ヨハンは，この分野における最初の重要な業績は彼の息子ダニエルの『動水学』であると認めながらも，ダニエルは「活力の保存」（conservatio virium vivarum）という，まだすべての哲学者が認めているわけではない「間接的な基礎」（fundamentum indirectum）によっているとする．ヨハンは，まだ誰も与えていない「演繹的に，ただ動力学の原理によって，容器から穴を通って流出したり，一様でない大きさの道管内を流れる水の本性を探求できうるような直接的方法」を提出しようというのである[8].

ヨハンは，「動力学の原理」（principia dynamica）を流体に適用する試みを，11 項目からなる動力学の「定義」（definitio）および「補助定理」（lemma）の説明から始めている．ニュートンの『プリンキピア』に倣って力学一般の基本的概念を定義し，ついで運動方程式を提示し，最後に流体を論じる際に必要な規則を提示するのである．最初に定義されているのは「加速力」（vis accleratrix）と「起動力」（vis motrix）である．

1. 一様な**加速**力は，ある与えられた物体に対して，ある与えられた時間で，ある与えられた速度を押し込めるものである．
2. **起動**力は，静止している物体に働くときには，それを運動に駆り立て．またすでに運動している物体を加速したり，減速したり，その方向を変えたりすることができる．
3. 起動力は，質量の比と加速力の比とからの合成比となる．たとえば，２倍の質量を３倍の加速力で動かすためには，あるいは同じことであるが，３倍の質量を２倍の加速力で動かすためには，６倍の起動力が必要である．
4. 起動力を物質量で割ると加速力を与え，また加速力で割ると質量を与える[9].

両者ともニュートンの『プリンキピア』での定義に従っている．「加速力」の定義では，「ある与えられた物体」，「ある与えられた時間」，「ある与えられた速度」という言

[8] Ibid., p. 392.
[9] Ibid., pp. 392–393.

葉が使われているが，それらには，のちほど見る運動方程式では dm，dt，dv という記号が与えられており，質量，時間，速度の微小量に対応していると考えられる．「加速力」は，現代からみれば「力」ではなく「加速度」に相当するが，18 世紀前半には『プリンキピア』に倣って一貫して「加速力」という表現が用いられており，起動力を質量で割ったものすなわち単位質量当たりに働く力を意味していた．

次いでヨハンは，我々の重力加速度に対応する「絶対的な重さ g」(gravitas absoluta g) を導入する．

> 5. 絶対的な重さ g，あるいは重さの原因は，それが何であれ，定まった物体の質量 m を駆動するときには，それにおいて起動力 gm を生み出す加速力である．しかしわれわれが考える際には，それを物体から分け，したがってあたかも外から物体に働くように考えることが許されよう．よってその同じ物体を，重さを免れて，外的な起動力 gm によって，自然に加速されるのと同じ法則でもって加速されるものとたしかに考えよう．だがその力 gm は，物体の外に存在する限りにおいて，**非物質的な**運動力と呼ぶのがよいだろう．それゆえ，もしそれが他へ移され，他の質量 M に働くならば，後者は加速力 $gm : M$ によって加速されるだろう[10]．

この「絶対的な重さ」は，時間や場所によって変わらないことから，ヨハンは「非物質的で不可変な起動力」(vis motrix immaterialis atque invariabilis)[11] と呼び，物体が運動をしていても，その作用の結果は変わらないことを指摘する．すなわち落下運動においては，運動の始まりにおいても，ある程度の速度を得ていても，つねに「絶対的な重さ」すなわち「加速力」は一定であるので，物体は一様加速運動すなわち等加速度運動を行なうのである．これより，この「不可変な起動力」の「強さ」(intensitas) は，物体において，大小の「加速力」が生じる際の「尺度」(mensura) と呼ばれるのである．たとえば，重さは，垂直落下するときには，斜面上を下降するときよりも大きな「強さ」を持っている．というのは，前者では，後者よりも大きな「加速力」が生じるからである．どちらにおいても，重さ自体は変わっていないのであるが．

他の「起動力」はその「強さ」が作用する際に変わることから，「可変な起動力」(vis motrix variabilis) と名付けられる．たとえば曲げられた弾性体は，その作用の初まり

[10] Ibid., p. 394.
[11] Ibid., p. 394.

のときの方が，弛緩が進んだときよりも大きな「加速力」を生み出す．この「可変な起動力」が，物体に作用した際に生じる速度との関係を表わすものが運動方程式であり，ヨハンはここでは「規則」（Regulae）と呼ぶ．

> 以上のことから，以下の規則が得られる：物体によって通過される距離を x；推し進められる物体の質量を m；通過される距離の範囲における起動力を p；獲得された速さを v；x の通過時間を t とすると；これより $dt = \frac{dx}{v}$；$\frac{pdt}{m}$ となり，すなわち $\frac{pdx}{mv} = dv$；よって $\int pdx = \frac{1}{2}mvv$，これはよく知られていることである[12].

最後の式は，当時よく用いられていた「活力」（vis viva）の式であり，彼は運動方程式から「活力」の式を導出したのである．息子ダニエルは，この「活力の保存」を基本原理として議論を進めていったのだが，それに対してヨハンは，この式を議論の出発点とはしない．

この $dv = \frac{pdt}{m}$ という式は，簡単な変形を行なうと $p = m\frac{dv}{dt}$ となることからわかるように，運動方程式に他ならない．よく知られているように，ニュートンはこのような微分の形式での運動方程式を『プリンキピア』では用いていなかった．最初に微分を用いた式を与えたのは，ヴァリニョンであり，それは 1790 年代のことだった．18 世紀に入り，ヨハンやホフマンがこの一次の微分による運動方程式を惑星運動の説明などにすでに適用していた[13].

ここまでの議論は物体一般に関するものだった．最後にヨハンは，流体を論じる際に必要な道具立てとして「層」（stratum）と「移転」（translatio）という二つの概念を導入する[14].「層」とは，流体を，それに加わる力やその流れの方向に垂直な面で切ることで作られる薄い厚さの小部分を意味する．問題を考える際には，まずこの微小部分に対して運動方程式を立て，それを積分することによって流体の全体に対する式を求めるのである．この方法は，すでにダニエルが『動水学』において導入していたものである．

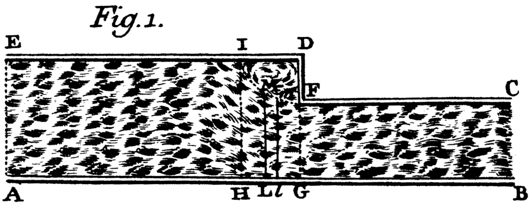
「移転」とは，流体のある部分に加えられた外力から，「パスカルの原理」を用いて他の部分が容器の壁に及ぼす力を求めることを意味している．たとえばある容器中の低い部分にある「層」の面積を m，その重さの要素を π とし，また最も上にある表面

---

[12] Ibid., p. 395.

[13] 18 世紀前半の運動方程式の数学的表現に関しては，伊藤 2006, pp. 154–159 を参照.

[14] Bernoulli 1742, p. 395.



の面積を h とすると，後者へ「移転された重さ」(gravitatio translata) は $\frac{h}{m}\pi$ となる．ここでは，容器中の流体の重力から生じる力が問題となっており，低い部分の重さによる圧力は $\frac{\pi}{m}$ であるが，「パスカルの原理」によって最上部においても同じ圧力が働いている．したがって最上部における力は，圧力 $\frac{\pi}{m}$ に面積 h をかけて $\frac{h}{m}\pi$ となる．

§4　流水の力学と運動方程式

『水力学』の第一部におけるテーマは，大きさの異なる円筒形の道管が繋がっているときに，そこを流れる水の速度や，管の壁に及ぼす圧力を求めることである．問題設定は以下のとおりである．Fig.1 において，道管 $ABCFDE$ は，二つの異なる大きさの円筒形の管，$AGDE$ と $GBCF$ から構成されているとする．前者の底 GD は，その開口部 GF でもって小さな方の道管 BF に繋がっている．道管 BE 全体は，重さを持たない一様な液体によって満たされているが，開口部 AE の側から，「起動力」p（ここでは単位面積当たりに働く力すなわち圧力を意味している）でもって押されている．この力は，流体の面 AE 全体に均等に働いている．このとき，道管を通って流れる液体が従う「加速の法則」(lex accelerationis) を求めるのが問題である．なお常に道管は液体によって満たされており，開口部から液体が同じ速度で流れ込んでいる．

第一に，静水学より，液体の面 AE に働く「非物質的起動力」p は，管 BF の面 GF に伝えられる．これは，管が満たされている限り，液体が静止しても流れていても同様である．第二に，液体が第一の管から第二の管へ進むとき，その速度は，管の断面積に反比例するように変化する．これは「カステッリの法則」に他ならない．したがって，GF の付近の液体は，そこに近づくにつれて加速される．

ヨハンはまず，「渦」(gurges) という概念を導入する[15]．AE から GF へ向かって一定の流れがあるとき，開口部 GF に近づくと加速され始める．加速が連続的に生じて

[15] Ibid., pp. 398–399.

いる微小区間 HG においては，広い管から細い管へ狭まる「渦」(gurges）がある．この「渦」は曲線 IMF によって定められるとする．HG は微小なので，そこで流体は同一の「起動力」によって押されており，またこの「渦」という微小部分にある流体は無限に小さいので，それを押している「起動力」も，流体全体の「加速力」に比べれば無視することができると考えられる．流体は，微小部分 HG を微小時間で通過するが，その際に有限の速度変化が生じている．この微小部分における「起動力」を無視することから，最初の管と第二の管において「活力」の保存法則が成り立つと考えられてきたのである．

ヨハンの解法は「層」すなわち小部分 $LMlm$ に着目し，それに関する運動方程式を求め，それを加速区間に関して積分するというものである[16]．まず横軸にあたる「切断線」(abscissa）$HL = t$ と，縦軸にあたる「規則線」(applicata）$LM = y$ [17]，そして前者の要素として $Ll = dt$ を置く．ついで管 HE の断面積を AE すなわち $HI = h$，管 GC の断面積を BC すなわち $GF = m$，管 GC 内の速度を v と呼ぶ．すると管 HE 内の速度は，その断面積に反比例するので $\frac{m}{h}v$ となる．同じ理由から，「渦」の任意の場所にある液体 $LMlm$ の速度は $\frac{m}{y}v$ であるが，これは u に等しいとする．

このときに，液体の「層」$Lm = \gamma$ に働く「加速力」は「加速の性質より」(ex natura accelerationis)，$\gamma dt = udu$ であり，したがって $\gamma ydx = yudu$ となる．ここで ydx は液体の部分 $LMlm$ の体積であり，さらに液体の比重を 1 と考えているので，ydx は $LMlm$ の質量となるから，γydx は「加速力」と質量との積である．ゆえに右辺の $yudu$ はそこに働く「起動力」の値を与える．

だがこの「起動力」は，静水学より，管 HE 内にあり断面 AE に働いている「起動力」から生じるものである．したがって $yudu$ 対 $hudu$ は，LM 対 HI すなわち y 対 h に等しくなければならない．管 HE における「起動力」は，$yudu$ が「移される」ので $hudu$ となり，それは「渦」の部分 $LMlm$ において「起動力」$yudu$ を生み出すことができる．この $hudu$ を「渦」全体に対して積分すると，$\int_{m/hv}^{v} hudu$ より，$\frac{1}{2}(vv - \frac{mm}{hh}vv)$ すなわち $\frac{hh-mm}{2h}vv$ となる．これが「渦」付近で流体を加速するのに必要な，管 HI における「起動力」である．以上のようにして求められた，管の大きさが変化する「渦」の部分での「起動力」は，その形状に依存せず，第一と第二の管の大きさによって決定されることをヨハンは指摘する．

---

[16] Ibid., p. 400.

[17] 「切断線」と「規則線」は古代ギリシア数学において，楕円などの円錐曲線を論じる際に用いられたものであり，近代の座標概念の先駆とみなすことができる．カッツ 2005, p. 139 を参照．

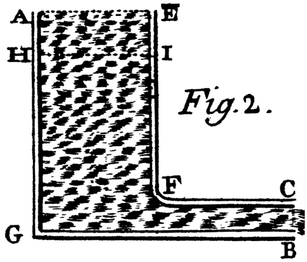


Fig.2.

ついでヨハンは，この「起動力」の式から，「トリチェッリの法則」を導出することへ進んでいる[18]．そのためには，まず Fig.2 のように，管 HE すなわち GE が垂直に立てられており，それに水平の管 GC が繋がれていると考える．そして p を，GE 内に含まれている液体柱の重さとする．HA すなわち $GA = a$ とし，g を重い物体の「自然加速力」(vis naturalis acceleratrix) とするとき，$p = gah$ である．一方先ほどの式より $p = \frac{hh-mm}{2h}vv$ であるから，$gha = \frac{hh-mm}{2h}vv$ が成り立つ．

さらにヨハンは，ガリレオの落下法則を用いて，重さによる力を落下速度に置き換えることを行う．物体が自由落下によって速度 v を得るときの垂直距離を z とすると，$gdz = vdv$ より，$gz = \frac{1}{2}vv$ となる（ここでは物体の質量は 1 とみなされている）．この式を代入すると，$gha = \frac{hh-mm}{h}gz$．よって $z = \frac{hh}{hh-mm}a$．この式は，彼が「水力学の定理」(Theorema hydralium) と呼ぶものを与える．

> 円筒形の容器 $AGFE$ が垂直に立てられ，その底に，両側が開かれた水平の円筒形の管 FB が付けられているとする．容器も管も同様に，つねに水で満たされているとする．そのために，開口部 BC から流れるのと同じだけの水が，容器中の水が持つのと同じ速度でもって絶えず供給されている．流出する水の速度は（もしそれが静止から出発するならば），高さ $= \frac{hh}{hh-mm}a$ だけ自由に落下する重い物体が獲得する速度にきわめて迅速に収束する[19]．

この定理より，容易に「トリチェッリの法則」が導出される．すなわち開口部 BC の大きさが，容器の底面積 AE に比べて非常に小さく，m が h に比べて無視できるとする．このときには $z = a$ となるので，流出する水の速度は，高さ $z = a$ すなわち EF

---

[18] Ibid., pp. 401–402.
[19] Ibid., pp. 401–402.

から自由落下するときに得られる速度に等しい．これは「トリチェッリの法則」に他ならない．

§5 ヨハンの運動方程式

以上の議論において，ヨハンはたしかに微分によって表現された運動方程式を一貫して基礎としていた．しかし彼の運動方程式は，我々が通常運動方程式とみなしているものとは異なっている．我々にとっての運度方程式とは，第一に座標と時間の二階微分方程式，たとえば x 座標に対する $f = m\frac{d^2x}{dt^2}$ を意味しているのに対して，ヨハンにとっては速度と距離の微小量（一次微分）の関係式 $dv = \frac{pdt}{m}$ だった．さらに流水の問題を解く際には，$dt = \frac{dx}{v}$ という関係を用いて，速度と距離の関係 $\frac{pdx}{mv} = dv$ すなわち $pdx = mvdv$ に書き換えていた．この速度と距離の関係式こそ，ヨハンにとっての運動方程式というべきものだったのである．たしかに彼は「活力」の保存則ではなく，運動方程式という微分量の関係式を力学の基礎に置いたと言えるが，それからすぐに我々が知っているような力学の理論体系が展開されたと考えてはならないのである．

ヨハンの力学の問題解法の特異性（我々から見たところの）は，重力が関わるときにはさらに明瞭になる．垂直な容器に水が入っているときの問題を考察する際には，物体が自由落下する際に獲得する速度と落下距離との関係式 $gz = \frac{1}{2}vv$ すなわち $gdz = vdv$ を用いて，速度 v を距離 z によって表わし，問題を x と z という距離の次元を持つ二つの量に書き換えていた．速度を対応する落下距離によって表わすというこの試みは，我々には奇異なものに思われるが，これは彼の弟子であるオイラーも用いていたものである．オイラーは，運動方程式を最初に体系的に用いたことで知られるが，距離と時間に関する二階微分方程式を本格的に用いたのは 1740 年代後半のことだった．彼の最初の力学の著作『力学すなわち解析的に示された運動の科学』（*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, 1736）は，その標題の通り，代数的微積分によって，運動方程式を出発点として力学の理論体系を築こうとする試みであるが，そこで提示されている運度方程式は，ヨハンが『水力学』において用いているものに他ならない[20]．オイラーの用いた運動方程式を，ヨハンの記号によって表わすと，$pdx = mvdv$ あるいは $pdx = mdz$ となるのである．オイラーは，『力学』において，この運動方程式の基礎付けについて非常に詳細に論じ，速度の尺度としての落下距離についても説明をしている．

[20] 伊藤 2006，pp. 158–161.

速度に対応する落下距離によって，重力に関する力学問題を考察するという試みを最初に行なったのが，ヨハンだったのか，オイラーだったのか，あるいは他の誰かだったのかという問題に答えるにはさらに史料を検討しなければならない．いずれにしても，ヨハンやオイラーが運動方程式を力学理論の基礎に据えようとしたのは 1730 年代のことだったが，その際に彼らが考えた運動方程式は，我々が理解しているものとは大きく異なっていた．運動方程式が 18 世紀前半に定式化したことは確かであるが，けっして現在の定式がすぐに成立したわけではなく，その定式化に関しては，さらに歴史的な検討が必要である．

参考文献

Bernoulli, Daniel and Johann. 1968. *Hydrodynamics and hydraulics*. tr. by T. Carmody and H. Kobus. New York: Dover.

Bernoulli, Johannes. 1742. Hydraulica, Nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis. In *Opera Omnia*, Vol. 4, pp. 387–493.

Blay, Michel. 1992. *La naissance de la mécanique analytique. La science du mouvement au tournant des XVIIe et XVIIIe siècles*. Paris: PUF.

———. 2002. *La science du mouvement : De Galilèe à Lagrange*. Paris: Belin.

———. 2007. *La Science du Mouvement des Eaux*. Paris: Belin.

Calero, Julián Simón. 2008. *The genesis of fluid mechanics, 1640–1780*. Dordrecht: Springer.

Darrigol, Oliver. 2005. *Worlds of flow: A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandt*. Oxford: Oxford University Press.

Guicciardini, Niccolò. 1999. *Reading the Principia: The debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736*. Cambridge: Cambridge University Press.

Maffioli, Cesare. 1994. *Out of Galileo: The science of waters 1628–1718*. Rotterdam: Erasmus Publishing.

Maltese, Giulio. 1992. *La storia di $f = ma$: La seconda legge del moto nel XVIII secolo*. Firenze: Olschki.

———. 2001. *Da $f = ma$ alle leggi cardinali del moto : Lo sviluppo della tradizione* *newtoniana nella meccanica del ’700*. Milano: Hoepli.

伊藤和行．2006 年．「オイラーの運動方程式」『科学哲学科学史研究』第 1 号，153–169 頁.

カッツ．2005 年.『数学の歴史』上野健爾・三浦伸夫監訳．東京：共立出版.

羽片俊夫．1994 年.「ガリレオ派の流水論——カステッリの『流水の尺度について』」『ルネサンス研究』第 2 巻，57–79 頁.

山本義隆．1997 年.『古典力学の形成——ニュートンからラグランジュへ』現代数学社.