一般化シーガル・バーグマン変換と単一モード相互作用シーガル・バーグマン空間

京都大学数理解析研究所
浅井暢宏
asai@kurims.kyoto-u.ac.jp

概　要

本稿では，確率変数の古典・量子対応を考察する．それは，すべての次数のモーメントを持つ確率測度に付随したシーガル・バーグマン変換と相互作用シーガル・バーグマン空間により一般的に論じることができる．議論はすべて単一モードの場合に限り，ガウス型，ポアソン型，ベルヌーイ型確率変数とそれらの q 変形を例としてあげる．

1　はじめに

1990 年代初め，Accardi-Lu-Volovich は量子物理学のハミルトン模型の確率極限を記述する際，場の作用素の真空期待値がガウス型でもウイグナー型でもなく，その非線型変形された測度に従うことを見つけた．それゆえに，古典確率論，自由確率論の拡張が要請され，彼らはその非線型効果を解明するために相互作用フォック空間を導入した [2]．これはボゾン，自由，フェルミオンフォック空間を特殊例として含んでいる．1998 年になると，確率測度 μ のガウス化という文脈で，Accardi-Bożejko[1] により，単一モード相互作用フォック空間が再び議論され脚光を浴びることになる．それは個数ベクトルを μ に付随する直交多項式の次数に対応させることで，その新しいフォック空間から $L^2(\mu)$ への等距離写像の存在を保証するものである．これは，確率変数の古典・量子対応を議論する上での基本定理と見なされている．その有用性は，最近の Hashimoto-Hora-Obata による（[17] とそこでの引用文献を参照されたい.）大きなグラフのラプラシアンのスペクトル解析と量子中心極限定理の研究に見出すことが出来る．

一方，ガウス測度に付随したシーガル・バーグマン変換（例えば，[7, 14, 19]）はバーグマン・フォックモデルとシュレディンガーモデルに対するハイゼンベルグ群の既約表現の橋渡しをする積分変換として広く知られている．最近では，Gross-Hall[11, 12] により，コンパクトリー群とその複素化を出発点として，それらの上での熱核測度に付随する形でシーガル・バーグマン変換の拡張がなされた．その後，自由確率論 [21] の立場から，Biane[8] はウィグナーの半円測度[1]に付随する自由シーガル・バーグマン変換と Gross-Hall 変換のユニタリー群上への拡張を与えている．彼らの仕事は確率論における群構造（代数構造）とその複素構造の解明を目指す上で重要な出発点を与えている．しかし，注意しておきたいことは，いずれの場合も “ガウス型” の変換であり，非ガウス型拡張は範疇にない．

最近，著者は [3] で Accardi-Bożejko[1] の単一モードでの結果に動機付けられ，シーガル・バーグマン変換の非ガウス型拡張[2]を与えた．その際，重要な役割を果たすのが，直交多項式に付随した積分核（コーヒーレント状態）である．本稿では，定理 2.2 を単なる非ガウス型測度に付随する積分変換のユニタリー性の問題としてだけ捉えるのではなく，確率変数の古典・量子対応を与える基本定理として位置付ける．また，具体例（ガウス型，ポアソン型，ベルヌーイ型とそれらの q 変形）を用いてその一端を紹介したい．ホワイトノイズ解析（無限モード）の視点からのガウス型とポアソン型の議論は紙面の都合で割愛せざるを得ない．興味ある読者は [6, 13] を参照されたい．

[1]古典確率論でのガウス測度に対応する．自由ガウス測度とも呼ばれる．

[2]本稿では，「非ガウス」を「ガウスを含む一般化」という意味に用いる．後の定義 2.11 で与えるように，ガウス型測度のみならず，すべてのモーメントが存在する確率測度に対して定義できる変換という意味において，この変換を一般化シーガル・バーグマン変換と呼ぶことになる．

本稿で紹介した方法での研究はまだ始まったばかりである．近い将来，我々の方法と Gross-Hall, Biane 達のアイディアが相まって他分野とのさらなる有機的交流がなされることを切に願う．

2 確率変数の古典・量子対応

2.1 直交多項式

すべての次数のモーメントが有限であるような $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ を考える．この時，(1) $L^2(\mu)$ に対する完全直交系 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$，(2) 非負実数列 $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ と実数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して，それらの三組 $\big(\{P_n(x)\},\{\omega_n\},\{\alpha_n\}\big)$ はすべての $n\geq 0$ に対して次の漸化式

$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_1(x)=x-\alpha_n \\ (x-\alpha_n)P_n(x)=P_{n+1}(x)+\omega_n P_{n-1} \end{cases} \tag{2.1}$$

を満たすことが知られている．ただし，$\omega_0 P_{-1}=0$ と約束する．ここで，数列 $\{\omega_n\}$ と $\{\alpha_n\}$ のことを **Szegö-Jacobi のパラメーター**と呼ぶ．また，すべての n に対して $\alpha_n=0$ ならば μ は対称確率測度であり，その逆も成り立つ．

逆に、パラメーター $\{\omega_n\}$ と $\{\alpha_n\}$ が与えられたとき，漸化式(2.1) で定まる多項式系 $\{P_n(x)\}$ が直交多項式系になるような確率測度 μ の存在が保証される．これは Favard の定理に他ならない．直交多項式論の詳細については [10, 20] を参照されたい．

本稿では与えられた μ に付随する $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，新たに数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$\lambda_0=1,\ \lambda_n=\omega_1\omega_2\cdots\omega_n,\ n\geq 1 \tag{2.2}$$

で与え，次の二条件

$$\inf_{n\geq 0}\lambda_n^{\frac{1}{n}}>0, \tag{2.3}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{\frac{1}{n}}}{n^2}<\infty. \tag{2.4}$$

は断りのない限り常に満たすものとする．これら二条件を合わせて，ラムダ条件と呼ぶことにする．式(2.4) の条件は後に述べるバーグマン測度の一意性に必要な条件である．

2.2 単一モード相互作用シーガル・バーグマン空間

ラムダ条件の(2.4) から母関数 $G_\lambda(r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}r^n$ は収束するから，その収束半径を r_λ とする．また，$\Omega_\lambda=\{z\in\mathbb{C}:|z|<\sqrt{r_\lambda}\}$ とおく．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\lambda$ を，Ω_λ 上で正則な函数 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ で，$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n|a_n|^2<\infty$ を満たすもの全体とする．ここで，$\{z^n\}$ は完全直交系である．

次に，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\lambda$ 上で稠密に定義された作用素 B を

$$B1=0,\ Bz^n=\omega_n z^{n-1},\ n\geq 1 \tag{2.5}$$

で与える．すると，その共役作用素 B^* が

$$B^*z^n=z^{n+1},\ n\geq 0 \tag{2.6}$$

となることは簡単に確かめることができる．作用素 B, B^* のことをそれぞれ**一般消滅作用素，一般生成作用素**と呼ぶことにする．このように定義される四組 $(\mathcal{H}_\lambda,\{\lambda_n\},B,B^*)$ を $\{\lambda_n\}$ に付随する**単一モード相互作用シーガル・バーグマン空間**と云い[3]，以下では単に $\mathcal{H}_\lambda$ のことをそう呼ぶ．一般に，$[N,B]=B$, $[N,B^*]=B^*$ であるが，$[B,B^*]=(\omega_{n+1}-\omega_n)I$ と変形が加えられていることに注意していただきたい[4]．

次に，b と b^* を $[b,b^*]=I, N=b^*b$ を満たす通常のボゾン消滅作用素，生成作用素として，個数作用素を

$$Nz^n=nz^n,\ n\geq 0 \tag{2.7}$$

で定義する．さらに，**アルファ作用素** α_N を

$$\alpha_N z^n=\alpha_n z^n,\ n\geq 0 \tag{2.8}$$

と定義する．先述の通り，確率測度 μ が非対称な場合，付随する一方の Szegö-Jacobi パラメーター α_n が生き残るため，特に，$L^2(\mu)$ 上での古典確率変数と $\mathcal{H}_\lambda$ 上での量子（非可換）確率変数の対応関係を考察するにはアルファ作用素は無視出来ないものとなる．これについては次節で述べる．

[3] [1] に倣って通常は単に相互作用フォック空間と呼ばれることが多い．しかし，我々は複素正則函数の空間を舞台にしているので，本報告ではシーガル・バーグマン空間と呼ぶ．

[4] 従って，“直には” 作用素 B, B^* がそれぞれボゾン型消滅作用素、生成作用素でないことを強調するために「一般」という修飾語を付け加えた．また，単一モードフェルミオンフォック空間は $\lambda_0=\lambda_1=1, \lambda_n=0\ (n\geq 0)$ であり，式(2.3) のラムダ条件を満たさないので除外している．

2.3 一般化シーガル・バーグマン変換–確率測度との関連

この章ではシーガル・バーグマン変換の非ガウス化を考える．

定義 2.1 ([3]). $L^2(\mu)$ の元 f に対して，函数 $S_\mu f$ を

$$(S_\mu f)(z) = \langle E_\lambda(\cdot, \bar{z}), f\rangle_{L^2(\mu)}, \quad z \in \Omega_\lambda \tag{2.9}$$

で定義する．ただし，積分核 E_λ は

$$E_\lambda(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{\lambda_n} z^n, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

とする．このとき，S_μ を**一般化シーガル・バーグマン変換**と呼ぶ[5]．

実際，式 (2.3) により

$$\|E_\lambda(x, z)\|_{L^2(\mu)} = G_\lambda(|z|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{2.11}$$

であるから，$E_\lambda(x, z)$ は $L^2(\mu)$ に属する．また，積分核 E_λ はコーヒーレント状態の性質も兼ね備え，また $z, w \in \Omega_\lambda$ に対して，$G(\bar{z}w)$ が $\mathcal{H}_\lambda$ の再生核となる．

最近の Asai-Kubo-Kuo の研究 [5] により，μ をガウス型測度に限定すれば，S_μ はシーガル・バーグマン変換に，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\lambda$ はバーグマン測度[6]に関して二乗可積分な整函数の空間，いわゆるシーガルバーグマン空間に一致することが分かっている．

定理 2.2 ([3]). ラムダ条件の下で，一般化 *Segal-Bargmann* 変換 S_μ は $L^2(\mu)$ から $\mathcal{H}_\lambda$ へのユニタリー変換である．また，以下の性質

(1) $S_\mu P_n(x) = z^n$, $n \geq 0$,

(2) $S_\mu^* B S_\mu P_n = P_{n-1}$,

(3) $S_\mu^* B^* S_\mu P_n = P_{n+1}$,

(4) $S_\mu^*(B + B^* + \alpha_N)S_\mu = Q_x$

を持つ．ただし，Q_x は $L^2(\mu)$ 上の x による掛け算作用素である．

以下では，定理 2.2 の性質 (4) を古典確率変数 x の**量子分解**と称し，それを単に $x = B + B^* + \alpha_N$ と書く．

実際，フォック空間上で定義された生成作用素，消滅作用素を最も基本的な確率変数とする量子（非可換）確率論の視点を色濃く反映し，非ガウス測度に付随したシーガル・バーグマン変換を取り扱っている論文は極めて少ない．僅かに 1995 年の van Leeuwen-Maassen[16] によるウィグナーの半円測度とガウス測度を補間する q 変形版，1997 年の Biane[8] によるウィグナーの半円測度版（に付随するシーガル・バーグマン変換）に限られると云ってよかろう．しかし，彼らの方法は，それぞれ q ガウス測度，ウィグナーの半円測度の場合にしか適用できず一般性がない．すなわち，彼らの論文では直交多項式の満たす漸化式は単に計算を簡略化させるための道具として扱われている印象を受ける．

以下では，確率論の中でも特に基本的かつ重要な具体例を紹介する．

例 2.3 (ガウス型). μ が平均 0，分散 σ^2 のガウス測度 μ_g の場合，良く知られているように，付随する直交多項式はエルミート多項式であり，その Szegö-Jacobi パラメーターは $\omega_n = \sigma^2 n, \alpha_n = 0$ である．対応する H_λ はシーガル・バーグマン空間，すなわち，$\mathbb{C}$ 上のガウス測度（バーグマン測度）に関して二乗可積分な整函数の空間となる．$L^2(\mu_g)$ 上で定義されたガウス型古典確率変数 x の量子分解は $x = b + b^*$ であり，右辺の量子確率変数はシーガル・バーグマン空間上で作用する．

例 2.4 (ポアソン型). μ がパラメーター $a > 0$ のポアソン測度 μ_p の場合，付随する直交多項式はシャーリエ多項式であり，その Szegö-Jacobi パラメーターは $\omega_n = an, \alpha_n = n + a$ である [10]．対応する H_λ はシーガル・バーグマン空間となる．$L^2(\mu_p)$ 上で定義されたポアソン型古典確率変数 x の量子分解は $x = b + b^* + N + aI$ である．右辺の量子確率変数はシーガル・バーグマン空間上で作用する．特に，先の例 2.3 におけるガウス測度の分散 σ^2 とパラメーター a が等しいとき，ガウス型とポアソン型確率変数が共通の空間（この場合，シーガル・バーグマン空間）で実現されたことになる [5]．

例 2.3 に登場する通常のシーガル・バーグマン変換の無限モード化がホワイトノイズ解析（無限モード超函数論）で頻繁に用いられる S 変換である．例 2.4 のポアソン型についても同様で，ポアソン型 S 変換が知られている [13]．最近，ガウス型とポアソン型ホワイトノイズの特異性の比較を量子分解の観点から行った [6]．

[5] 必ずしもすべてのモーメントが存在しない場合，定理 2.2 を含めて同様の議論がどの程度一般化できるかという問題は，少なくとも数学的には興味深い．

[6] 複素平面上で定義されるガウス型測度のこと．

例 2.5 (**q 変形ガウス・ポアソン型**). 例 2.3, 例 2.4 の q 変形も可能である. 様々な q 変形が可能であろうが, [9, 18] に倣って $q=0$ で自由ガウス, 自由ポアソンに帰着する立場をとる. すなわち, 自然数 n に対して, $[n]_q = 1+q+\cdots+q^{n-1}$, q 階乗を $[n]_q! = [1]_q[2]_q\ldots[n]_q$ とする. ただし, $[0]_q = 0, [0]_q! = 0$ である. ゆえに, q ガウス測度に付随する q エルミート多項式はパラメーター $\omega_n = \sigma^2[n]_q, \alpha_n = 0$ ([9]), q ポアソン測度に付随する q シャーリエ多項式はパラメーター $\omega_n = \beta[n]_q$, $\alpha_n = [n]_q + \beta$ ([18]) となるものを採用する. ただし, $0 \le q < 1$ とする. よって, $\sigma^2 = \beta$ のとき q ガウス型確率変数 [16], q ポアソン型確率変数 [4, 18] はそれぞれ q 生成・消滅作用素, q 生成・消滅・個数作用素の和をもって共通の $\mathcal{H}_\lambda$ で実現され, それは q ハーディー空間となる. q バーグマン測度の具体形は [4, 16] にある. $q<0$ の場合, 対応する q バーグマン測度は存在しないことが知られている.

例 2.6 (**ベルヌーイ型**). 成功の確率 p, 失敗の確率 $1-p$ であるようなベルヌーイ試行を M 回行う. n 回成功し, $(M-n)$ 回失敗する確率は二項分布に従うことは良く知られている. この分布に対する直交多項式は Szegö-Jacobi パラメーター $\omega_n = n(M-n)p(1-p)$, $\alpha_n = pM + n(1-2p)$ を持つ Krawtchouk 多項式である [10]. 紙面の都合上, 相互作用バーグマン測度の具体形は他の機会に報告することにする.

なお, これらに付随する量子確率変数に対して,

$$\lim_{M\to\infty}\left\{\frac{B+B^*}{Mp(1-p)} + \frac{\alpha_M - Mp}{\sqrt{Mp(1-p)}}\right\} = b+b^*. \tag{2.12}$$

となることが簡単な形式計算で分かる. すなわち, 例 2.3 に帰着する. これはドモアブル・ラプラスの極限定理に他ならない. 一方, $Mp=a$ (一定) の下では,

$$\lim_{M\to\infty}\omega_n = an, \ \lim_{M\to\infty}\alpha_n = n+a \tag{2.13}$$

となり例 2.4 に帰着される. これはたしかにポアソンの小数の法則に対応している. いずれの場合も $\mathcal{H}_\lambda$ の極限空間は例 2.3 で登場したシーガル・バーグマン空間になることを指摘しておく.

Saito-Yoshida[18] は(2.12) と(2.13) の q 変形拡張 (n を $[n]_q$ で置き換えたもの) も議論している. この場合, $\mathcal{H}_\lambda$ の極限空間が例 2.5 で現れた q ハーディー空間になることはもはや明らかであろう.

参考文献

[1] L. Accardi and M. Bożejko, *Interacting Fock space and Gaussianization of probability measures.* Infin. Dimen. Anal. Quantum Prob. Relat. Top., **1** (1998), 663–670.

[2] L. Accardi and Y.-G. Lu, *The Wigner semicircle law in quantum electrodynamics.* Comm. Math. Phys., **180** (1996), 605–632; L. Accardi, Y.-G. Lu, and I. Volovich, *The QED Hilbert module and interacting Fock spaces.* IIAS reports **1997-008**, Pub. of IIAS (Kyoto), 1997.

[3] N. Asai, *Analytic characterization of one-mode interacting Fock space.* Infin. Dimen. Anal. Quantum Prob. Relat. Top., **4** (2001), 409–415.

[4] N. Asai, *Integral transform and Segal-Bargmann representation associated to q-Charlier polynomials.* to appear in *Quantum Information IV*, T. Hida and K. Saitô (eds.) World Scientific.

[5] N. Asai, I. Kubo, and H.-H. Kuo, *Segal-Bargmann transform of one-mode interacting Fock spaces associated with Gaussian and Poisson measures.* to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[6] N. Asai, I. Kubo, and H.-H. Kuo, *Gaussian and Poisson white noises with related characterization theorem.* to appear in Contemp. Math., Amer. Math. Soc.

[7] V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I.* Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 187–214.; *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, II.* Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), 1–101.

[8] P. Biane, *Segal-Bargmann transform, functional calculus on matrix spaces and the theory of semi-circular and circular systems.* J. Funct. Anal., **44** (1997), 232–286.

[9] M. Bożejko, B. Kümmerer and R. Speicher, *q-Gaussian processes: Non-commutative and classical aspects.* Comm. Math. Phys., **185** (1997), 129–154.

[10] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach, 1978.

[11] L. Gross and P. Malliavin, *Hall's transform and the Segal-Bargmann map.* in: Itô Stochastic Calculus and Probability Theory, N. Ikeda et al. (eds.) Springer-Verlag, 1996, pp. 73–116

[12] B. Hall, *The Segal-Bargmann "coherent state" transform for compact Lie group.* J. Funct. Anal., **122** (1994), 103–151.

[13] Y. Ito and I. Kubo, *Calculus on Gaussian and Poisson white noises.* Nagoya Math. J., **111** (1988), 41–84.

[14] I. Kubo and H.-H. Kuo, *Finite dimensional Hida distributions.* J. Funct. Anal., **128** (1995), 1–47.

[15] H.-H. Kuo, *White Noise Distribution Theory.* CRC Press, 1996.

[16] H. van Leeuwen and H. Maassen, *A q deformation of the Gauss distribution.* J. Math. Phys., **36** (1995), 4743–4756.

[17] 尾畑伸明, 量子分解法によるスペクトル解析. to appear in 物性研究 (2002).

[18] N. Saitoh and H. Yoshida, *The q-deformed Poisson random variables on the q-Fock space.* J. Math. Phys., **41** (2000), 5767–5772; *The q-deformed Poisson distribution based on orthogonal polynomials.* J. Phys. A: Gen., **33** (2000), 1435–1444.

[19] I. E. Segal, *Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear Bose-Einstein field.* Illinois J. Math., **6** (1962), 500–523; *The complex wave representation of the free Boson field.* in: Essays Dedicated to M. G. Krein on the Occassion of His 70th Birthday, Advances in Math.: Supplementary Studies Vol.3, I. Goldberg and M. Kac (eds.) Academic, 1978, pp. 321–344.

[20] M. Szegö, *Orthogonal Polynomials.* Coll. Publ. **23**, Amer. Math. Soc., 1975.

[21] D. Voiculescu, K. L. Dykema, and A. Nica, *Free Rondom Variables.* CRM Monograph Ser. **1**, Amer. Math. Soc., 1992