# 環境の影響下における量子ゼノン効果

早稲田大学理工学部
湯浅 一哉,*1 中里 弘道,*2 高沢 智子

量子系に対する観測は, その系の状態を乱すことなしに行うことはできず, 量子系の時間発展は, 観測行為の影響を受けることになる. この効果の興味深い一例が, 量子ゼノン効果 (quantum Zeno effect) [1,2] である: 不安定量子系が依然として崩壊せずにいることの確認を短い時間間隔で頻繁に繰り返す. すると, その確認行為の影響を受けて不安定状態の崩壊は遅くなり, さらに連続的確認の極限では, 系は凍り付いて崩壊しなくなってしまう.

この量子ゼノン効果は, 不安定量子系の崩壊過程初期の非指数関数的 (典型的には 2 次関数的) 振舞い [2] に起因するが, その振舞いが見られる時間領域は通常極めて短く, 量子ゼノン効果を実験的に確認することは困難であった. しかし近年になって, 指数関数的振舞いからのずれが実験的に確認される [3] とともに, 同じ実験系において量子ゼノン効果も確認されるに至った [4]. (そこでは, 観測行為が系の崩壊を速める効果, 逆量子ゼノン効果 [5] も観測されている.) これ以前にも, 残念ながらもともとの意味での量子ゼノン効果を実現できてはいないものの, 頻繁に繰り返される "観測行為" の下での系の振舞いが, 見事な実験で議論されている [6]. さらに近い将来には, 中性子ボトル [7] の技術の下に, 中性子スピンを用いた量子ゼノン効果の検証実験 [8] が期待されている.

こうして量子ゼノン効果の実験的検証が現実のものとなった今, これまで理想化されてきたモデル設定を再吟味して, より現実の状況に即した設定で議論する必要があるであろう. 例えば, 実際の実験を完全に環境の影響を排除して行うことは困難であるが, その環境系の存在は量子ゼノン効果にどのような影響を与えるであろうか?

本稿では, 環境系の存在が量子ゼノン効果に及ぼす影響を議論する手始めとして, 環境系と呼べるほどの大自由度系ではないものの, 対象としている系 A に何か別の系 B が結合している状況で量子ゼノン効果を議論する. すなわち, 系 B の存在下で系 A に対して観測を繰り返した場合に, その観測行為が系の時間発展に及ぼす影響を議論するのである. するとこの場合, 系 B の存在は量子ゼノン効果に影響を及ぼすだけでなく, 逆に系 B 自身が (観測は系 A に対してのみ行われているにもかかわらず) 興味深い影響を受けることが明らかになった. ここではこの点を中心に報告することにしよう.

まずはモデルを設定して議論しよう. ここで考える系のハミルトニアンは

$$H = \hbar\Omega a^\dagger a + \hbar\omega b^\dagger b + i\hbar g(a^\dagger b - ab^\dagger) \tag{1}$$

である. すなわち, 調和振動子 $a$ が調和振動子 $b$ の影響を受けながら運動する系である. $g$ は両者間の結合定数. 初期時刻 $t=0$ には両者間に相関はなく, 振動子 $a$ はコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$, 振動子 $b$ は

*1 Email: yuasa@hep.phys.waseda.ac.jp
*2 Email: hiromici@waseda.jp

温度 $T$ の熱平衡状態, すなわち, 全体系の初期状態は

$$\rho_0 = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \rho_B, \qquad \rho_B \propto e^{-\hbar\omega b^\dagger b/k_B T} \tag{2}$$

にあるものとする. この初期状態はハミルトニアン (1) の固有状態ではないため, やがて違う状態へと変化してしまうが, ここで次のような観測を繰り返すことを考えよう. (振動子 $b$ の状態はどうであれ) 振動子 $a$ が依然として初期状態 $|\alpha\rangle$ のままでいることの確認を, 一定の (短い) 時間間隔 $\tau$ で繰り返すのである. もし, それぞれの観測で振動子 $a$ が初期状態 $|\alpha\rangle$ にあることが見出されると, その都度状態の収縮が起こって系の状態は

$$\rho \to \frac{\mathcal{O}\rho\mathcal{O}}{\mathrm{Tr}\,\mathcal{O}\rho\mathcal{O}} \tag{3}$$

と変化する. ここで,

$$\mathcal{O} = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \mathbb{1} \tag{4}$$

はその状態の収縮を表す射影演算子であるが, 観測は振動子 $a$ に対してのみ行われ, 振動子 $a$ のみが初期状態に戻されることに注意されたい. したがってこの観測を $N$ 回繰り返した後に振動子 $a$ が依然として初期状態 $|\alpha\rangle$ にあることの確率 (生存確率) は,

$$P^{(\tau)}(N) = \mathrm{Tr}\Big((\mathcal{O}e^{-iH\tau/\hbar}\mathcal{O})^N \rho_0 (\mathcal{O}e^{iH\tau/\hbar}\mathcal{O})^N\Big) \tag{5}$$

で与えられることになる. 今考えているハミルトニアン (1) では時間発展演算子が

$$e^{-iH\tau/\hbar} = e^{Aa^\dagger b} e^{Ba^\dagger a} e^{Cb^\dagger b} e^{-Aab^\dagger}, \tag{6a}$$

$$A = \frac{(g/\delta)\sin\delta\tau}{\cos\delta\tau + i[(\Omega-\omega)/2\delta]\sin\delta\tau}, \tag{6b}$$

$$B = -\frac{i}{2}(\Omega+\omega)\tau - \ln\left[\cos\delta\tau + i\frac{\Omega-\omega}{2\delta}\sin\delta\tau\right], \tag{6c}$$

$$C = -\frac{i}{2}(\Omega+\omega)\tau + \ln\left[\cos\delta\tau + i\frac{\Omega-\omega}{2\delta}\sin\delta\tau\right], \tag{6d}$$

$$\delta = \sqrt{g^2 + (\Omega-\omega)^2/4} \tag{6e}$$

と計算され, 生存確率 (5) も

$$\begin{aligned} P^{(\tau)}(N) = {} & \frac{1}{1+\bar{n}(\omega)(1-|e^{NC}|^2)} \exp\left[|V^{(\tau)}(N)\alpha|^2 e^{-\hbar\omega/k_B T} + \frac{|W^{(\tau)}(N)\alpha|^2}{1-|e^{NC}|^2 e^{-\hbar\omega/k_B T}}\right] \\ & \times \exp\left[-2|\alpha|^2\,\mathrm{Re}\left\{N\left(1-e^B-\frac{A^2}{1-e^{-C}}\right) - \frac{A}{1-e^{-C}}V^{(\tau)}(N)\right\}\right], \end{aligned} \tag{7a}$$

$$V^{(\tau)}(N) = A\frac{1-e^{NC}}{1-e^{-C}}, \qquad W^{(\tau)}(N) = V^{(\tau)}(N) - \Big(V^{(\tau)}(N)\Big)^* e^{-\hbar\omega/k_B T} e^{NC}, \tag{7b}$$

$$\bar{n}(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T}-1} \tag{7c}$$

と計算することができる.

この生存確率 $P^{(\tau)}(N)$ は, 観測間の時間間隔 $\tau$ を小さくして観測頻度を増すと, すなわち, 最終観測時刻 $t=N\tau$ を一定に保って観測回数 $N$ を大きくすると, 1 へ近づいていく:

$$P^{(\tau)}(N) \to 1 \quad \text{as} \quad N \to \infty \quad (\text{with } t = N\tau \text{ fixed}). \tag{8}$$

これがいわゆる量子ゼノン効果 [1] である. 頻繁に観測を行うことで, 系の時間発展が遅くなるのである. しかしここではこの極限を議論するのではなく, 時間間隔 $\tau$ を (小さく) 一定に保ったままで観測を繰り返していくことを考えよう. この場合, ($|e^C|<1$ であることに注意すると) 生存確率 (7) は $N$ が大きくなるとともに漸近的に

$$P^{(\tau)}(N) \xrightarrow{\text{large } N} \frac{1}{1+\bar{n}(\omega)} \exp\left[\left|\frac{A\alpha}{1-e^{-C}}\right|^2 (1+e^{-\hbar\omega/k_BT})\right] \times \exp\left[-2|\alpha|^2 \operatorname{Re}\left\{N\left(1-e^B-\frac{A^2}{1-e^{-C}}\right)-\left(\frac{A}{1-e^{-C}}\right)^2\right\}\right] \tag{9}$$

と振舞うようになる. ここで注目すべきことは, この生存確率の減衰の仕方が, ($N$ に関して) 指数関数的になっているということである. しかも, その減衰の速さは, 振動子 $b$ の初期温度 $T$ に依存しないものとなっている. このことは, 実は観測対象ではない振動子 $b$ にある興味深いことが起こっていることを示唆している.

実際に振動子 $b$ の状態を調べてみよう. $N$ 回目の観測でも振動子 $a$ が依然として初期状態にあることが見出された場合, その観測直後の全体系の状態は,

$$\rho^{(\tau)}(N) = (\mathcal{O}e^{-iH\tau/\hbar}\mathcal{O})^N \rho_0 (\mathcal{O}e^{iH\tau/\hbar}\mathcal{O})^N / P^{(\tau)}(N) \tag{10}$$

で与えられる. 今考えている系 (1) の場合には, これは

$$\rho^{(\tau)}(N) = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes Z^{(\tau)}(N) e^{b^\dagger W^{(\tau)}(N)\alpha} e^{-b^\dagger b(\hbar\omega/k_BT - 2N\operatorname{Re}C)} e^{\alpha^*[W^{(\tau)}(N)]^* b}, \tag{11a}$$

$$Z^{(\tau)}(N) = (1-|e^{NC}|^2 e^{-\hbar\omega/k_BT}) \exp\left[-\frac{|W^{(\tau)}(N)\alpha|^2}{1-|e^{NC}|^2 e^{-\hbar\omega/k_BT}}\right] \tag{11b}$$

である. ここで, 先ほどと同様に観測間の時間間隔 $\tau$ を (小さく) 一定に保ったまま観測を繰り返そう ($N$ を大きくする). すると, 系の状態はコヒーレント状態

$$\rho^{(\tau)}(N) \xrightarrow{\text{large } N} |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \left|\frac{A\alpha}{1-e^{-C}}\right\rangle\left\langle\frac{A\alpha}{1-e^{-C}}\right| \tag{12}$$

へと漸近するのである. すなわち, 観測は振動子 $a$ に対してのみ行っていたにもかかわらずその影響は振動子 $b$ にまでも及び, しかも, もともと混合状態 (熱平衡状態) にあった振動子 $b$ は最終的に純粋状態 (コヒーレント状態) になるのである. そして, 最終的に行き着くコヒーレント状態は, 振動子 $b$ の初期温度 $T$ に依存しないものとなっている.

この驚くべき結果は, 何もハミルトニアン (1) が特殊であったからではない. より一般的な系でも同じことが起こるのである. ハミルトニアンとして,

$$H = H_A + H_B + V \tag{13}$$

を考えよう. 系 A が系 B と $V$ で相互作用する系である. ここではこれ以上 $H_A$ や $H_B$, 及び, $V$ の具体的な形を指定することはしない. 初期状態は

$$\rho_0 = |\phi_0\rangle\langle\phi_0| \otimes \rho_B \tag{14}$$

として, $\rho_B$ を任意のままにしておこう. 観測は系 A に対してのみ行い, 系 A が依然として初期状態 $|\phi_0\rangle$ のままでいることの確認を繰り返す. その観測を表す射影演算子は

$$\mathcal{O}=|\phi_0\rangle\langle\phi_0|\otimes\mathbb{1} \tag{15}$$

である. $N$ 回目の確認後の生存確率 $P^{(\tau)}(N)$ と状態 $\rho^{(\tau)}(N)$ はそれぞれ式 (5), (10) で与えられるが, そこに含まれる "射影された時間発展演算子"

$$\mathcal{O}e^{-iH\tau/\hbar}\mathcal{O}=|\phi_0\rangle\langle\phi_0|\otimes\langle\phi_0|e^{-iH\tau/\hbar}|\phi_0\rangle \tag{16}$$

を固有ベクトルで展開しよう. ($\langle\phi_0|e^{-iH\tau/\hbar}|\phi_0\rangle$ は系 B の状態空間における演算子であることに注意.) 演算子 $\langle\phi_0|e^{-iH\tau/\hbar}|\phi_0\rangle$ はエルミート演算子ではないため, 右, 及び, 左固有値問題を考えなければならない:

$$\{\langle\phi_0|e^{-iH\tau/\hbar}|\phi_0\rangle\}|u_n)=\lambda_n|u_n),\qquad (v_n|\{\langle\phi_0|e^{-iH\tau/\hbar}|\phi_0\rangle\}=\lambda_n(v_n|. \tag{17}$$

ここでは固有値 $\lambda_n$ は離散的であるものと仮定し, また, 固有ベクトル $|u_n)$, $(v_n|$ は

$$\sum_n|u_n)(v_n|=1,\qquad (v_m|u_n)=\delta_{mn} \tag{18}$$

で規定される完全直交系をなすものとしよう. すると, 演算子 $\langle\phi_0|e^{-iH\tau/\hbar}|\phi_0\rangle$ は

$$\langle\phi_0|e^{-iH\tau/\hbar}|\phi_0\rangle=\sum_n\lambda_n|u_n)(v_n| \tag{19}$$

と展開され,

$$\langle\phi_0|e^{-iH\tau/\hbar}|\phi_0\rangle^N=\sum_n\lambda_n^N|u_n)(v_n| \tag{20}$$

を得る. 時間発展演算子 $e^{-iH\tau/\hbar}$ のユニタリー性から一般に $0\le|\lambda_n|\le1$ であることが示されるが, 絶対値が最大の固有値 $\lambda_{\max}$ が $|\lambda_{\max}|<1$ を満たし, しかもその固有値が縮退していなければ, (観測間の時間間隔 $\tau$ を小さく一定に保って) $N$ を大きくすると, 漸近的に

$$\langle\phi_0|e^{-iH\tau/\hbar}|\phi_0\rangle^N\xrightarrow{\text{large }N}\lambda_{\max}^N|u_{\max})(v_{\max}| \tag{21}$$

となることが分かる. したがって, 生存確率 (5) や状態 (10) は,

$$P^{(\tau)}(N)\xrightarrow{\text{large }N}|\lambda_{\max}|^{2N}(u_{\max}|u_{\max})(v_{\max}|\rho_B|v_{\max}), \tag{22}$$

$$\rho^{(\tau)}(N)\xrightarrow{\text{large }N}|\phi_0\rangle\langle\phi_0|\otimes|u_{\max})(u_{\max}|/(u_{\max}|u_{\max}) \tag{23}$$

に漸近することになる. すなわち, 系 A に対する観測の影響を受け, 系 B はその初期状態に依存することなく純粋状態 $|u_{\max})/\sqrt{(u_{\max}|u_{\max})}$ に [確率 (22) で] 至るのである. この最終的な状態は必ずしもコヒーレント状態ではなく, 系のハミルトニアン $H$, 確認する系 A の状態 $|\phi_0\rangle$, 及び, 確認の時間間隔 $\tau$ によって決まることも分かるであろう.

前半のモデル (1) の議論も, この一般的な枠組みに乗っている. 射影された時間発展演算子は

$$\langle\phi_0|e^{-iH\tau/\hbar}|\phi_0\rangle=\exp\left[-|\alpha|^2\left(1-e^B-\frac{A^2}{1-e^{-C}}\right)\right]\exp\left[C\left(b^\dagger+\frac{A\alpha^*}{1-e^{-C}}\right)\left(b-\frac{A\alpha}{1-e^{-C}}\right)\right] \tag{24}$$

で与えられるが，これは相似変換によって容易にエルミート化することができ，固有値問題 (17) は直ちに

$$\lambda_n = \exp\left[-|\alpha|^2\left(1 - e^B - \frac{A^2}{1-e^{-C}}\right)\right] e^{nC} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{25a}$$

$$|u_n) = U|n\rangle, \quad (v_n| = \langle n|U^{-1}, \quad U \propto \exp\left[\frac{A}{1-e^{-C}}(\alpha b^\dagger + \alpha^* b)\right] \tag{25b}$$

と解かれる．ただし，$|n\rangle$ は $b^\dagger b$ の固有状態 (数状態) である．$|e^C| < 1$ に注意すると $\lambda_{\max} = \lambda_0$ であるが，式 (23) は式 (12) を正しく再現することが分かるであろう．

系 A に対して観測を繰り返すと，その影響はそれと結合している系 B にまでも及び，しかも，系 B は初期状態によることなくある純粋状態へと向かう．本稿の議論で明らかになったこの事実を活用すれば，例えば次のようなことも可能であろう．直接操ることができない系 B も，それと結合している系 A に対する操作を通じて，純粋状態へと移行させることができるのである．系 B を導く先の純粋状態は，系のハミルトニアン，観測によって系 A を射影する状態，その観測間の時間間隔によって決めることができる．ここで得られた新たな知見は，量子コヒーレンスを制御する新しい手法として，量子ゼノン効果の新たな可能性を開くものであると言えよう．

本研究を発表する機会を与えてくださった有光敏彦教授，阿部純義助教授をはじめとする主催者の方々に，また，研究集会において議論してくださった皆様に，感謝致します．

## 参考文献

[1] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. **18**, 756 (1977).
[2] H. Nakazato, M. Namiki, and S. Pascazio, Int. J. Mod. Phys. B **10**, 247 (1996).
[3] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, M. C. Fischer, K. W. Madison, P. R. Morrow, Q. Nu, B. Sundaram, and M. G. Raizen, Nature **387**, 575 (1997).
[4] M. C. Fischer, B. Gutiérrez-Medina, and M. G. Raizen, Phys. Rev. Lett. **87**, 040402 (2001).
[5] P. Facchi, H. Nakazato, and S. Pascazio, Phys. Rev. Lett. **86**, 2699 (2001).
[6] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland, Phys. Rev. A **41**, 2295 (1990).
[7] M. Schuster, C. J. Carlile, and H. Rauch, Z. Phys. B **85**, 49 (1991); E. Jericha, C. J. Carlile, M. Jäkel, and H. Rauch, Physica B **234–236**, 1066 (1997).
[8] S. Pascazio, M. Namiki, G. Badurek, and H. Rauch, Phys. Lett. A **179**, 155 (1993); S. Pascazio and M. Namiki, Phys. Rev. A **50**, 4582 (1994); H. Nakazato, M. Namiki, S. Pascazio, and H. Rauch, Phys. Lett. A **199**, 27 (1995); Z. Hradil, H. Nakazato, M. Namiki, S. Pascazio, and H. Rauch, *ibid.* **239**, 333 (1998); K. Machida, H. Nakazato, S. Pascazio, H. Rauch, and S. Yu, Phys. Rev. A **60**, 3448 (1999).