

# 乱流速度揺らぎ確率密度関数のマルチフラクタル解析

筑波大 物理 有光 敏彦<sup>1</sup>  
 横浜国大 環情 有光 直子<sup>2</sup>

一般化されたエントロピー（示量性 Rényi エントロピーか非示量性 Tsallis エントロピー）に基づくマルチフラクタル解析により, Lewis-Swinney による Couette-Taylor 乱流の実験, Gotoh 等による DNS で得られた速度導関数のスケーリング指数や速度揺らぎ PDF が高精度に再現できることを示す。

## 1 導入

自己無撞着な統計力学的手法で導出した速度導関数のスケーリング指数 [1-4] や速度揺らぎ確率密度関数 (PDF) [4-7] に対する解析的表式を用いると,  $R_\lambda = 270$  ( $Re = 5.4 \times 10^5$ ) における Couette-Taylor 乱流の実験 [8] や  $R_\lambda = 381$  における DNS [9] で測定された速度揺らぎ PDF が高精度で再現される。

乱流の基礎方程式として非圧縮流体に対する Navier-Stokes 方程式  $\partial \vec{u} / \partial t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla (p/\rho) + \nu \nabla^2 \vec{u}$  を採用する。ただし,  $\rho, p, \nu$  は, それぞれ, 質量密度, 圧力, 動粘性率である。ここで対象とする測定量は, 距離  $r$  離れた 2 点での流速場  $\vec{u}$  の 1 成分  $u$  の揺らぎ  $\delta u(r) = |u(x+r) - u(x)|$  である。異なるサイズ  $l_n = \delta_n l_0$  の渦で乱流が構成されていると見なすカスケード模型を想定して定式化を行う。ただし,  $\delta_n = \delta^{-n}$  ( $\delta > 1, n = 0, 1, 2, \dots$ ) である。各カスケードで渦は  $\delta$  個に分裂するが, それにより  $n$  段目では, サイズ  $l_n$  の渦からサイズ  $l_{n+1}$  の渦へ単位質量あたりのエネルギー輸送率  $\epsilon_n$  でエネルギーが受け渡される。この系の Reynolds 数は  $Re = \delta u_0 l_0 / \nu = (l_0 / \eta)^{4/3}$  で与えられる。ただし,  $\eta = (\nu^3 / \epsilon)^{1/4}$  は Kolmogorov 長 [10],  $\epsilon (= \epsilon_0)$  は最大渦 (サイズ  $l_0$ ) へのエネルギー流入率である。距離  $r \sim l_n$  間の速度揺らぎに対して  $\delta u_n = \delta u(l_n)$  なる記法を導入した。ここでの興味の対象は,  $n$  段目の渦のサイズに対応した速度揺らぎ  $\delta u_n$  ということになる。

乱流粘性に比べて動粘性の影響が無視できる高 Reynolds 数  $Re \gg 1$  では, 変換 [11,12]:  $\vec{r} \rightarrow \lambda \vec{r}, \vec{u} \rightarrow \lambda^{\alpha/3} \vec{u}, t \rightarrow \lambda^{1-\alpha/3} t, (p/\rho) \rightarrow \lambda^{2\alpha/3} (p/\rho)$  に対して, 非圧縮流体を記述する Navier-Stokes 方程式は不変である。指数  $\alpha$  は,  $\alpha < 3$  で速度導関数が有する発散の度合いを表す指標となっている [13]:  $|\partial u(x) / \partial x| = \lim_{l_n \rightarrow 0} \delta u_n / l_n \sim \lim_{l_n \rightarrow 0} l_n^{\alpha/3-1}$ 。また,  $\alpha$  とエネルギー輸送率との間には  $\epsilon_n / \epsilon = \delta_n^{\alpha-1}$  の関係がある。次章以下, 各空間点で指数  $\alpha$  がマルチフラクタル分布していると仮定して解析をすすめる。

## 2 定式化

### 2.1 一般化されたエントロピーに基づいたセルフ・コンシステントな解析

発達乱流の基盤をなす統計が, 一般化されたエントロピー（示量性 Rényi エントロピー [14] か非示量性 Tsallis エントロピー [15]）に基づくものであると仮定して,  $n$  番目のカスケードにおける局所散逸の確率密度関数つまり, 実空間の 1 点で, 発散指標が  $\alpha \sim \alpha + d\alpha$  にあるサイズ  $l_n$  の渦を見つける確率  $P^{(n)}(\alpha) \propto [P^{(1)}(\alpha)]^n$  を導出する。

<sup>1</sup> E-mail: arimitsu@cm.ph.tsukuba.ac.jp

<sup>2</sup> E-mail: arimitsu@dnj.ynu.ac.jp

その際、カスケードの各ステップは互いに独立であると仮定した。 $P_T^{(1)}(\alpha)$  を決定するために、一般化されたエントロピーの極大をとる。ただし、乱流の局所散逸を表わす確率密度関数

$$P^{(1)}(\alpha) \propto [1 - (\alpha - \alpha_0)^2 / (\Delta\alpha)^2]^{1/(1-q)} \quad (1)$$

が得られる [1-4]。ただし、 $(\Delta\alpha)^2 = 2X / [(1-q) \ln 2]$  である。なお、 $q \rightarrow 1$  では一般化されたエントロピー (Renyi エントロピーや Tsallis エントロピー) は Boltzmann-Gibbs エントロピーになり、確率密度関数 (1) は同じ極限で Boltzmann-Gibbs 分布関数となる。

マルチフラクタル・スペクトルは

$$f_T(\alpha) = 1 + (1-q)^{-1} \log_2 [1 - (\alpha - \alpha_0)^2 / (\Delta\alpha)^2] \quad (2)$$

で与えられる。マルチフラクタル・スペクトルは、カスケードのステップ数  $n$  によらないことに注意されたい。これは各ステップは独立であると仮定したことの現れである。 $\alpha_0$ ,  $X$ , 指数  $q$  の値は、間欠性指数  $\mu$  より決定される。

分布関数 (1) 中のパラメータ  $\alpha_0$ ,  $X$ ,  $q$  は、間欠性指数  $\mu$  の測定値が与えられると、エネルギー保存： $\langle \epsilon_n \rangle = \epsilon$ , 間欠性指数の定義： $\langle \epsilon_n^2 \rangle = \epsilon^2 \delta_n^{-\mu}$ , スケーリング則： $1/(1-q) = 1/\alpha_- - 1/\alpha_+$  の3つの条件式より自己無撞着に決定される。ただし、 $\alpha_{\pm}$  は  $f(\alpha_{\pm}) = 0$  を満たす [1-4]。平均  $\langle \dots \rangle$  は  $P^{(n)}(\alpha)$  でとるものとする。最後のスケーリング則は、文献 [16,17] で初めて導かれたものをマルチフラクタル・スペクトル  $f(\alpha)$  が負値をとる場合へ拡張したものである。3つの条件式を通常観測される間欠性指数の値域  $0.13 \leq \mu \leq 0.40$  で解くと、 $\alpha_0 = 0.9989 + 0.5814\mu$ ,  $X = -2.848 \times 10^{-3} + 1.198\mu$ ,  $q = -1.507 + 20.58\mu - 97.11\mu^2 + 260.4\mu^3 - 365.4\mu^4 + 208.3\mu^5$  となる [7]。

## 2.2 スケーリング指数

$m$  次の速度構造関数

$$\langle (\delta u(\ell_n))^m \rangle = \langle (\delta u_n)^m \rangle \propto \delta_n^{\zeta_m} \quad (3)$$

のスケーリング指数  $\zeta_m$  の解析的表式は、

$$\zeta_m = \frac{\alpha_0 m}{3} - \frac{2Xm^2}{9(1 + \sqrt{C_{m/3}})} - \frac{1}{1-q} \left[ 1 - \log_2 \left( 1 + \sqrt{C_{m/3}} \right) \right] \quad (4)$$

で与えられる [1-4]。ただし、 $C_{m/3}$  は  $C_{\bar{q}} = 1 + 2\bar{q}^2(1-q)X \ln 2$  で定義されている。 $q \neq 1$  では、 $m \gg 1$  の極限でスケーリング指数 (4) に対数項が存在する：

$$\zeta_m = \frac{\alpha_{\min}}{3} m + \frac{1}{1-q} \left[ \log_2 \left( \frac{\sqrt{X(1-q) \ln 2}}{3} m \right) + O\left(\frac{1}{m}\right) \right]. \quad (5)$$

この対数依存性はマルチフラクタル解析ではじめて明らかにされたもので、その実験的検証が強く望まれる。

## 2.3 PDF

乱流には散逸機構が2つある。熱揺らぎを司る動粘性と、速度導関数の発散と関連し間欠的揺らぎを司る乱流粘性である。そこで、無次元化した速度揺らぎ  $|x_n| = \delta u_n / \delta u_0$  の値が  $x_n \sim x_n + dx_n$  の範囲にある確率  $\Pi^{(n)}(x_n) dx_n$  を、 $\alpha$  のマルチフラクタル分布に起因する異常部分  $\Pi_S^{(n)}(|x_n|) dx_n$  と、主に熱的散逸や測定誤差に起因する残りの部分  $\Delta \Pi^{(n)}(x_n) dx_n$  とに分けて考える：

$$\Pi^{(n)}(x_n) dx_n = \Pi_S^{(n)}(|x_n|) dx_n + \Delta \Pi^{(n)}(x_n) dx_n. \quad (6)$$

ここでは、速度導関数の特異性に起因する速度揺らぎは PDF の対称部分に主に寄与すると仮定し、実験で得られた PDF の左右の平均を取ったものを解析対象とする。速度揺らぎの偏差値でスケールした新たな変数

$$\xi_n = \delta u_n / \langle \delta u_n^2 \rangle^{1/2} = x_n / \langle x_n^2 \rangle^{1/2} = \bar{\xi}_n \delta_n^{\alpha/3 - \zeta_2/2}, \quad (7)$$

で書かれた PDF を  $\hat{H}^{(n)}(|\xi_n|)d\xi_n = \Pi^{(n)}(|x_n|)dx_n$ , により導入する [5-7]。領域を次のように 2 つに分割する

$$\hat{H}^{(n)}(\xi_n) = \hat{H}_{<^*}^{(n)}(\xi_n) \quad \text{for } |\xi_n| \leq \xi_n^* \quad (8)$$

$$\hat{H}^{(n)}(\xi_n) = \hat{H}_{>^*}^{(n)}(\xi_n) \quad \text{for } \xi_n^* \leq |\xi_n| \leq \bar{\xi}_n \delta_n^{\alpha_{\min}/3 - \zeta_2/2}. \quad (9)$$

ただし、 $\xi_n^*$  は  $\hat{H}(\xi_n^*)$  で最も  $n_n$  依存性が小さく  $\xi_n^* = \bar{\xi}_n \delta_n^{\alpha^*/3 - \zeta_2/2}$  で定義される。また、 $\bar{\xi}_n = [2\gamma_2^{(n)} \delta_n^{-\zeta_2} + (1 - 2\gamma_0^{(n)} a_2)^{-1/2}]$  である。 $\alpha^*$  は、 $\zeta_2/2 - \alpha/3 + 1 - f(\alpha) = 0$  の解である。

それぞれの領域の PDF は、 $\xi_n^*$  で関数値とその傾きが一致するように接続する。領域  $\xi_n^* \leq |\xi_n|$  では  $\hat{H}^{(n)}(\xi_n)$  への主な寄与は  $\alpha$  のマルチフラクタル分布に起因する異常部分であると仮定し、 $\hat{H}_{<^*}^{(n)}(\xi_n) = \hat{H}_S^{(n)}(|\xi_n|)$  で与えられるものとする。

$$\hat{H}_{<^*}^{(n)}(\xi_n) = \bar{\Pi}_S^{(n)} \frac{\bar{\xi}_n}{|\xi_n|} \left[ 1 - \left( \frac{3 \ln |\xi_n / \xi_{n,0}|}{\Delta \alpha |\ln \delta_n|} \right)^2 \right]^{n/(1-q)} \quad (10)$$

ただし、 $|\xi_{n,0}| = \bar{\xi}_n \delta_n^{\alpha_0/3 - \zeta_2/2}$  である。一方、 $|\xi_n| \leq \xi_n^*$  を満たす小さな揺らぎへの寄与は主に熱散逸や測定誤差に関わるものと仮定し、その領域での  $\hat{H}^{(n)}(\xi_n)$  は Gauss 型とする。

$$\hat{H}_{<^*}^{(n)}(\xi_n) = \bar{\Pi}_S^{(n)} e^{-[1+3f'(\alpha^*)](\xi_n/\xi_n^*)^2 - 1)/2} \quad (11)$$

ただし、 $\bar{\Pi}_S^{(n)} = 3(1 - 2\gamma_0^{(n)}) / (2\bar{\xi}_n \sqrt{2\pi X |\ln \delta_n|})$  である。

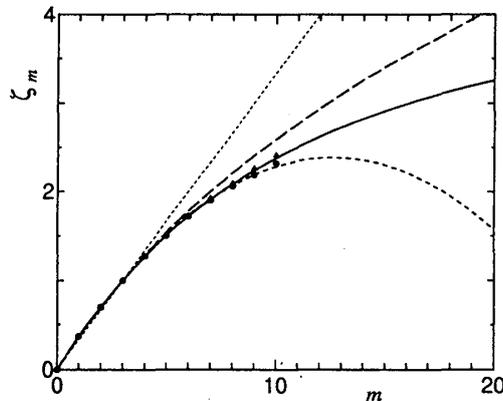


Fig. 1: 速度構造関数のスケーリング指数  $\zeta_m$ 。実線は  $\mu = 0.280$  を採用した場合の本論分の結果 (4)。黒丸 (Re = 540 000), 黒三角 (Re = 69 000) は実験結果。点線は K41, 破線は She-Leveque, 短破線は Lewis and Swinney の論文に従って  $\mu = 0.270$  で描いた対数正規模型の結果である。

### 3 解析結果

#### 3.1 Lewis-Swinney の実験

$\mu = 0.280$  を採用した場合のスケーリング指数 (4) を図 1 に載せた。Lewis と Swinney による実験室実験 [8] で得られた結果 (黒丸: Re = 540 000, 黒三角: Re = 69 000) と他の理論による結果も載せてある。PDF ( $\mu = 0.28$ )

を図2に載せた。また、それぞれの  $r$  に対して対応するカスケードのステップ数  $n$  を図示したものが図3である。

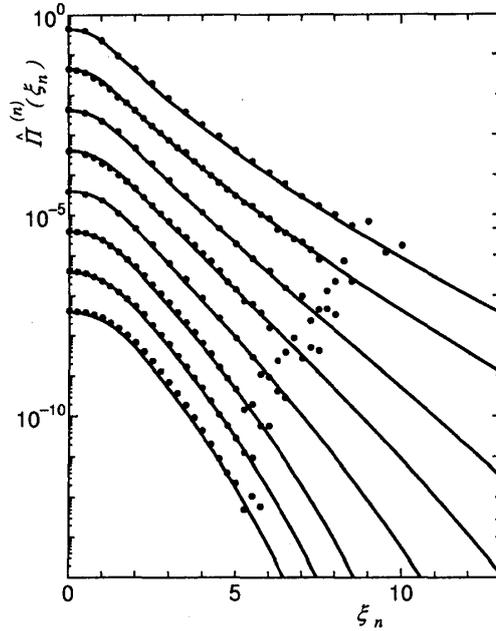


Fig. 2: Lewis と Swinney が  $R_\lambda = 262$  ( $Re = 540\,000$ ) にて測定した PDF (黒丸) と  $q = 0.471$  での PDF 理論曲線 (実線) との比較。実験データにおける距離  $r/\eta = l_n/\eta$  の値は、上から下へ、11.6, 23.1, 46.2, 92.5, 208, 399, 830, 1440 である。理論曲線におけるカスケード中のステップ数  $n$  は、上から下へ、14, 13, 11, 10, 9.0, 8.0, 7.5, 7.0 である。見易くするために、各 PDF は縦軸に沿って  $-1$  ずつずらした。

図2のそれぞれの  $r$  に対して対応するカスケードのステップ数  $n$  を図3の黒丸で記した。最小二乗法により得られた関係は  $Re = 540\,000$  の場合

$$n = -1.019 \times \log_2 r/\eta + 0.901 \times \log_2 Re \quad (12)$$

である。破線は間欠性のない場合の理論 [10] に対応する。

### 3.2 Gotoh 等の DNS

後藤らによる DNS での測定結果 [9] の (4) 式による解析を、他の理論との比較とともに図4に載せた。図5に、後藤らによる DNS [9] で得られた縦速度揺らぎ PDF ( $\mu = 0.240$ ) の解析を載せた。図6に、後藤らによる DNS [9] で得られた横速度揺らぎ PDF ( $\mu = 0.327$ ) の解析を載せた。それぞれの  $r$  に対して対応するカスケードのステップ数  $n$  を示したものが図7である。

縦 (横) 速度揺らぎ図5 (図6) のそれぞれの  $r$  に対して対応するカスケードのステップ数  $n$  を図7 (a) (図7 (b)) の実線ならびに破線で記した。最小二乗法により得られた関係は縦速度揺らぎの場合

$$n = -1.050 \times \log_2 r/\eta + 16.74 \quad (\text{for } \ell_c^L \leq r), \quad (13)$$

$$n = -2.540 \times \log_2 r/\eta + 25.08 \quad (\text{for } r < \ell_c^L) \quad (14)$$

である。交点は  $\ell_c^L/\eta = 48.26$  である。横速度揺らぎの場合

$$n = -0.9896 \times \log_2 r/\eta + 13.95 \quad (\text{for } \ell_c^T \leq r), \quad (15)$$

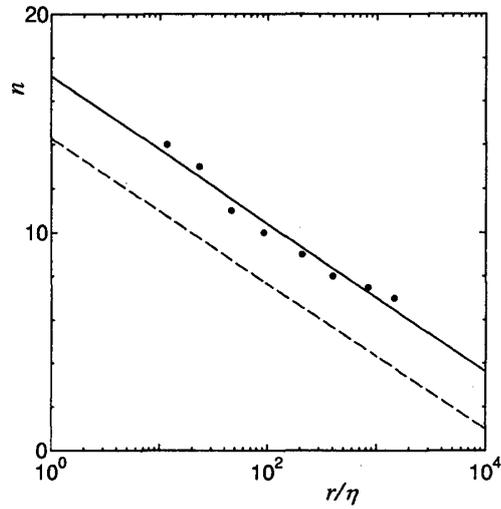


Fig. 3: 図 2 のそれぞれの  $r$  に対して対応するカスケードのステップ数  $n$  を黒丸で記した。実線は、最小自乗法により得られた理論式 (12)。破線は、間欠性のない場合の理論 [10]。

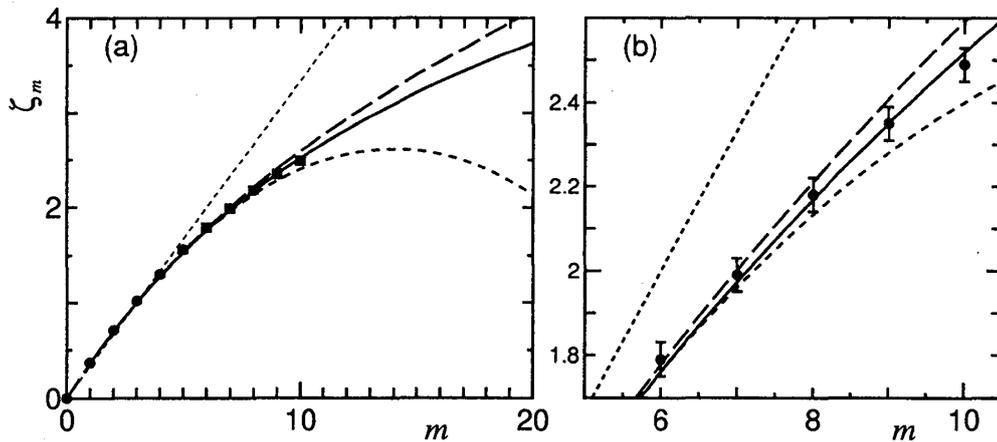


Fig. 4: 速度構造関数のスケーリング指数  $\zeta_m$ 。図 (b) は図 (a) の一部を拡大したものである。後藤らの DNS ( $R_\lambda = 381$ ) によるデータは黒丸で記し、 $\mu = 0.240$  の理論式 (4) は実線で記した。点線は K41, 破線は She-Leveque, 短破線は  $\mu = 0.240$  の対数正規模型の結果である。

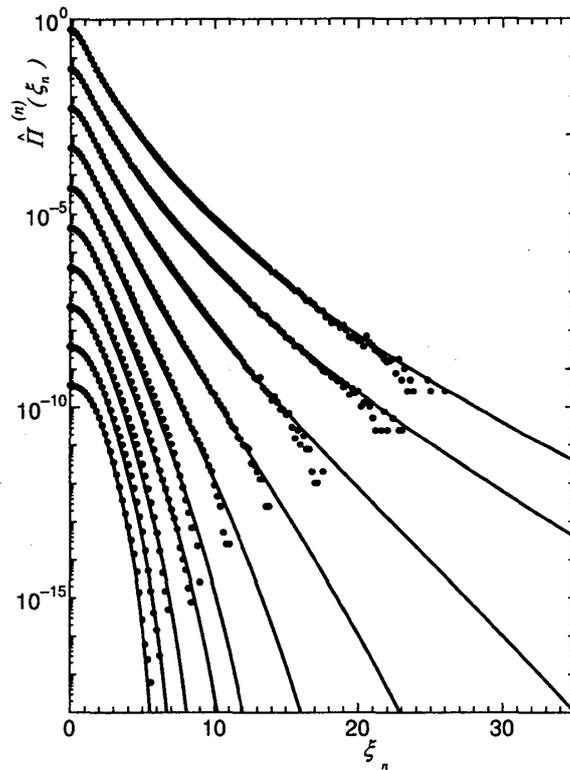


Fig. 5: 後藤らが  $R_\lambda = 381$  にて得た PDF (黒丸) と  $q = 0.391$  での PDF 理論曲線 (実線) との比較。実験データにおける距離  $r/\eta = l_n/\eta$  の値は、上から下へ、2.38, 4.76, 9.52, 19.0, 38.1, 76.2, 152, 305, 609, 1220 である。理論曲線におけるカスケード中のステップ数  $n$  は、上から下へ、21.5, 20.0, 16.8, 14.0, 11.8, 10.1, 9.30, 8.10, 7.00, 6.00 である。見易くするために、各 PDF は縦軸に沿って  $-1$  ずつずらした。

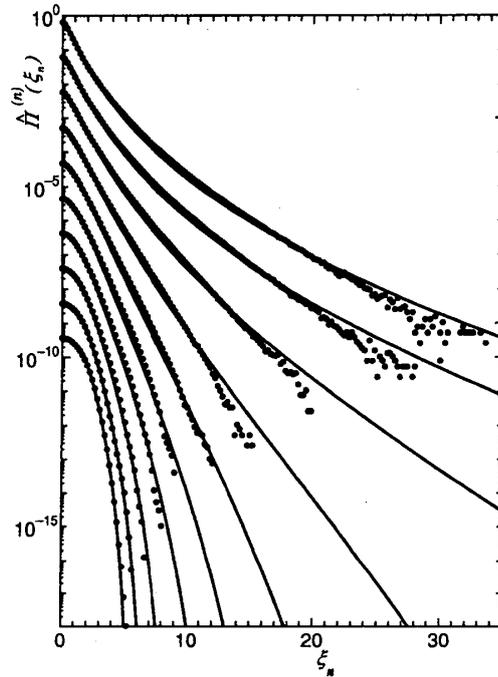


Fig. 6: 後藤らが  $R_\lambda = 381$  にて得た PDF (黒丸) と  $q = 0.381$  での PDF 揺らぎ理論曲線 (実線) との比較。実験データにおける距離  $r/\eta = \ell_n/\eta$  の値は, Fig. 5 と同じである。理論曲線におけるカスケード中のステップ数  $n$  は, 上から下へ, 20.0, 18.2, 14.6, 11.4, 9.30, 7.90, 6.80, 5.60, 4.70, 4.00. である。見易くするために, 各 PDF は縦軸に沿って  $-1$  ずつずらした。

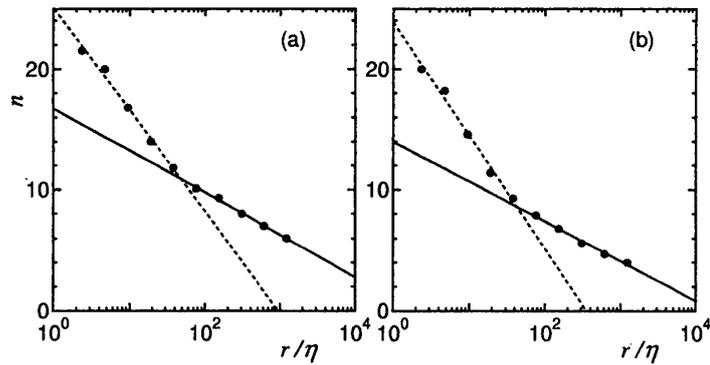


Fig. 7: 測定2点間距離  $r$  とカスケード・ステップ数  $n$  との関係。PDF の図のそれぞれの  $r$  に対して対応するカスケードのステップ数  $n$  を黒丸で記した。(a) 図. 5 に対応する。交点は  $\ell_c^L/\eta = 48.26$  である。(b) 横速度揺らぎの PDF 図 6 に対応する。交点は  $\ell_c^T/\eta = 42.57$  である。

$$n = -2.820 \times \log_2 r/\eta + 23.87 \quad (\text{for } r < \ell_c^T) \quad (16)$$

である。交点は  $\ell_c^T/\eta = 42.57$  である。

### 3.3 考察

一般化されたエントロピーに基づいた系統的で自己無撞着な手続きにより、大偏差統計を示す非 Gauss 型 PDF の裾野を、前者では  $10^{-5}$ 、後者では  $10^{-10}$  の稀な事象まで、解析的な表式 [5-7] で正確に説明できていることが分かる。2 点間距離  $r$  が異なる速度ゆらぎに対して測定された各 PDF がひとつの解析的な表式で記述できることは驚きに値する。この解析より、測定 2 点間距離  $r$  とカスケード・ステップ数  $n$  との関係が得られ、Taylor ミクロスケール ( $\lambda/\eta = 38.33$  [9]。ただし、 $\eta$  は Kolmogorov 長) を挟んだ 2 つのスケーリング領域の存在が明らかにされた [7]。λ より長い距離でのスケーリング領域 (後藤ら [9] により初めて解析された) では、通常のカスケード・モデルにおける渦をイメージできる。一方、λ より短い距離でのスケーリング領域 (講演者ら [7] により初めて抽出された) は、微小渦糸構造が構成するスケーリングと考えられる。

これまでは速度構造関数のスケーリング指数の実験データでさえた確に再現できる理論がなかったが、速度揺らぎ PDF までをも高精度に再現する一貫した体系が発見されたのである。一般化された統計に基づくこの解析は、乱流の間欠性に関わる統計理論への興味深い可能性を提供していると考えられる。今後、ここでの解析に基づいた動的解析が進められることを期待したい。

### 謝辞

Constantino Tsallis 教授、中野徹教授、吉沢徹教授、後藤俊幸教授、木田重雄教授の有意義なコメントに感謝する。また、梅垣壽春教授、大矢雅則教授、が Renyi エントロピーに注意を向けるきっかけを与えてくださったことに感謝する。Petro Jizba 博士が Havrda-Charvat エントロピーの存在に気づかせてくださったことに感謝する。

### 参考文献

- 1) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, L235 (2000) [CORRIGENDUM: **34**, 673 (2001)].
- 2) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Chaos, Solitons and Fractals* **13**, 479 (2002).
- 3) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Prog. Theor. Phys.* **105**, 355 (2001).
- 4) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Physica A* **295**, 177 (2001).
- 5) N. Arimitsu and T. Arimitsu, *J. Korean Phys. Soc.* **40**, 1032 (2002).
- 6) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Physica A* **305**, 218 (2002).
- 7) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *J. Phys.: Cond. Matt.* **14**, 2237 (2002).
- 8) G.S. Lewis and H.L. Swinney, *Phys. Rev. E* **59**, 5457 (1999).
- 9) T. Gotoh, D. Fukayama and T. Nakano *Phys. Fluids* (2002) in press.
- 10) A. N. Kolmogorov, *C. R. Acad. Sci. USSR* **30**, 301; 538 (1941).
- 11) Frisch, U. and Parisi, G., *On the singularity structure of fully developed turbulence, Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* (edited by Ghil, M., Benzi, R. and Parisi, G.), North-Holland, New York, 1985, 84.
- 12) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **2**, 49 (1987).
- 13) R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi and A. Vulpiani, *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**, 3521 (1984).
- 14) A. Renyi, *Proc. 4th Berkley Symp. Maths. Stat. Prob.* **1**, 547 (1961).
- 15) C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- 16) U.M.S. Costa, M.L. Lyra, A.R. Plastino and C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **56**, 245 (1997).
- 17) M. L. Lyra and C. Tsallis, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 53 (1998).