Long time behavior of the autocorrelation functions and its relation to the Aharonov-Bohm time operator

早稲田大・理工　宮本 学 (Manabu Miyamoto) [1]
Department of Physics, Waseda Univ.

概要

Aharonov-Bohm の時間演算子 T_0 の定義域 $\mathrm{Dom}(T_0)$ に属す状態の長時間挙動が考察される. $\psi \in \mathrm{Dom}(T_0)$ は $\|T_0\psi\|^2 < \infty$ を意味する. まず, $\mathrm{Dom}(T_0)$ を含む部分空間 $\mathrm{Dom}(P^{-1}) \cap \mathrm{Dom}(Q)$ に属す状態について, その自由粒子系における自己相関関数は t^{-2} より速く減衰することが示される. ここで, Q, P はそれぞれ位置と運動量の演算子である. また幾つかの条件のもとで, $\mathrm{Dom}(P^{-1}) \cap L^{2,s}(\mathbf{R})$ $(s > 3/2)$ に属す状態の短距離型ポテンシャル系における自己相関関数も t^{-2} より速く減衰することが示される. $L^{2,s}(\mathbf{R}) \subset \mathrm{Dom}(Q)$ である. 後者の事実は, 波動演算子 $W_\pm$ が自由粒子系からポテンシャル系への変換を与える事実と, $\mathrm{Dom}(P^{-1}) \cap \mathrm{Dom}(Q)$ がある意味で $W_\pm^*$ の不変部分空間になることから示される.

ハミルトニアンが連続スペクトルを持つ系では, 波束は空間的に拡散して行く. このとき, この拡散の仕方は初期状態により変わり得る. 実際このことは1次元自由粒子系において確認されている [1]. この事実は, 波動関数だけではなく, その自己相関関数 (または生存確率) の時間発展を見ることでも確認できる. 自己相関関数は時刻 t の状態に初期状態を見出す確率で定義される. ここでは, Aharonov-Bohm の時間演算子 T_0 [2] に関連して得られた次の不等式に着目したい [3]:

$$|\langle \psi, e^{-itH_0}\psi \rangle|^2 \leq 4\|T_0\psi\|^2 \|\psi\|^2 t^{-2}, \tag{1}$$

ここで, $H_0 := P^2$(P は運動量演算子) は1次元自由粒子系のハミルトニアン, 左辺は1次元自由粒子系における初期状態 ψ の自己相関関数である. また, T_0 は H_0 と正準交換関係を満たす (対称) 演算子でもある [正確には, $L^2(\mathbf{R})$ で稠密な, ある部分空間上で成り立つ] [3]. ここで, (1) に見られるベキ的減衰は自明ではないことを注意したい. 例えば, 代表的な Gauss 波束の自己相関関数は $t \to \infty$ で t^{-1} に漸近する. したがって, (1) の様に t^{-2} で押さえられる事はあり得ない.

不等式 (1) は, 状態 ψ が T_0 の2次のモーメント $\|T_0\psi\|^2$ を有限にするとき, つまり ψ が T_0 の定義域 $\mathrm{Dom}(T_0)$ に属すときに意味を持つ. このとき, 不等式 (1) が力学的な意味でも強いのかを問うことは興味がある. より正確には, $\mathrm{Dom}(T_0)$ に属す状態をポテンシャルを加えた空間で時間発展させても, その自己相関関数は長時間において t^{-2} で押さえられるだろうか? この事実が成り立つかどうかは自明ではない. 何故ならポテンシャルが加わった場合, ポテンシャルによる撹乱のため, 後の時刻 t での状態と初期状態との相関の仕方は, 自由粒子系でのそれと一致するとは限らないからである. 本小論では, 部分的にではあるが, この問いが肯定的に答えられることを示す.

まず, 不等式 (1) で見られる t^{-2} より速い減衰は, 実は $\mathrm{Dom}(T_0)$ 上に限らず, それを含むより広い部分空間 $\mathrm{Dom}(P^{-1}) \cap \mathrm{Dom}(Q)$ に属す状態に対して成り立つことを示す. そのために, T_0 の定義域 $\mathrm{Dom}(T_0)$ を確認しておく. ここでは公理論的立場から, 以下の様に定義する:

$$\mathrm{Dom}(T_0) := \{\psi \in \mathrm{Dom}(P^{-1}) \mid P^{-1}\psi \in \mathrm{Dom}(Q)\} \cap \{\psi \in \mathrm{Dom}(Q) \mid Q\psi \in \mathrm{Dom}(P^{-1})\}.$$

[1] E-mail: miyamo@hep.phys.waseda.ac.jp

T_0 の作用は, $(T_0\psi)(x) := [(QP^{-1}\psi)(x) + (P^{-1}Q\psi)(x)]/4$ である. ここで, Q と P は位置演算子と運動量演算子であり, それぞれ以下の定義域を持つ [4]:

$$\mathrm{Dom}(Q) := \left\{\psi \in L^2(\mathbf{R}) \;\middle|\; \textstyle\int_{\mathbf{R}} |x\psi(x)|^2 dx < \infty \text{ または } \int_{\mathbf{R}_k} |d\hat{\psi}(k)/dk|^2 dk < \infty \right\}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Dom}(P) := \left\{\psi \in L^2(\mathbf{R}) \;\middle|\; \textstyle\int_{\mathbf{R}} |d\psi(x)/dx|^2 dx < \infty \text{ または } \int_{\mathbf{R}_k} |k\hat{\psi}(k)|^2 dk < \infty \right\}.$$

ここで, $\hat{\psi}$ は $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ のフーリエ変換である. P^{-1} は P の自己共役な逆演算子であり [3],

$$\mathrm{Dom}(P^{-1}) := \left\{\psi \in L^2(\mathbf{R}) \;\middle|\; \textstyle\int_{\mathbf{R}_k} |\hat{\psi}(k)/k|^2 dk < \infty \right\}. \tag{3}$$

さて, $|\langle\psi, e^{-itH_0}\psi\rangle|^2 = O(t^{-2})$ であるための十分条件は, $\psi \in \mathrm{Dom}(T_0)$ だけではないことを示す:

命題 1 $\mathrm{Dom}(T_0) \subset \mathrm{Dom}(P^{-1}) \cap \mathrm{Dom}(Q)$. また, 任意の $\psi \in \mathrm{Dom}(P^{-1}) \cap \mathrm{Dom}(Q)$ に対し,

$$|\langle\psi, e^{-itH_0}\psi\rangle|^2 \le \tfrac{1}{4}(\|P^{-1}\psi\|^2 + 2\|P^{-1}\psi\|\|Q\psi\|)^2 t^{-2}. \tag{4}$$

証明命題の最初の主張は, $\mathrm{Dom}(T_0)$ の定義から直接に分かる. (4) を示すために運動量表示に移る. まず, $(\widehat{P^{-1}\psi}) = \hat{\psi}(k)/k$, $(\widehat{Q\psi}) = id\hat{\psi}(k)/dk$ である. これらは仮定により二乗可積分であるから, 部分積分により,

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}(k)|^2 e^{-itk^2} dk = -\frac{i}{2t}\int_0^\infty \left[\left(\overline{\frac{d\hat{\psi}(k)}{dk}}\right)\frac{\hat{\psi}(k)}{k} + \frac{\overline{\hat{\psi}(k)}}{k}\frac{d\hat{\psi}(k)}{dk} - \left|\frac{\hat{\psi}(k)}{k}\right|^2\right] e^{-itk^2} dk. \tag{5}$$

ここで, $(\bar{\ })$ は複素共役を表し, また, $\lim_{R\to\infty} |\hat{\psi}(R)|^2 e^{-itR^2}/R = 0$, $\lim_{r\downarrow 0} |\hat{\psi}(r)|^2 e^{-itr^2}/r = 0$ を使った. これは, $\hat{\psi}(k)/k$ が二乗可積分である事による. $\int_{-\infty}^0 |\hat{\psi}(k)|^2 e^{-itk^2} dk$ についても同様に示せる. よって, (5) を P^{-1}, Q で表した後, Schwarz の不等式を使えば (4) が示される. ∎

今後は, $\mathrm{Dom}(T_0)$ よりも $\mathrm{Dom}(P^{-1}) \cap \mathrm{Dom}(Q)$ の方が定義が単純である事と, 上の命題における事実とから, $\mathrm{Dom}(P^{-1}) \cap \mathrm{Dom}(Q)$ を考察の対象として行く. 特に, $\psi \in \mathrm{Dom}(P^{-1}) \cap \mathrm{Dom}(Q)$ とするとき, ハミルトニアン H_1 を持つポテンシャル系で, 自己相関関数 $|\langle\psi, e^{-itH_1}\psi\rangle|^2$ がどのように減衰するかを調べる. 技術的要請として, ポテンシャル $V(x)$ は以下を満たす実関数とする:

$$\exists\delta > 2, \exists c > 0, \forall x \in \mathbf{R},\ |V(x)| \le c(1+|x|)^{-\delta}. \tag{6}$$

またハミルトニアン H_1 を $H_1 := H_0 + V$ で定義する [5]. 次に波動演算子 $W_\pm$ を定義する [6]: $W_\pm := \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0}$ (強収束). 一般に $W_\pm$ はユニタリーではなく部分等長演算子となる: $W_\pm^* W_\pm = \mathbf{1}$, $W_\pm W_\pm^* = P_{\mathrm{ac}}(H_1)$. ここで, (*) は共役を意味し, $P_{\mathrm{ac}}(H_1)$ は H_1 の散乱状態が張る部分空間への射影演算子である [7]. $W_\pm$ のこの部分等長性と性質: $e^{-itH_1} W_\pm = W_\pm e^{-itH_0}$ から,

$$\langle P_{\mathrm{ac}}(H_1)\psi, e^{-itH_1} P_{\mathrm{ac}}(H_1)\psi\rangle = \langle W_\pm^*\psi, e^{-itH_0} W_\pm^*\psi\rangle \tag{7}$$

が求まる. 運動量表示において $W_\pm^*\psi$ は H_1 の散乱定常解を用いて具体的に書き下せる. 特に,

$$s + s' = \delta,\ s > 3/2,\ s' > 1/2,\ s' \le s, \tag{8}$$

を満たす適当な実数 s と s' について,

$$(\widehat{W_{\pm}^{*}\psi})(k)=\int_{\mathbf{R}}\overline{\varphi_{\pm}(x,k)}\;\psi(x)\;dx,\quad \text{a.e. } k\in\mathbf{R}_k,\ \ \forall\psi\in L^{2,s}(\mathbf{R}), \tag{9}$$

と表せる. ここで, $L^{2,s}(\mathbf{R})$ は重み付きの L^2-空間であって,

$$\psi\in L^{2,s}(\mathbf{R})\Leftrightarrow\|\psi\|_s:=\left[\int_{\mathbf{R}}(1+|x|^2)^s|\psi(x)|^2dx\right]^{1/2}<\infty.$$

$\varphi_{\pm}(x,k)$ は, (6) と (8) の下で, $L^{2,-s}(\mathbf{R})$ に属し, 1次元-Lippmann-Schwinger 方程式を満たす:

$$\varphi_{\pm}(x,k)=(2\pi)^{-1/2}e^{ikx}\mp\frac{1}{2i|k|}\int_{\mathbf{R}}e^{\mp i|k||x-y|}V(y)\;\varphi_{\pm}(y,k)\;dy. \tag{10}$$

さらに, $\varphi_{\pm}(x,k)$ は時間に依存しない Schrödinger 方程式を超関数の意味でみたす. (9), (10) 等の証明には, [7] における文献の第5章を参考にした. 以上の準備の下, まず以下が求まる.

定理 2 ポテンシャル $V(x)$ は (6) を満たすとする. さらに, $x\in\mathrm{I}$ $(:=\mathrm{supp}V(x))$ を固定するとき, H_1 の散乱定常解 $\varphi_{\pm}(x,k)$ は k に関して C^1-級であって, 以下の3つの条件を満たすと仮定する:

$$\gamma_{\pm}:=\sup_{x\in\mathrm{I},k\in\mathbf{R}_k\setminus\{0\}}|\varphi_{\pm}(x,k)|<\infty, \tag{11}$$

$$\delta_{\pm}:=\sup_{x\in\mathrm{I},k\in\mathbf{R}_k\setminus\{0\}}|\partial\varphi_{\pm}(x,k)/\partial k|<\infty, \tag{12}$$

$$\forall x\in\mathrm{I},\ \lim_{k\to 0}\varphi_{\pm}(x,k)=0. \tag{13}$$

このとき, 任意の $s>3/2$ について, $\psi\in\mathrm{Dom}(P^{-1})\cap L^{2,s}(\mathbf{R})\Rightarrow W_{\pm}^{*}\psi\in\mathrm{Dom}(P^{-1})\cap\mathrm{Dom}(Q)$.

条件 (8) の下で, $L^{2,s}(\mathbf{R})\subset L^{2,1}(\mathbf{R})=\mathrm{Dom}(Q)$ が成り立つことに注意されたい. したがって, 上の定理は $\mathrm{Dom}(P^{-1})\cap\mathrm{Dom}(Q)$ が $W_{\pm}^{*}$ の不変部分空間に類似した部分空間であることを示す.

定理における3つの条件は, 少なくとも箱型障壁ポテンシャル系で満たされることは確認された. 一方, 有限井戸型ポテンシャル系では, 条件 (11), (12) は満たされるが, 条件 (13) はポテンシャルの深さが特別な値を取るとき満たされない. この事情は, x の関数 $\lim_{k\to 0}\varphi_{\pm}(x,k)$ が時間に依存しない Schrödinger 方程式の自明でない0固有値解となる場合 (一種の共鳴散乱) に対応する.

命題1と比較することで, 次の系が我々の問いに対する部分的な回答を与えていることが分かる.

系 3 定理2における条件が満たされているならば, 任意の $\psi\in\mathrm{Dom}(P^{-1})\cap L^{2,s}(\mathbf{R})$ に対して,

$$|\langle P_{\mathrm{ac}}(H_1)\psi,e^{-itH_1}P_{\mathrm{ac}}(H_1)\psi\rangle|^2\le\tfrac{1}{4}(\|P^{-1}W_{\pm}^{*}\psi\|^2+2\|P^{-1}W_{\pm}^{*}\psi\|\|QW_{\pm}^{*}\psi\|)^2t^{-2}. \tag{14}$$

証明 $\psi\in\mathrm{Dom}(P^{-1})\cap L^{2,s}(\mathbf{R})$ とすると, 定理2の条件の下で, $W_{\pm}^{*}\psi\in\mathrm{Dom}(P^{-1})\cap\mathrm{Dom}(Q)$ が成り立つ. このとき, 命題1と (7) から, (14) は直ちに導かれる. ▮

上の系が, ψ ではなく $P_{\mathrm{ac}}(H_1)\psi$ に関して述べているのは不思議ではない. 何故なら, 一般に $P_{\mathrm{pp}}(H_1):=\mathbf{1}-P_{\mathrm{ac}}(H_1)$ [$P_{\mathrm{pp}}(H_1)$ は H_1 の束縛状態への射影演算子] と置くとき,

$$\langle\psi,e^{-itH_1}\psi\rangle=\langle P_{\mathrm{pp}}(H_1)\psi,e^{-itH_1}P_{\mathrm{pp}}(H_1)\psi\rangle+\langle P_{\mathrm{ac}}(H_1)\psi,e^{-itH_1}P_{\mathrm{ac}}(H_1)\psi\rangle$$

と分解できるが, 右辺の第一項は $t\to\infty$ で $[P_{\rm pp}(H_1)\psi\neq 0$ ならば$]$ 振動してしまう. したがって, 我々の問題設定では第二項だけを考える方が都合が良い. また, 初期状態 ψ をポテンシャルとの相互作用領域から十分遠方に用意すれば, $\|P_{\rm pp}(H_1)\psi\|\ll\|P_{\rm ac}(H_1)\psi\|$ とできる. このとき我々は, 有限ではあるが十分長い時間の間, ψ の時間発展を $P_{\rm ac}(H_1)\psi$ のそれと見なせる.

補題 4 $\psi\in{\rm Dom}(P^{-1})\cap L^{2,\sigma}(\mathbf{R})$ $(\sigma>3/2)\Rightarrow\psi\in{\rm Dom}(Q)$, ψ, $Q\psi, P^{-1}\psi\in L^1(\mathbf{R})$.

証明 $\psi\in{\rm Dom}(Q)$ 及び ψ, $Q\psi\in L^1(\mathbf{R})$ は直ぐに示せる. そこで, $P^{-1}\psi\in L^1(\mathbf{R})$ のみを示す. $P^{-1}\psi\in{\rm Dom}(P)$ より, $P^{-1}\psi$ は絶対連続であり, また $PP^{-1}\psi=\psi$, $\lim_{x\to\pm\infty}P^{-1}\psi(x)=0$ を満たす. また, 上の事実より ψ は $\mathbf{R}$ 上で可積分. したがって,

$$(P^{-1}\psi)(x)=i\int_{-\infty}^{x}\psi(y)dy=-i\int_{x}^{\infty}\psi(y)dy. \tag{15}$$

が成り立つ. $x<0$ のとき, (15) の最初の等式と $\psi\in L^{2,\sigma}(\mathbf{R})$ $(\sigma>3/2)$ に注意すれば,

$$|(P^{-1}\psi)(x)|\leq\left[\int_{-\infty}^{x}|y|^{-2\sigma}dy\int_{-\infty}^{x}|y|^{2\sigma}|\psi(y)|^2dy\right]^{1/2}\leq(2\sigma-1)^{-1/2}\|\psi\|_\sigma|x|^{-(\sigma-1/2)}.$$

$\sigma-1/2>1$ により, $P^{-1}\psi\in L^1(\mathbf{R})$ とわかる. $x>0$ のときも, (15) の 2 番目の等式から示せる. ∎

定理 2 の証明 $\psi\in{\rm Dom}(P^{-1})\cap L^{2,s}(\mathbf{R})$ と仮定する. このとき, 補題 4 より $\psi\in{\rm Dom}(P^{-1})\cap{\rm Dom}(Q)$ である. そこで, 定理 2 の条件の下, $(W_\pm^*-I)\psi\in{\rm Dom}(P^{-1})\cap{\rm Dom}(Q)$ (I は恒等演算子) を示せば十分である. 以下では運動量表示において示す [(2), (3) を見よ]. (9) と (10) より,

$$\int_{\mathbf{R}}\overline{g_\pm(y,k)}\;\psi(y)\;dy:=\int_{\mathbf{R}}\overline{\frac{\mp}{2i|k|}\int_{\mathbf{R}}e^{\mp i|k||x-y|}V(x)\;\varphi_\pm(x,k)\;dx}\;\psi(y)\;dy=((\widehat{W_\pm^*-I)\psi})(k) \tag{16}$$

である. 初めに幾つかの準備を行う. (12) と (13) から, 以下が成り立つ:

$$\Phi_\pm/|k|\in L^2(\mathbf{R}_k),\quad 及び\quad\forall k\in\mathbf{R}_k\setminus\{0\},\;\sup_{x\in\mathrm{I}}|\varphi_\pm(x,k)|\leq\Phi_\pm(k), \tag{17}$$

ただし, $\Phi_\pm(k):=\delta_\pm|k|$ $(|k|\leq 1)$ または $\gamma_\pm$ $(|k|>1)$. 次に, 補題 4 より部分積分ができて,

$$\int_{\mathbf{R}}e^{\pm i|k||y-x|}\psi(y)\;dy=\mp|k|\int_{\mathbf{R}}\frac{y-x}{|y-x|}e^{\pm i|k||y-x|}(P^{-1}\psi)(y)dy. \tag{18}$$

$(W_\pm^*-I)\psi\in{\rm Dom}(P^{-1})$ を示そう. ポテンシャルの仮定 (6) により, $\int_{\mathrm{I}}|V(x)|dx<\infty$ である. このとき, (11), (18), 及び Fubini の定理から以下の結果が得られる:

$$\left|\int_{\mathbf{R}}\overline{g_\pm(y,k)}\;\psi(y)\;dy\right|\leq\tfrac{1}{2}\langle V\rangle\langle P^{-1}\psi\rangle|\Phi_\pm(k)|\;. \tag{19}$$

ここで, $\langle f\rangle:=\int_{\mathbf{R}}|f(x)|dx$ $[f\in L^1(\mathbf{R})]$. (17) と (19) から, $(W_\pm^*-I)\psi\in{\rm Dom}(P^{-1})$ と分かる.

次に $(W_\pm^*-I)\psi\in{\rm Dom}(Q)$ を示す. 条件 (6) より, $V(x)$, $xV(x)\in L^1(\mathbf{R})$ であることに注意する. このとき, 定理 2 の仮定より, $\overline{g_\pm(y,k)}\;\psi(y)$ は y を固定するとき $k(\neq 0)$ で微分可能である. さらに, 条件 (6), (11), (12) 及び補題 4 より, $\partial\overline{g_\pm(y,k)}\;\psi(y)/\partial k$ は, y について可積分であることが

わかる. したがって, (16) は各 $k(\neq 0)$ で微分可能である. (16) を微分した後, x と y に関する積分順序が交換できる事, 並びに (18) を用いるて, 最終的に次の評価が得られる:

$$\left|\frac{d}{dk}\int_{\mathbf{R}} \overline{g_\pm(y,k)}\ \psi(y)dy\right| \leq \tfrac{1}{2}\left[\langle V\rangle\langle P^{-1}\psi\rangle + \langle V\rangle\langle Q\psi\rangle + \langle QV\rangle\langle\psi\rangle\right]|\Phi_\pm(k)/k| + \tfrac{1}{2}\delta_\pm\langle V\rangle \min\left\{\langle Q\psi\rangle/|k|,\ \langle P^{-1}\psi\rangle\right\}.$$

この評価と (17) とから, $(W_\pm^* - I)\psi \in \mathrm{Dom}(Q)$ と分かる. ▮

最後にコメントとして, 系 3 の結果は e^{-itH_1} の漸近展開に関する理論 [8] からも導出できる. さらに, 任意の $\psi \in L^{2,s}(\mathbf{R})(s > 3/2)$ に対して示される. しかし, ここでの系 3 の導出は, 自由粒子系におけるダイナミクス (命題 1) と波動演算子 $W_\pm$ の持つ簡明な性質 (定理 2) に基いている点で全く異なる. また, ポテンシャル系の時間発展の背後にこのような単純かつ非自明な構造が量子力学に存在していたことは驚きである. 一方, $\mathrm{Dom}(P^{-1}) \cap \mathrm{Dom}(Q)$ が $W_\pm^*$ の不変部分空間に真に成っているかどうかを調べることは今後の課題である.

有益な助言をくださった大場一郎先生 (早稲田大) ならびに中里弘道先生 (早稲田大) に感謝致します. 本小論は, 研究会, 第 10 回「非平衡系の統計物理」シンポジウム (筑波大, 2002 年 1 月) のポスターセッションでの公演内容です. このような研究会に参加する機会を下さった, 有光敏彦先生 (筑波大), ならびに阿部純義先生 (筑波大) に感謝致します. また, 議論をして下さった小嶋泉先生 (京都大) に感謝致します.

参考文献

[1] F. Lillo and R. N. Mantegna, Phys. Rev. Lett. **84**, 1061 (2000); **84**, 4516 (2000); K. Unnikrishnan, Am. J. Phys. **65**, 526 (1997); R. S. Mendes and C. Anteneodo, cond-mat/0003366; J. A. Damborenea, I. L. Egusquiza, and J. G. Muga, quant-ph/0109151.

[2] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **122**, 1649 (1961).

[3] M. Miyamoto, J. Math. Phys. **42**, 1038 (2001).

[4] 正確には, 微分 $d\psi(x)/dx$ 等は Radon-Nikodym の意味での一般化された微分を表す. 例えば次の文献を見よ, N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Vol.I, (Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1981), Chap. 4, Sec. 55.

[5] このとき, H_1 は自己共役であり, その束縛状態の固有値は 0 以下である. 例えば次の文献を見よ, B. Simon, J. Math. Phys. **41**, 3523 (2000), Sec. V. また, $V(x)$ は Agmon-ポテンシャルと呼ばれる. 例えば次の文献を見よ, M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol.III: *Scattering Theory* (Academic Press, New York, 1979), Theorem XIII.33.

[6] ここでは $V(x) \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ であるから, $W_\pm$ は存在し, 完全である. 例えば次の文献を見よ, S. T. Kuroda, Nuovo Cimento **12**, 431 (1959), Theorem 3.1; Theorem 5.1.

[7] 正確には $P_{\mathrm{ac}}(H_1)$ は H_1 の絶対連続部分空間への射影演算子である. 例えば次の文献を見よ, 黒田茂俊, スペクトル理論 II, 岩波講座 基礎数学 解析学 (II) xi, (岩波書店, 1979), 第 2 章.

[8] W. O. Amrein, preprint, quant-ph/0104049, とその文献を参照.