# 膜の Euler 座屈によるパターン形成

東北大学 大学院理学研究科　内田 就也

外力を受けた弾性体の座屈は、 Euler による安定性解析以来、理学的、工学的に重要な研究対象となっている。弾性膜の座屈は握りつぶした紙や衝突した自動車のボディーに見られるような皺状パターンを生む。その単位構造（リッジ、コーン）の力学的性質については理解が進みつつあるが [1]、パターン全体の統計的性質は未だ明らかとは言えない。本研究では弾性膜の大変形を記述する Föppel-von Kármán (FvK) 理論に基づく数値シミュレーションとその縮約モデルの解析によって、座屈パターンの静的および動的な性質を調べた。

FvK 近似における弾性エネルギーは 2 次元歪エネルギーと曲げエネルギーの和として $F = \int dxdy\,(f_{ext} + f_{bend})$ の形に表される。膜を構成する要素の変位を $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u}, h) = (u_x, u_y, h)$ とすると膜の傾き $m \equiv |\nabla h| \ll 1$ の条件下で 2 次元歪テンソルは $e_{ij} = \frac{1}{2}[\partial_i u_j + \partial_j u_i + (\partial_i h)(\partial_j h)]$ $(i, j = x, y)$ と近似され、

$$f_{ext} = \frac{\lambda}{2} e_{ii}^2 + \mu e_{ij}^2, \qquad f_{bend} = \frac{\kappa}{2}(\nabla^2 h)^2$$

となる（$\lambda$, $\mu$ は Lamé 定数, $\kappa$ は曲げ弾性率)。過減衰型ダイナミクス $\partial \boldsymbol{U}/\partial t = -\Gamma \delta F/\delta \boldsymbol{U}$ を仮定し、印加された面圧縮歪み $\overline{e_{ii}} = -2\epsilon$ を制御パラメータとして、平坦な膜に与えたランダム擾乱の成長を数値的に計算した。その結果、生じる皺パターンの構造相関長や曲げエネルギーの漸近的成長則はべき乗的となり、$\mu > 0$ のときはバネと質点から成る離散モデルの結果 [2] を再現、$\mu = 0$ （流体膜）のときは新たな指数の組を得た。

次に、得られたパターンの統計的性質を解析するため力学平衡条件 $\delta F/\delta \boldsymbol{u} = 0$ を仮定して変数 $\boldsymbol{u}$ を消去し、膜の傾き $\boldsymbol{m} = \nabla h$ で表された有効自由エネルギーを得た。これは $\mu = 0$ の場合、2 次元 XY モデルの非線形項 ($\propto (m^2)^2$) を空間平均 ($\propto m^2\overline{m^2}$) で置き換えたもの、$\mu > 0$ の場合はさらに配向テンソル $\mathsf{Q} = \boldsymbol{mm} - (m^2/2)\mathbf{1}$ の長距離相互作用（$\propto r^{-2}$）を加えたものとなる。このマッピングにより、コーンを点欠陥、リッジを線欠陥と見なすことができ、空間相関構造や粗大化ダイナミクスについても一定の知見を得ることができる。こうして、膜の座屈パターンの理解においても、方向自由度と弾性の結合という概念 [3] が有効に適用される。

**参考文献**

[1] A. Lobkovsky *et al.*, Science **270**, 1482 (1995); E.Cerda *et al.*, Nature **401**, 46 (1999); A. Boudaboud *et al.*, Nature **407**, 718 (2000); B. A. DiDonna, PRE **66**, 016601 (2002).

[2] D. Moldovan and L. Golubović, PRL **82**, 2884 (1999).

[3] N. U., 相転移ダイナミクスにおける方向自由度と弾性の結合、2002 年度基研研究会「ソフトマターの物理学」