重力熱的不安定性とTsallisエントロピー

樽家 篤史 (東大理)・阪上 雅昭 (京大総人)

1 重力熱的不安定性とは？

重力多体系の力学進化や平衡形状の性質を、熱・統計力学的な観点に立って理解しようという試みは、古くから行なわれてきた問題である。ある意味、アカデミックなこの問題が、自己重力系においては、「重力熱的カタストロフィ(Gravothermal Catastrophe)」と呼ばれる不安定性の発見により、球状星団のコア進化の解明に大きな役割を果たしたことは、特筆すべき事柄である [1]。

Gravothermal Catastrophe は、重力多体系特有の性質、「負の比熱」の存在によって熱・統計力学的に説明することができる。こうした現象の本質を捉える toy model が、Antonov や Lynden-Bell & Wood らによって考案・解析されている [2][3]。その model とは以下のようなものである。半径 r_e の断熱壁で囲まれた球内に 全質量 M の N 個の粒子を閉じ込め、手を放す。粒子は重力相互作用によって次第に、ある平衡状態に落ち着くと予想される。簡単のため、$N \to \infty$ とすると、単純に平衡状態は半径 r_e, 全質量 M、それに全エネルギー E だけで記述されることになろう。問題は、こうした平衡状態が熱的に安定な系として存在し得るか、である。この問いに対し、Antonov や Lynden-Bell & Wood らは、エントロピー最大 (極大) 原理の考えに基づき、求めた平衡形状が常にエントロピー極大の状態にあるかどうかを調べた。その結果、平衡形状を特徴づける無次元パラメーター $\lambda \equiv -Er_e/GM^2$ には臨界値 $\lambda_c = 0.335$ が存在し、$\lambda > \lambda_c$ 、言いかえると $r_e > 0.335GM^2/(-E)$ を持つ平衡系は安定に存在し得ないことを示した (G は重力定数)。

こうした臨界値 λ_c の存在は、比熱を用いた議論からも定性的に説明することができるが、臨界値の値自身は、彼らがどんな "エントロピー" を用いて解析したかに依る。彼らの解析では、系の状態を特徴づける phase-space distribution function $f(x,v)$ に対し、次のような Boltzmann-Gibbs 型のエントロピー $S_{\rm BG}$ を採用した:

$$S_{\rm BG} = -\int d^3x\, d^3v \;\; f(x,v)\, \ln f(x,v) \tag{1}$$

そうして、$S_{\rm BG}$ を極大とする平衡形状の存在条件を探したのである (x, v はそれぞれ位置と速度を表す)。具体的には、エントロピーの 1 次変分 $\delta S_{\rm BG} = 0$ から、まずエントロピー極値をとる平衡形状を求め、次いで、平衡解まわりの摂動を考え、2 次変分量 $\delta^2 S_{\rm BG}$ の符号が平衡解に応じてどう変わるかを調べた。その結果、エントロピーの極大・極小の境界、$\delta^2 S_{\rm BG} = 0$ から臨界値 $\lambda_c = 0.335$ を得たわけである。

ところで、Boltzmann-Gibbs エントロピー に基づくと、1 次変分から、isothermal 分布と呼ばれる、一様な速度分散を持つ平衡解が得られる。いいかえると、Antonov、Lyden-Bell & Wood らの結果は、isothermal 分布という特殊な平衡形状における解析だった、ともいえる。一般に、自己重力系における平衡解は、無衝突系を考えた場合、isothermal に限らず、さまざまな形状が安定に存在し得ることが知られている [4]。もちろん、それらは必ずしも熱的には安定なわけではなく、長いタイムスケールでは、2 体散乱によって各粒子の運動 (熱) エネルギーは互いに交換され、運動エネルギーは次第に一様化されていく。この考えをつきつめると、どんな無衝突系の平衡形状も、最終的には一様な速度分散を持つ isothermal 分布へと進化することになるので、Antonov らの解析はある程度、一般性がありそうである。とはいえ、全ての無衝突系の平衡形状が、isothermal 分布へと進化するものだろうか？ 重力多体系のような系でも、短距離相互作用系のような熱平衡状態が本当に実現し得るとしてよいのだろうか？

2 Tsallis エントロピーと重力熱的不安定性

重力多体系の最終状態として isothermal 分布だけが選ばれる、という点について疑いを持ちはじめると、エントロピーとして Boltzmann-Gibbs 型を採用する必然性はない。むしろ、Boltzmann-Gibbs 型を包含するような一般的なエントロピーを用いて、熱的安定性を議論することに意味がありそうである。

そこで、一般化された熱・統計力学の1つとしてよく知られている、Tsallis エントロピーに基づく定式化について考えてみることにしよう [5]。Tsallis エントロピーは、

$$S_q = -\frac{1}{q-1}\int d^3x\, d^3v \ \ \{f^q - f\}. \tag{2}$$

と表される。q という新たなパラメーターを導入したことにより、Boltzmann-Gibbs エントロピー ($q \to 1$ の時、式 [1] に一致する) を包含しつつ、従来の熱・統計力学の拡張を試みる、1つの理論的枠組を提供しるのが Tsallis 熱・統計である 。従って、Tsallis 型エントロピーを用いて平衡解を求めた場合、新たな自由度 q のせいで、isothermal 分布をその一部に含む、一連の平衡解の集合が記述できると予想される。では、(i). その平衡解の集合とはどんなものか？(ii). 安定性はどうなっているのか？(iii). Tsallis 熱・統計で記述される自己重力系の（熱）平衡系とは一体どんな意味があるのか？

これらの問題にうち、(i)(ii) について、我々が行なった解析の概略を説明しよう (詳細は、Ref.[7] を参照)。まず、(i) の問題について。実は、この問題は、1次変分 $\delta S_q = 0$ から、stellar polytrope と呼ばれる平衡解になることがすぐわかる [6]。エントロピー極値解の分布関数 $f(x, v)$ は、以下のように与えられる：

$$f(x, v) = A \ \left[\Phi_0 - \Phi(x) - \frac{1}{2}v^2\right]^{1/(q-1)} \tag{3}$$

ここで、Φ は Newton の重力ポテンシャルで、A, Φ_0 は定数である。この平衡解が stellar polytrope と呼ばれるゆえんは、分布関数 (3) から評価される圧力 P と密度 ρ の関係が、polytrope 関係 $P \propto \rho^{1+1/n}$ を満たすことにある。ここで、polytrope 指数 n と Tsallis パラメーター q は、

$$n = \frac{3}{2} + \frac{1}{q-1} \tag{4}$$

と関係づいている。

次いで、(ii) の安定解析について考えよう。熱統計的な解析ではエントロピーの2次変分を行う必要があるが、まずは、平衡解を記述するパラメータ (E, M, r_e) に対する解の一意性を調べ、不安定性の存在有無を大雑把に見てみることにしよう。先の isothermal 分布の例にならい、分布関数 (3) から求まる 無次元パラメータ $\lambda \equiv -Er_e/GM^2$ を、各々平衡形状の中心 $r = 0$ と断熱壁 $r = r_e$ で見た密度の比、$D \equiv \rho_c/\rho_e$ の関数として表してみることにする。

図1は、Tsallis パラメータ q (polytrope 指数 n) をいろいろ替えて、平衡形状の一連のファミリーを表したものである。これを見ると、$n = 5$ ($q = 9/7$) を境に、曲線のふるまいが変わり、$n > 5$ では、無次元量 λ に上限値 λ_c が存在することがわかる。このことを isothermal 分布の場合と対比させると、polytrope 指数 $n > 5$ の場合は、$\lambda = \lambda_c$ を境にして、半径 $r_e > \lambda_c GM^2/(-E)$ において不安定性が現われることを示している。

こうした不安定性の存在は、Tsallis エントロピーの2次変分 $\delta^2 S_q$ を使って無矛盾に説明できる。安定・不安定性を分ける条件は $\delta^2 S_q = 0$ である。そこで、E と M を固定、平衡解周りの摂動 $\rho \to \rho + \delta\rho$ を考え、Tsallis エントロピーの2次変分を具体的に求める

ことにする。すると、条件 $\delta^2 S_q = 0$ から得られる最終的な式は以下のような微積分方程式に帰着される。摂動量 $\delta\rho$ を $\delta\rho = (1/4\pi r^2)(dQ/dr)$ と表し、今、radial mode の摂動だけに着目すると、

$$\left[\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{4\pi r^2\rho}\left(\frac{P}{\rho}\right)\frac{d}{dr}\right\} + \frac{n}{n+1}\frac{G}{r^2}\right]Q(r) = \Lambda_n \frac{Gm(r)}{r^2}, \tag{5}$$

ここで、Λ_n は、

$$\Lambda_n \equiv \frac{2}{3}\frac{n-3/2}{n+1}\frac{\displaystyle\int_0^{r_e} dr' \frac{Gm(r')}{r'^2}Q(r')}{\displaystyle\int_0^{r_e} dr'\, 4\pi r'^2 P(r')}. \tag{6}$$

一見、解くのが難しそうな上式だが、実は解析解が存在し、

$$Q(r) = c_1\, 4\pi r^3 \rho(r) \ + \ c_2\, m(r)\ ; \quad m(r) = \int_0^r dr'\, 4\pi r'^2 \rho(r') \tag{7}$$

という線形結合で表される。係数 c_1, c_2 は、境界条件 $Q(0) = Q(r_e) = 0$ と方程式 (5) を満足する条件より求まるが、微積分方程式であるがために、(7) が解となるための1つの条件式が導かれる (eq.[53] of Ref.[7])。結果としてその条件式から、$n > 5$ で不安定性が現われることがわかるのである。

3 自己重力系の比熱と熱的安定性

上記の安定性の議論では、Tsallis エントロピーの2次変分からも無矛盾な結果が得られたわけだが、ここでいう、安定・不安定とは何をさすのだろう？ 統計力学の範疇に基づく解析なので、Naive に熱的安定性と思いたいのだが、エントロピーを非加法的にしているので、通常の熱・統計の考えに基づいて議論するのは危険である。むしろ、非加法的熱・統計学のフレームワークで2次変分の結果を再考する必要があろう。このことは、Tsallis エントロピーに基づく熱平衡の意味を考える上でも、非常に重要な問題である。

この問題については、最近、我々のグループによって議論が行われた。平衡形状の「比熱」を具体的に評価したところ、2次変分の結果を熱的不安定性として解釈できることをつきとめた [8]。stellar polytrope の比熱を計算する場合、重力平衡系の" 熱力学的温度 T " を同定するところから始める必要があったが、我々は、準静的な変化における関係 $d'Q = TdS$、及び第一法則 $d'Q = dE + PdV$ を用いて、stellar polytrope の" 熱力学的温度 T " をつきとめることに成功した。その結果、(定積) 比熱 $C_V = (dE/dT)_{r_e}$ を最終的に求めることができた。

図2は、無次元化された粒子1個あたりの比熱を密度比 ρ_c/ρ_e の関数としてプロットしている。この図から2つの大きな特徴が読み取れる。1つは、ポリトロープ指数 $n > 3$ で、比熱が発散する点 (× 印) が現れること、もう1つは、$n > 5$ における比熱のゼロ点 (矢印) の存在である。前者は相転移を表す点でもあり、ちょうど、自由エネルギーが極小でなくなる点に対応していた。一方、後者は、断熱壁で囲まれた自己重力平衡系の臨界安定点に対応し、まさにエントロピーの2次変分がゼロになる点と一致していた。詳細は、文献 [8] を見てもらいたいが、比熱がゼロで臨界安定になることは、そもそも isothermal 分布の時にも得られていた結果であり、重力系の比熱が負になることから来る自然な帰結である。つまり、Tsallis エントロピーの場合でも、Boltzmann-Gibbs 型の場合と全く同様に、熱力学的の言葉で、重力平衡系の安定性を議論することができたのである。

以上の結果は、Tsallis 熱・統計の考えに基づけば、当然のことなのかもしれないが、isothermal 分布以外に stellar polytrope と言う熱平衡系が存在し、しかも、熱力学的に安

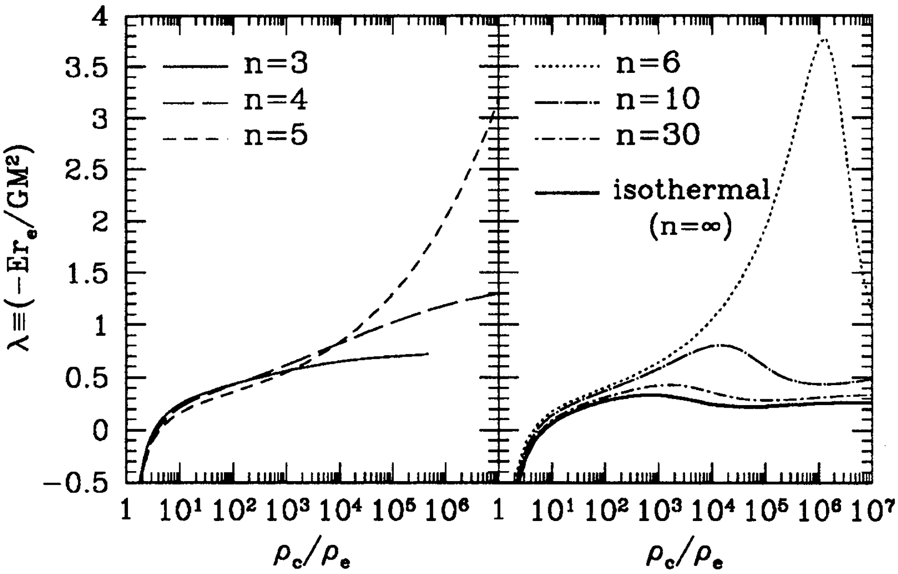

Figure 1: Energy-radius-density contrast relationship

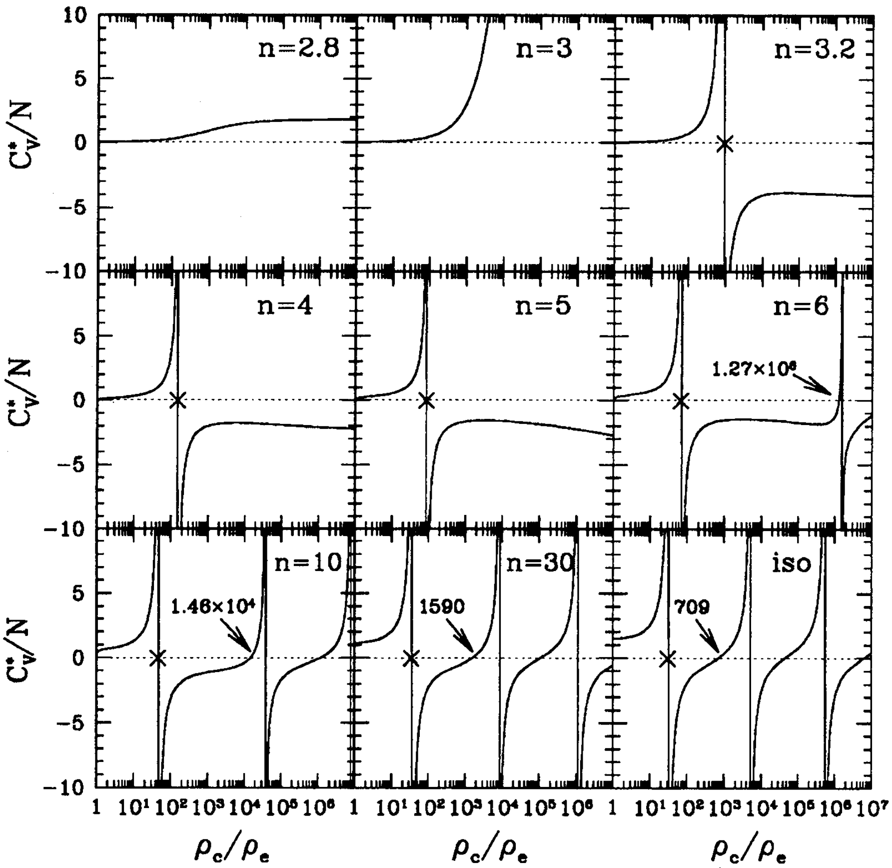

Figure 2: Normalized specific heat per particle C_V^*/N as a function of density contrast ρ_c/ρ_e near the critical polytrope indices $n = 3$(*upper*) and $n = 5$(*middle*), and large n cases(*lower*). Here, the normalized specific heat C_V^* is defined by $C_V/(h^2/GMr_e)^{(3/2)/(n-3/2)}$ (see Ref.[8] in detail).

定・不安定性が記述できる、ということ自体、突き詰めるとよくわからなくなる。一体、Tsallis 熱・統計の言う「熱平衡」とは何を表しているのか? Isothermal分布の場合の熱平衡とどう違うのか? はたまた、stellar polytrope の不安定性は物理的に存在しうるものなのか? これら一連の疑問に答えるためには、熱・統計的アプローチを越えた動力学的解析がどうしても必要である。今後、N 体シミュレーションなどを用いた自己重力系の長時間力学進化から、Tsallis 熱・統計の物理的意味を問い直していくことが課題である。

References

[1] G. Meylan, D.C. Heggie, Astron.Astrophys.Rev. 8 (1997) 1.

[2] V.S. Antonov, *Vest. Leningrad Gros. Univ.*, 7 (1962) 135 (English transl. in *IAU Symposium 113, Dynamics of Globular Clusters*, ed. J. Goodman and P. Hut [Dordrecht: Reidel], pp. 525–540 (1985)

[3] D. Lynden-Bell, R. Wood, Mon.Not.R.Astr.Soc. 138 (1968) 495.

[4] J.Binney, S.Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1987)

[5] C.Tsallis, J.Stat.Phys. 52 (1988) 479.

[6] A.R. Plastino, A. Plastino, Phys.Lett. A 174 (1993) 384.

[7] A.Taruya & M.Sakagami, Physica A 307 (2001) 185.

[8] A.Taruya & M.Sakagami, Physica A, submitted (cond-mat/0204315).