

# 原子気体 BEC における量子渦の分裂<sup>1</sup>

京都大学大学院 理学研究科 川口 由紀<sup>2</sup>

(2005 年 1 月 18 日受理)

## 1 イントロダクション

アルカリ原子のボース・アインシュタイン凝縮体 (Bose-Einstein condensate = BEC) では、原子の持つスピン自由度 [1,2] を利用して、量子数  $L$  (渦糸の周りの位相変化が  $2\pi L$ ) が 2 以上の渦を生成することが可能であり [3-5]、現在までに  $L = 2, 4$  の渦の観測が報告されている [6,7]。渦糸周りの回転の運動エネルギーを考えるとこのような渦はエネルギー的に損であり、分裂して  $L = 1$  の渦になると考えられる。一方、系のエネルギーを保存したままでも分裂を起こすような機構が存在する [8-10]。本稿では量子数 4 の渦を具体例に挙げて、このような渦の分裂過程について述べる。

以下ではまずイントロダクションとして、BEC 中の渦の安定性に関する議論と、本研究の舞台となる量子数 4 の渦の生成方法について紹介する。

### 1.1 量子渦の安定性

1995 年、アメリカのマサチューセッツ工科大学 (MIT) とコロラド大学 (JILA) のグループがアルカリ原子 ( $^{87}\text{Rb}$  [11],  $^{23}\text{Na}$  [12]) の希薄気体におけるボース・アインシュタイン凝縮を実現して以来、この分野は理論的にも実験的にも精力的に研究されてきた [13,14]。その一つに、超流動に特徴的な量子渦の研究が挙げられる [15]。原子気体 BEC において、静止したトラップ中で超流体だけが流れ続けることが可能であろうか。この問題に関して、トラップ中の量子数 1 の渦状態では負の励起エネルギーをもつ集団励起モードが存在することが示された [16-19]。これは、もとの状態よりもエネルギーの低い一粒子状態が存在し、原子がこの状態に移ることで渦が崩壊することを意味する。つまり、渦状態はエネルギー汎関数の極小点ではなく常に鞍点であり、凝縮体はエネルギー障壁を越えることなく渦のない低エネルギー状態に移り変わる。量子渦はそれ自身で消滅することはないので、最終的に凝縮体の外に逃げ出して消える。量子数 2 以上の渦に対しても同様に負のエネルギーを持つ励起が存在し、これは渦の分裂を引き起こす。分裂後、最終的にはやはり凝縮体から抜け出す。

<sup>1</sup>本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

<sup>2</sup>E-mail: yuki@scphys.kyoto-u.ac.jp

ここで注意したいのが、上記の過程には必ずエネルギーの散逸を伴うという点である。凝縮体はエネルギーの低い状態に移るので、エネルギーのはけ口が必要となる。トラップ中の原子気体の場合、これを担うのは熱励起した非凝縮状態の原子との衝突である。したがって温度が低くなるほど散逸が小さくなり、渦の崩壊は非常にゆっくり起こることになる。実際、量子数1の渦については非常に長寿命の渦が観測されている。

では  $L \geq 2$  の渦の場合も、十分低温で散逸がないと見なせる場合には分裂は起こらないのであろうか。これに対して Pu らは [8]、量子数2以上の渦状態では複素固有値をもつ励起が存在し、散逸のない場合でも渦の不安定化になりうると指摘した。励起モードの時間発展が  $e^{-i\omega t}$  であることを考えると、複素固有値の励起が摂動として少しでも混ざればそれが指数関数的に成長し、渦状態が壊れることになる。そこで我々は複素固有値励起によりどのような不安定化が起こるかを、具体的に量子数4の渦状態について考察した [10]。

## 1.2 量子数4の渦の生成方法

ここで、本研究で取り上げる量子数4の渦の生成方法について紹介しておく [3–5]。

アルカリ原子のように原子スピン  $F$  を持つ原子は、磁場により空間にトラップすることが可能である。BECが実現するような十分低温 ( $\sim$  数十 nK) に冷やされた原子は磁場中をゆっくり移動し、磁場方位が空間変化してもそれを断熱的に感じる。そのため磁場が十分強ければ、原子スピンの磁場に平行な原子は平行な状態を、反平行な原子は反平行な状態を保って運動する。これを断熱定理と言う。ここでの磁場強度の基準は、Larmor 歳差運動の1周期の間に原子が感じる磁場方位の変化が  $2\pi$  に比べ小さいかどうかである。Zeeman エネルギー  $V = \hbar\gamma_\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}$  を考慮すると、( $\gamma_\mu > 0$  の場合<sup>3</sup>) 磁場に平行なスピンをもつ原子は磁場の弱い方がエネルギーが低くなる。したがって空間に磁場の極小点を作ればその周りに原子をトラップすることができる。このような状態は弱磁場シーキング状態 (weak-field-seeking state=WFSS) と呼ばれる。逆に、磁場に反平行なスピンをもつ原子は強磁場シーキング状態 (strong-field-seeking state=SFSS) と呼ばれ、より磁場の強い領域を好む。しかし自由空間では磁場の極大を作れないため、磁場により SFSS をトラップすることはできない。

具体的な磁気トラップとしては、図1に示すような Ioffe-Prichard(IP) トラップが挙げられる。四本の線電流が  $xy$  方向に四重極磁場  $\mathbf{B}_\perp = B_\perp(\hat{x} \cos(-\theta) + \hat{y} \sin(-\theta))$  を作り、ヘルムホルツコイルが  $z$  方向の磁場  $\mathbf{B}_z = \hat{z}(B_0 + B''z^2/2)$  を作っている。 $z$  方向の閉じこめは  $xy$  方向の閉じこめに比べて緩く、また、トラップの中心付近では  $B_\perp \approx B'r$  と近似できて、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_z + \mathbf{B}_\perp \approx \begin{pmatrix} B'r \cos(-\theta) \\ B'r \sin(-\theta) \\ B_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

<sup>3</sup>磁気回転比  $\gamma_\mu$  の符号は原子による。今は  $^{87}\text{Rb}$  にあわせて  $\gamma_\mu > 0$  にとった。 $\gamma_\mu < 0$  の原子では磁場に反平行なスピンを持つ原子がトラップされる。

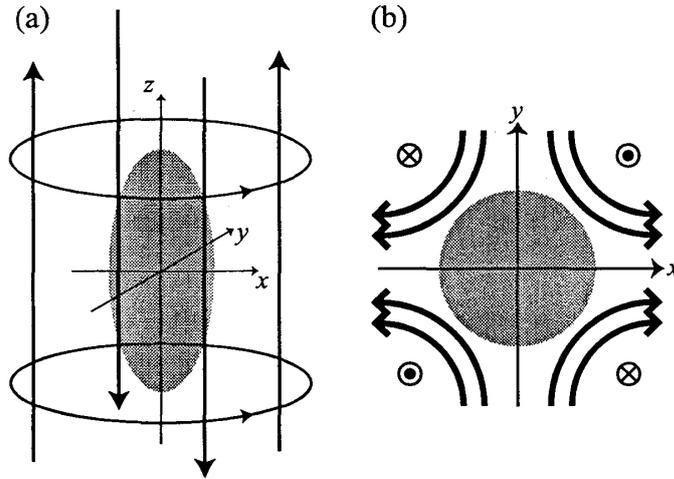


図 1: Ioffe-Prichard トラップ。(a) 四本の Ioffe バーとヘルムホルツコイルからなる。(b)  $xy$  面内方向の磁場は四重極磁場になる。

と書ける。さらに、原子スピン  $F = 2$  の原子で磁場方向に量子化軸をとった時の磁気量子数  $m = 2$  の状態を考えると、トラップポテンシャルは原点付近で

$$\begin{aligned} V(r) &\approx 2\hbar\gamma\mu \left[ B_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{B'^2}{B_0} r^2 + B'' z^2 \right) \right] \\ &\equiv V_0 + \frac{1}{2} M \omega_{\text{HO}}^2 (r^2 + \lambda^2 z^2) \end{aligned} \quad (2)$$

と近似できる。 $M$  は原子の質量であり、後半の式で  $\omega_{\text{HO}}, \lambda$  を定義している。 $\omega_{\text{HO}}$  はトラップ周波数と呼ばれ、トラップの閉じ込めの強さを評価するのに用いられる。

渦はトラップ磁場の  $\mathbf{B}_z$  の向きを反転させることにより生成される。簡単のため  $z$  方向の閉じ込めポテンシャルを無視し、磁場の  $z$  成分は  $B_0$  で一様だとする。原子の分布している範囲で  $B_0 \gg B'r$  であるとする、磁場はほぼ  $+z$  方向を向き、トラップされた原子のスピンは  $+z$  方向に偏極している。適当な速度 [20–22] で磁場を  $B_0 \rightarrow 0 \rightarrow -B_0$  と変化させると原子スピンは磁場変化にあわせて向きを変え、最終的に  $-z$  方向を向く。ここでのポイントは、四重極磁場があるためにスピンの回転軸が場所によって異なるという点である。始状態、終状態における原子スピンの方位はそれぞれ揃っているが、途中の回転方向が異なるために、終状態では場所に依存した位相が現れる。

具体的に  $F = 2, m = 2$  の状態の回転を見てみよう。 $\mathbf{B}_z$  の反転により、スピンは軸  $\hat{n} = \hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta$  の周りに  $\pi$  回転する (図 2)。この回転をオイラー角を用いて表現すると、 $\alpha$  軸周りの角度  $\phi$  回転を  $\mathcal{R}_\alpha(\phi)$  と書いて、 $\mathcal{R}_z(-\theta)\mathcal{R}_y(\pi)\mathcal{R}_z(\theta)$  と表される。これを状態  $|2\rangle$  に作用させると、

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_z(-\theta)\mathcal{R}_y(\pi)\mathcal{R}_z(\theta) |2\rangle &= e^{iF_z\theta} e^{-iF_y\pi} e^{-iF_z\theta} |2\rangle \\ &= e^{-2i\theta} e^{iF_z\theta} e^{-iF_y\pi} |2\rangle \\ &= e^{-2i\theta} e^{iF_z\theta} |-2\rangle \\ &= e^{-4i\theta} |-2\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

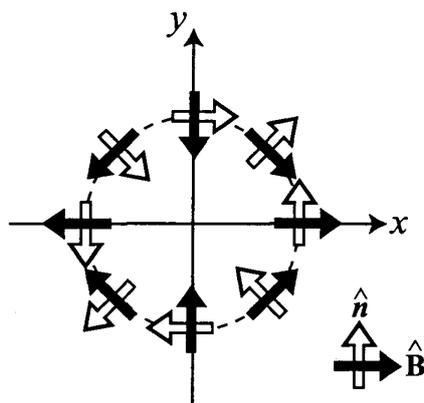


図 2: 四重極磁場中での磁場と回転軸の空間変化。

となり、スピン状態が  $|2\rangle \rightarrow |-2\rangle$  に移ると同時に、量子数 4 の渦が現れることがわかる。 $F = 1, m = 1$  の状態についても同じように計算でき、量子数 2 の渦が生成される。

量子渦に関する実験では、楕円形にひずませたトラップを回転させて渦を生成する方法 [23, 24] がよく用いられているが、この場合は回転の角速度を上げて凝縮体に大きな角運動量を与えると量子数 1 の渦の数が増えていく。それに対して、上記の方法を用いれば量子数 2 以上の渦が生成可能となる。実際にこの方法により、量子数 2, 4 の渦が観測された [6]。また、つい最近では量子数 2 の渦の分裂過程が観測され [7]、その時間発展が複素固有値に依存しているような振舞いもみられている。

## 2 ボースアインシュタイン凝縮体の一般論

この節では、原子気体 BEC の一般的な理論を紹介する。アルカリ原子のようにスピン自由度を持った凝縮体は、その自由度に対応した多成分の秩序変数により記述される [1, 2]。しかし磁気トラップにより捕獲された凝縮体は、1.2 節で述べた断熱定理のために磁気状態が固定されてしまう。したがってトラップ中に一つのスピン成分だけを捕獲した場合は、超流動  $^4\text{He}$  のように一つの秩序変数により凝縮体を記述する事が可能となる。

ここで紹介する理論は、当初は超流動  $^4\text{He}$  を説明するために考えられた理論であるが [25]、今ではこのような 1 成分の原子気体 BEC を記述する理論として広く用いられている。弱結合の範囲での理論なので、粒子数密度が大きく粒子間相互作用が強い超流動  $^4\text{He}$  に対してはあまり精度がよくないのに対し、希薄で相互作用の弱い原子気体では非常によい近似となっている。本研究では絶対零度の系を考えているので、ここでは  $T = 0$  の理論にとどめておく。

## 2.1 平均場理論

まず、考えているボース粒子の場の演算子を  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$  とおく。熱浴と粒子をやりとりできる場合を考え、化学ポテンシャルを  $\mu$  として第二量子化により相互作用する系のハミルトニアンを記述すると、

$$\begin{aligned}\hat{K} &= \hat{H} - \mu \hat{N} \\ &= \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (4)$$

となる。 $M$  は原子の質量である。 $V(\mathbf{r})$  は外部ポテンシャルを表すが、ここでは式 (2) のトラップポテンシャルを念頭に置いている。 $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は位置  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{r}'$  にいる原子間の相互作用を表している。想定する系は非常に希薄であるとして、ここでは接触型ポテンシャル

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M}\quad (5)$$

を用いる。十分低温では  $s$  波散乱のみが効き、相互作用の強さは  $s$  波散乱長  $a$  により記述される。本論文では斥力相互作用する原子を考えているので、以後、 $a > 0$  に限定して話をすすめる。代表的な原子の散乱長としては、 $^{23}\text{Na}$  : 2.6 nm、 $^{87}\text{Rb}$  : 5.6 nm であることが知られている。

ハミルトニアン (4) より、 $\hat{\Psi}$  に対する Heisenberg の運動方程式は

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{K}] \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu \right) \hat{\Psi} + g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}\end{aligned}\quad (6)$$

となる。系の大部分が凝縮状態にあるとすると、場の演算子は凝縮部分  $\zeta(\mathbf{r})\hat{a}_0$  と非凝縮部分 (ゆらぎ部分)  $\hat{\phi}(\mathbf{r})$  に分けて

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \zeta(\mathbf{r})\hat{a}_0 + \hat{\phi}(\mathbf{r})\quad (7)$$

と書ける。 $\zeta(\mathbf{r})$  は基底状態の一粒子波動関数で  $\hat{a}_0$  はこの状態に対する消滅演算子である。マクロな数の粒子が基底状態に凝縮していることから、 $\hat{a}_0$  は凝縮粒子数の平方根  $\sqrt{N_0}$  で置き換えることができ、

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) + \hat{\phi}(\mathbf{r})\quad (8)$$

$$\Psi(\mathbf{r}) \equiv \zeta(\mathbf{r})\sqrt{N_0}\quad (9)$$

と表される。 $\Psi(\mathbf{r})$  は凝縮体の波動関数で、凝縮相を特徴づける秩序変数となる。非凝縮成分の統計平均は  $\langle \hat{\phi}(\mathbf{r}) \rangle = 0$  であり  $\Psi(\mathbf{r})$  は場の演算子の統計平均  $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle$  に等しい。

十分低温で大多数の原子が凝縮状態にある場合、 $\hat{\phi}$  は  $\Psi$  に比べて十分小さく、その寄与は無視できる。このとき、式 (6) は凝縮体の運動方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu + g|\Psi|^2 \right) \Psi\quad (10)$$

となる。この式は Gross-Pitaevskii(GP) 方程式と呼ばれる。また、粒子数密度も同様にして、

$$n(\mathbf{r}) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle \approx |\Psi(\mathbf{r})|^2 \quad (11)$$

と近似できる。また、化学ポテンシャル  $\mu$  は、粒子数の規格化条件

$$\int d\mathbf{r} |\Psi|^2 = N \quad (12)$$

により決まる。

## 2.2 渦の量子化

GP 方程式 (10) からは凝縮体の動力学が考察できる。凝縮体密度の時間変化は、式 (10) を用いて

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(Mn)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2i} \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (13)$$

と書ける。これを連続の方程式と対応させると、凝縮体の運ぶ運動量密度が

$$\mathbf{j}_s = \frac{\hbar}{2i} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (14)$$

で表せることがわかる。ここで秩序変数を粒子数密度  $n(\mathbf{r}, t)$  と位相  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  に分けて  $\Psi = \sqrt{ne^{i\varphi}}$  と書くと、

$$\mathbf{j}_s = Mn \left( \frac{\hbar}{M} \nabla \varphi \right) \equiv Mn \mathbf{v}_s \quad (15)$$

となる。右の等式が超流動速度  $\mathbf{v}_s$  の定義式であり、超流動速度は位相の勾配で表わされる。このような速度場はポテンシャル流と呼ばれ、

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = 0 \quad (16)$$

を満たす渦なし流である。したがって、流体が単連結領域にあるときには、閉じた経路に沿った速度場  $\mathbf{v}_s$  の循環はゼロとなる。しかし流体が多重連結の領域にあるとき (例えばトーラス容器中) には渦流が存在してよい。この場合、秩序変数は波動関数の性質を持つことから一価関数であり、経路に沿って一周したときの位相  $\varphi$  の変化は  $2\pi$  の整数倍に限られる。すると循環は

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s} = \frac{\hbar}{M} \oint \nabla \varphi \cdot d\mathbf{s} = \frac{\hbar}{M} 2\pi L = \kappa L \quad (17)$$

$$(L = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

と表され、 $\kappa (\equiv \hbar/M)$  を単位として量子化されていることがわかる。 $L$  を渦の量子数と呼ぶ。

円筒対称な容器中に循環  $\kappa L$  の超流動流があるとしよう。容器内に半径  $r$  の円形の経路を考える。経路上で超流動速度が一定であるとする、速度場は

$$\mathbf{v}_s = \frac{\kappa}{2\pi r} L \hat{\theta} \quad (18)$$

と表される。ここで、経路の半径  $r$  も小さくしていくと、速度場は明らかに  $r = 0$  で発散し、この点は特異点になる。通常、この特異点を回避するために、渦芯部分では超流動が壊れ秩序変数はゼロになっている。凝縮体自体が多重連結な構造をとることで、量子渦が存在できるのである。また、渦度 ( $\nabla \times \mathbf{v}_s$ ) もこの超流動の壊れる領域に集中しているので、式 (16) と矛盾しない。渦度にはわき出しも吸い込みもないので、このような特異点は単独では存在せずに線としてつながり渦糸となる。さらに渦糸はとぎれることがなく、それ自身で閉じるか容器の端で終わるかのどちらかである。

GP 方程式 (10) から定常な渦芯の構造をもう少し詳しく調べておこう。円筒座標系  $(r, \theta, z)$  の中心  $r = 0$  に量子数  $L (> 0)$  の渦糸を考え、簡単のためトラップポテンシャルを無視して渦糸から十分遠方での粒子数密度を  $n_0$  とする。 $r$  が大きいところでの GP 方程式から、化学ポテンシャルは  $\mu = gn_0$  となる。ここで、秩序変数を  $\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0}A(r)e^{iL\theta}$  と書くと、渦糸上では速度場は発散するために原子は存在できず  $A(0) = 0$  で、渦芯から離れるにつれて  $A \rightarrow 1$  に向かって秩序変数が回復していく。渦糸近傍では式 (10) の右辺第一項の運動エネルギーが支配的になり、これが化学ポテンシャルに等しくなるところで秩序変数の空間的变化が最大となる。つまり秩序変数はコヒーレンス長

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2Mgn_0}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi an_0}} \quad (19)$$

程度の距離で回復し、これが渦の典型的なサイズとなる。実際、式 (10) から時間的に定常な  $A(r)$  を求める式は

$$\xi^2 \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{L^2}{r^2} \right) A + A - A^3 = 0 \quad (20)$$

と書け、 $r \rightarrow 0$  での漸近解

$$A(r) = \left( \frac{r}{\xi} \right)^L \quad (21)$$

から、秩序変数の空間変化が  $\xi$  のスケールであることがわかる。

### 2.3 Bogoliubov 理論

次に、式 (8) の非凝縮成分  $\hat{\phi}$  を考え、励起状態を求める Bogoliubov 方程式を導く。式 (8) をハミルトニアン (4) に代入して  $\hat{\phi}$  の 2 次まで展開すると、Bogoliubov ハミルトニアン

$$\begin{aligned} \hat{K}_B = & \int dr \Psi^*(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu + \frac{g}{2} |\Psi|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}) \\ & + \int dr \left[ \hat{\phi}^\dagger \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu + 2g|\Psi|^2 \right) \hat{\phi} + \frac{g}{2} \left( \Psi^{*2} \hat{\phi} \hat{\phi} + \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}^\dagger \Psi^2 \right) \right] \quad (22) \end{aligned}$$

が得られる。 $\hat{\phi}$ の一次の項は、 $\Psi$ が式(10)の定常解であるとする消える。式(22)が $\hat{\phi}, \hat{\phi}^\dagger$ についての二次形式であることから、次の一次変換によりハミルトニアンに対角化を考える。

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = e^{i\varphi(\mathbf{r})} \sum_j' (u_j(\mathbf{r})\alpha_j + v_j^*(\mathbf{r})\alpha_j^\dagger) \quad (23a)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}) = e^{-i\varphi(\mathbf{r})} \sum_j' (u_j^*(\mathbf{r})\alpha_j^\dagger + v_j(\mathbf{r})\alpha_j) \quad (23b)$$

ただし $\varphi(\mathbf{r})$ は $\Psi(\mathbf{r})$ の位相であり、 $\sum_j'$ は凝縮状態そのものに相当するモードは除くことを意味する。 $\alpha_j, \alpha_j^\dagger$ は準粒子の生成消滅演算子で交換関係

$$[\alpha_j, \alpha_k^\dagger] = \delta_{jk} \quad (24a)$$

$$[\alpha_j, \alpha_k] = [\alpha_j^\dagger, \alpha_k^\dagger] = 0 \quad (24b)$$

を満たす。固有値方程式

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D} + 2g|\Psi|^2 & g|\Psi|^2 \\ -g|\Psi|^2 & -\mathcal{D}^* - 2g|\Psi|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = \omega_j \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\mathcal{D} \equiv -\frac{\hbar^2}{2M} [\nabla + i\nabla\varphi(\mathbf{r})]^2 + V(\mathbf{r}) - \mu \quad (26)$$

を考えると、固有値 $\omega_j$ がすべて実数である場合は<sup>4</sup>規格直交関係

$$\int d\mathbf{r} (u_j^* u_k - v_j^* v_k) = \delta_{jk} \quad (27a)$$

$$\int d\mathbf{r} (u_j v_k - v_j u_k) = 0 \quad (27b)$$

が導け、このとき式(22)は

$$\begin{aligned} \hat{K}_B = & \int d\mathbf{r} \Psi^*(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu + \frac{g}{2} |\Psi|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}) \\ & - \sum_j' \omega_j \int d\mathbf{r} |v_j(\mathbf{r})|^2 + \sum_j' \omega_j \int d\mathbf{r} (|u_j|^2 - |v_j|^2) \alpha_j^\dagger \alpha_j \end{aligned} \quad (28)$$

と対角化できる。式(25)の対称性から、 $(u_j, v_j)$ が固有値 $\omega_j$ (ここでは実数に限る)の解であれば $(v_j^*, u_j^*)$ は固有値 $-\omega_j$ の解となり同じ状態を表す解が二つずつ得られるが、式(27a)のように規格定数を正にとることで重複をさけている。このとき式(28)より $\omega_j$ が励起エネルギーに相当することがわかる。また式(10)より、 $u_0(\mathbf{r}) = -v_0(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|$ は式(25)の固有値 $\omega_0 = 0$ の解になっている。したがって、粒子は式(25)の一粒子状態に凝縮していることがわかる。 $\sum_j'$ はこの $(u_0, v_0)$ を除くことを意味している。

<sup>4</sup>複素固有値を含む場合は第3節で述べる。

## 2.4 定式化

この節の最後に、以後の議論で扱いやすいように必要な式をまとめておく。式 (2), (10) からトラップ中の BEC についての GP 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \frac{1}{2} M \omega_{\text{HO}}^2 (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} |\Psi|^2 - \mu \right] \Psi \quad (29)$$

と書ける。ただし、トラップ中心での Zeeman エネルギー  $-2\hbar\gamma_\mu B_0$  だけエネルギーのゼロ点をずらした。 $\lambda$  は  $r$  方向と  $z$  方向の閉じ込めの強さの比であり、第 1 節で紹介した IP トラップでは  $\lambda \ll 1$  となっている。しかし、秩序変数を 3 次元空間で取り扱うのは大変なので、ここでは  $\lambda \gg 1$  と想定して平べったいパンケーキ型の凝縮体を考え、秩序変数を 2 次元空間で扱うことにする。 $z$  方向の振動子のエネルギー準位間隔  $\lambda\hbar\omega_{\text{HO}}$  が相互作用エネルギーよりも十分大きい時、秩序変数の  $z$  依存性は一次元調和振動子の基底状態

$$\psi_z(z) = \left( \frac{\lambda}{2\pi a_{\text{HO}}^2} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\lambda}{4a_{\text{HO}}^2} z^2\right) \quad (30)$$

で近似できる。ただし  $a_{\text{HO}} \equiv \sqrt{\hbar/2M\omega_{\text{HO}}}$  と定義した。そこで秩序変数を  $\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \psi(x, y, t)\psi_z(z)$  とおいて式 (29) に代入し、 $z$  方向に積分すると、

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} M \omega_{\text{HO}}^2 (x^2 + y^2) - \mu + C \frac{4\pi\hbar^2 a}{M} |\psi|^2 \right] \psi \quad (31)$$

と書き換えられる。ここでは再び、 $z$  方向の調和振動子エネルギー  $\frac{1}{2}\lambda\hbar\omega_{\text{HO}}$  だけエネルギーのゼロ点をずらした。また、

$$C \equiv \frac{\int dz |\psi_z(z)|^4}{\int dz |\psi_z(z)|^2} = \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi a_{\text{HO}}^2}} \quad (32)$$

とおいた。 $\int dz |\psi_z|^2 = 1$  であることから  $\psi(x, y, t)$  は全粒子数で規格化されて、

$$\int \int dx dy |\psi(x, y, t)|^2 = N \quad (33)$$

となる。さらに変数変換

$$\omega_{\text{HO}} t \rightarrow t, \quad \left( \frac{x}{a_{\text{HO}}}, \frac{y}{a_{\text{HO}}} \right) \rightarrow (x, y), \quad \frac{a_{\text{HO}}\psi}{\sqrt{N}} \rightarrow \psi, \quad \frac{\mu}{\hbar\omega_{\text{HO}}} \rightarrow \mu \quad (34)$$

により変数を無次元化しておく。この変換により、無次元化した  $(x, y)$  空間での GP 方程式

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - \mu + \eta |\psi|^2 \right] \psi \quad (35)$$

が得られる。規格化は  $\int \int dx dy |\psi|^2 = 1$  となる。また、 $\eta = 8\pi a C N = 4\sqrt{\pi\lambda}(a/a_{\text{HO}})N$  は相互作用の強さを表す量で、粒子数  $N$  で決まることから実験的にも制御可能な量である。そこで以下では、 $\eta$  をパラメータとして渦の安定性について議論していく。

### 3 安定性解析

この節では、渦状態の微小な摂動に対する応答からその安定性について議論する。励起に複素固有値モードが現れることを確認し、その起源について考察する。本研究では複素固有値励起による渦の崩壊に関心があるため、絶対零度で全ての原子が凝縮状態にありエネルギーが保存した系を想定している。エネルギー散逸による崩壊は考えていない。

#### 3.1 複素固有値解と安定性

まず量子数  $L$  の渦糸を含んだ凝縮体の定常解を求め、そこからのゆらぎに対する応答を調べる。渦糸がトラップ中心に位置し凝縮体はその周りに軸対称であるとする、定常状態の秩序変数は

$$\psi_0(r, \theta) = A(r)e^{iL\theta}, \quad L = 0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

と書ける。超流動の流れる方向を決めて  $L \geq 0$  に限定したが、一般性は失われない。 $(r, \theta)$  は二次元極座標であり、また式 (35) より  $A(r)$  は

$$[\mathcal{D}(L) + \eta A(r)^2] A(r) = 0 \quad (37)$$

$$\mathcal{D}(L) \equiv -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{L^2}{r^2} + \frac{1}{4}r^2 - \mu \quad (38)$$

を満たす実関数である。化学ポテンシャル  $\mu$  は規格化条件

$$2\pi \int_0^\infty r dr \{A(r)\}^2 = 1 \quad (39)$$

により決まる。

BEC の安定性を調べるためには、この定常状態に微小な摂動加えて、その応答を見ればよい。まず、微小な複素関数  $f$  を用いて秩序変数を

$$\psi(r, \theta, t) = [A(r) + f(r, \theta, t)] e^{iL\theta} \quad (40)$$

と変形する。 $f$  が  $\theta$  に関して周期  $2\pi$  の周期関数であることを考慮すると、 $f$  はフーリエ級数を用いて

$$f(r, \theta, t) = \sum_{l=0,1,2,\dots} [u_l(r, t)e^{il\theta} + v_l^*(r, t)e^{-il\theta}]. \quad (41)$$

と展開できる。 $\psi(r, \theta, t)$  を式 (35) に代入して  $f$  について線形化すると、式 (35) の非線形項から  $l$  と  $-l$  の成分が相互作用することがわかり、 $(u_l, v_l)^T$  についての時間発展の方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_l \\ v_l \end{pmatrix} = \hat{\sigma} \hat{\mathcal{H}}_l \begin{pmatrix} u_l \\ v_l \end{pmatrix} \quad (42a)$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (42b)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_l = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(L+l) + 2\eta A^2 & \eta A^2 \\ \eta A^2 & \mathcal{D}(L-l) + 2\eta A^2 \end{pmatrix} \quad (42c)$$

が得られる。したがって、摂動に対する応答をみるには  $(u_l(r, t), v_l(r, t))^T = e^{-i\omega_l t} (u_l(r), v_l(r))^T = e^{-i\omega_l t} \mathbf{w}_l(r)$  とおいて、固有値方程式

$$\hat{\sigma} \hat{\mathcal{H}}_l \mathbf{w}_{ln}(r) = \omega_{ln} \mathbf{w}_{ln}(r) \quad (43)$$

の固有値  $\omega_{ln}$  について調べればよい。この固有値方程式の解は無限に存在するので、異なるモードを区別するために動径方向の励起準位を表す添え字  $n$  を付けてある。また、固有値  $\omega_{ln}$  は  $\mathbf{w}_{ln}$  の時間発展を表す固有振動数であって、励起エネルギーではない。後で述べるが一般的には励起エネルギーは式 (49) で与えられる。

$\omega_{ln}$  が実数であればそれに対応する摂動  $\mathbf{w}_{ln}$  の時間変化は定常で、増加も減少もしない。つまりこのような摂動に対して  $\psi_0$  は安定である。一方固有値が複素数であれば、摂動はその虚部の符号に応じて指数関数的に成長または減衰する。 $\hat{\sigma} \hat{\mathcal{H}}_l$  は非エルミート行列なので複素固有値解が存在してもよく、また式 (43) の複素共役を考えると、複素共役な固有解は常にペアとして存在することがわかる。これらに対応する摂動が加わると一方は成長し、もう一方は減衰する。成長するモードはたとえ無限小でも加わると指数関数的に成長し、秩序変数は  $\psi_0$  からどんどんずれていってしまう。したがって、複素固有値の存在は  $\psi_0$  自身が不安定であることを意味する。

以上のことから、ここでは固有値方程式 (43) の解集合の中に複素固有値が存在するかどうかという観点から  $\psi_0$  の安定性を議論する。

### 3.2 固有解の規格直交化

ここで、式 (43) の固有解の性質をまとめておく [26]。まず、式 (43) の固有解には位相の任意性があるが、固有値が実数である場合には  $\mathbf{w}_{ln}$  が実関数になるように位相を決めることにする。固有値が複素数である場合は  $\mathbf{w}_{ln}$  も複素関数になる。この位相については後で決める。

式 (43) の解である二つの固有モード  $\mathbf{w}_{lm, n}$  を考え、固有値をそれぞれ  $\omega_{lm, n}$  とする。 $\hat{\mathcal{H}}_l$  はエルミート演算子であり、 $\int_0^\infty r dr \mathbf{w}_{ln}^T \hat{\mathcal{H}}_l \mathbf{w}_{lm} = \int_0^\infty r dr \mathbf{w}_{lm}^T \hat{\mathcal{H}}_l \mathbf{w}_{ln}$  を満たすので、これと式 (43) を用いて関係式

$$(\omega_{lm} - \omega_{ln}) \int_0^\infty r dr \mathbf{w}_{ln}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_{lm} = 0 \quad (44)$$

が導かれる。したがって、二つの固有状態が異なる固有値を持つ場合 ( $\omega_{lm} \neq \omega_{ln}$ ) 二つの状態は直交する。つまり、直交化条件は

$$\int_0^\infty r dr \mathbf{w}_{ln}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_{lm} = \int_0^\infty r dr (u_{ln} u_{lm} - v_{ln} v_{lm}) = 0 \quad (45)$$

と書ける。特に、 $\tilde{\mathbf{w}}_l$  が複素固有値  $\tilde{\omega}_l$  を持つ場合、これと複素共役なモード  $\tilde{\mathbf{w}}_l^*$  は固有値  $\tilde{\omega}_l^*$  の固有モードとなる。 $\tilde{\omega}_l \neq \tilde{\omega}_l^*$  であることからこれらは直交して

$$\int_0^\infty r dr \tilde{\mathbf{w}}_l^{\dagger} \hat{\sigma} \tilde{\mathbf{w}}_l = \int_0^\infty r dr (|\tilde{u}_l|^2 - |\tilde{v}_l|^2) = 0 \quad (46)$$

となる。また、式 (44) から  $\int_0^\infty r dr \mathbf{w}_{ln}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_{ln}$  の値を

$$\left| 2\pi \int_0^\infty r dr \mathbf{w}_{ln}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_{ln} \right| = 1 \quad (47)$$

と規格化することができる。この積分値は、複素固有値モードに対しては一般に複素数になり、実固有値モードに対しても  $\mathbf{w}_{ln}$  の関数形によって符号が変わるので絶対値をつけてある。

ここで、Bogoliubov 方程式 (25) にもどって  $\mathbf{w}_{ln}$  の物理的意味を考えてみる。式 (43) は Bogoliubov 方程式 (25) に

$$u_j(\mathbf{r}) = e^{il\theta} u_{ln}(r), \quad v_j(\mathbf{r}) = e^{il\theta} v_{ln}(r), \quad \varphi(\mathbf{r}) = L\theta \quad (48)$$

を代入すると得られ、 $e^{il\theta} \mathbf{w}_{ln}$  が一粒子励起の波動関数になっていることがわかる。2.3 節で述べたように、Bogoliubov 方程式には等価な二つの固有解が存在する。ハミルトニアン  $\hat{H}$  の対角項  $\alpha_j^\dagger \alpha_j$  の係数が

$$\omega_j \int d\mathbf{r} (|u_j|^2 - |v_j|^2) \quad (49)$$

となることから、規格化条件 (27a) を満たすものを採用すれば固有値  $\omega_j$  を励起エネルギーとみなすことができ、かつ、重複をさけることができる。式 (43) の場合は  $l \geq 0$  に制限することで重複を避けているが<sup>5</sup>、 $\hat{\sigma} \hat{H}_{-l}$  についての固有値方程式を考えると

$$\hat{\sigma} \hat{H}_{-l} \begin{pmatrix} v_{ln} \\ u_{ln} \end{pmatrix} = -\omega_{ln} \begin{pmatrix} v_{ln} \\ u_{ln} \end{pmatrix} \quad (50)$$

が成り立つ。したがって

$$2\pi \int r dr (|u_{ln}|^2 - |v_{ln}|^2) < 0 \quad (51)$$

である場合には、 $\mathbf{w}_{ln}$  は角運動量  $-l$ 、励起エネルギー  $\varepsilon_{ln} = -\omega_{ln}$  の励起と見なされるべきである。そこで、実固有値をもつ解に対しては

$$2\pi \int_0^\infty r dr \{ \mathbf{w}_{ln}^u \}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_{ln}^u = 1 \quad (52a)$$

$$2\pi \int_0^\infty r dr \{ \mathbf{w}_{ln}^v \}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_{ln}^v = -1 \quad (52b)$$

とおき、規格化定数の符号によって  $\mathbf{w}_{ln}^u$  と  $\mathbf{w}_{ln}^v$  に分類することにする。このように定義すると、 $\mathbf{w}_{ln}^u$  は角運動量  $l$ 、励起エネルギー  $\varepsilon_{ln}^u = \omega_{ln}^u$  の励起、 $\mathbf{w}_{ln}^v$  は角運動量  $-l$ 、励起エネルギー  $\varepsilon_{ln}^v = -\omega_{ln}^v$  の励起に対応する。

一方、複素固有値をもつモードに関しては、式 (46)、(49) から励起エネルギーがゼロの励起であることがわかる。そのため、エネルギー保存系であるにもかかわらず時間発展で励起の増加・減少

<sup>5</sup>式 (41) 中の和の制限からくる。複素固有値モードについては規格化条件 (27a) が成り立たず、重複を避ける条件として使えないため、ここでは  $l \geq 0$  という制限により重複しないようにしている。

が可能となっている。同様に角運動量の保存を考えると、複素固有値モードは角運動量もゼロの励起となる。励起の角運動量を実固有値モードの時のようには定義できないのはこのためである。

最後に、規格直交条件が扱いやすくなるように複素固有値モードの位相を決めておく。実関数からなる二つのベクトル  $\mathbf{w}^{R,l}$  を用いて複素固有値モードを

$$\tilde{\mathbf{w}}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w}^R + i\mathbf{w}^l) \quad (53)$$

と書き、

$$2\pi \int_0^\infty r dr \{\mathbf{w}^R\}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}^R = -2\pi \int_0^\infty r dr \{\mathbf{w}^l\}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}^l = 1 \quad (54a)$$

$$2\pi \int_0^\infty r dr \{\mathbf{w}^R\}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}^l = 0 \quad (54b)$$

を満たすように  $\tilde{\mathbf{w}}_l$  の位相を決めることにする。この条件から複素固有値モード  $\tilde{\mathbf{w}}_l$  は確かに式 (46) を満たし、さらに

$$2\pi \int_0^\infty r dr \tilde{\mathbf{w}}_l^T \hat{\sigma} \tilde{\mathbf{w}}_l = 2\pi \int_0^\infty r dr \tilde{\mathbf{w}}_l^\dagger \hat{\sigma} \tilde{\mathbf{w}}_l = 1 \quad (55)$$

と規格化される。2つの複素固有値モード  $\tilde{\mathbf{w}}_l, \tilde{\mathbf{w}}_l^*$  はどちらも他の実固有値モードとは直交しているため、 $\mathbf{w}^{R,l}$  も実固有値モードと直交する。また、式 (52), (54a) を比較すると、実関数  $\mathbf{w}^{R,l}$  は固有解ではないが、それぞれ正と負の角運動量を持つ励起  $\mathbf{w}^{u,v}$  に対応していることがわかる。そこで、対応する準位  $m, n$  を適当に選んで  $\mathbf{w}^R \rightarrow \mathbf{w}_{ln}^u, \mathbf{w}^l \rightarrow \mathbf{w}_{lm}^v$  と書き、他の固有モードと同等に扱うことにする。

以上をまとめて書くと、

$$2\pi \int_0^\infty r dr \{\mathbf{w}_{ln}^u\}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_{ln}^u = -2\pi \int_0^\infty r dr \{\mathbf{w}_{lm}^v\}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_{lm}^v = \delta_{mn} \quad (56a)$$

$$2\pi \int_0^\infty r dr \{\mathbf{w}_{ln}^u\}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_{lm}^v = 0 \quad (56b)$$

となる。

### 3.3 励起スペクトル

まず解析的に扱える  $\eta = 0$  の場合について励起スペクトルの様子を調べておく。 $\eta = 0$  での平衡状態は  $D(L)A(r) = 0$  により決まる。この方程式の固有関数  $F_n^L(r)$  と固有エネルギー  $E_n^L$  は解析的に得られ、

$$F_n^L(r) = C_n^L r^{|L|} \mathcal{L}_n^{|L|}(r^2/2) e^{-r^2/4} \quad (57)$$

$$E_n^L = |L| + 2n + 1 \quad (58)$$

となる。 $\mathcal{L}_n^L(x)$  は一般化されたルジャンドル多項式であり、係数  $C_n^L$  は規格化条件  $2\pi \int r dr |F_n^L(r)|^2 = 1$  により決まる。平衡状態としては最低エネルギー状態をとり、 $A(r) = F_0^L(r) = C_0^L r^L e^{-r^2/4}$ ,  $\mu =$

$E_0^L = L + 1$  とおく。化学ポテンシャルの形からわかるように、渦度  $L$  が大きいほど渦のエネルギーは大きい。

式 (43) は  $\eta = 0$  では相互作用項が消えて、独立した二つの固有値方程式

$$\mathcal{D}(L+l)u_{ln} = \omega_{ln}u_{ln} \quad (59a)$$

$$\mathcal{D}(L-l)v_{ln} = -\omega_{ln}v_{ln} \quad (59b)$$

となる。この解は前述の固有解  $F_n^L(r)$  を用いて書け、 $u_{ln}(r) = F_n^{L+l}(r)$ ,  $v_{ln}(r) = F_n^{L-l}(r)$  となる。すなわち固有モードは

$$\mathbf{w}_{ln}^u = F_n^{L+l}(r) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_{ln}^v = F_n^{L-l}(r) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

と書ける。励起エネルギーと固有振動数はそれぞれ、 $\varepsilon_{ln}^u = \omega_{ln}^u = |L+l| + 2n - L$ ,  $\varepsilon_{ln}^v = -\omega_{ln}^v = |L-l| + 2n - L$  である。

$L = 4$ ,  $\eta = 0$  の場合の励起スペクトルを図 3 にプロットした。図からわかるように、 $1 \leq l \leq 2L-1$  では  $\varepsilon_{ln}^v < 0$  となるモードが存在する。これらのモードは励起の角運動量が負、つまり静止系からみて角運動量  $L-l$  で運動するような励起である。もとの角運動量  $L$  の状態と比較すると、 $|L-l| < L$  の場合は回転の運動エネルギーの分だけエネルギーが低くなる。これが負の固有エネルギーとして現れているのである。このような負の励起エネルギーをもつモードは散逸系においてはどんどん増大し、系の不安定性を引き起こす原因となる。しかし今は散逸のない系を考えており、3.1 節で述べたように固有値が実数であれば励起は定常なので不安定性の原因にはならない。

そこで、 $\eta$  を変えて複素固有値の現れる様子を調べることにする。 $\eta > 0$  について数値計算により GP 方程式 (37) と Bogoliubov 方程式 (43) を解き、励起スペクトルを求める。ここでも、量子数  $L = 4$  の渦を考えることにする。

Bogoliubov 方程式については、励起モードを  $\eta = 0$  での解析解を用いて

$$\mathbf{w}_{l\nu} = \sum_{n=0}^N \left[ \alpha_{l\nu n} F_n^{L+l}(r) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_{l\nu n} F_n^{L-l}(r) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (61)$$

と展開すると、式 (43) を  $(\alpha_{l\nu 0}, \beta_{l\nu 0}, \dots, \alpha_{l\nu N}, \beta_{l\nu N})$  に対する固有値方程式

$$\eta \sum_{m=0}^N \left[ 2 I_{nm}^{L+l, L+l} \alpha_{l\nu m} + I_{nm}^{L+l, L-l} \beta_{l\nu m} \right] + (E_n^{L+l} - \mu - \omega_{l\nu}) \alpha_{l\nu n} = 0 \quad (62a)$$

$$\eta \sum_{m=0}^N \left[ I_{nm}^{L-l, L+l} \alpha_{l\nu m} + 2 I_{nm}^{L-l, L-l} \beta_{l\nu m} \right] + (E_n^{L-l} - \mu + \omega_{l\nu}) \beta_{l\nu n} = 0 \quad (62b)$$

$$I_{nm}^{l, l'} \equiv 2\pi \int_0^\infty F_n^L(r) \{A(r)\}^2 F_m^{l'}(r) \quad (62c)$$

に書き直すことができる。ここで、 $n = 0, 1, \dots, N$  であり、 $A(r)$  と  $\mu$  は式 (37) の数値解である。式 (62) は  $2(N+1) \times 2(N+1)$  の行列を数値的に対角化することにより固有モードが計算できる。

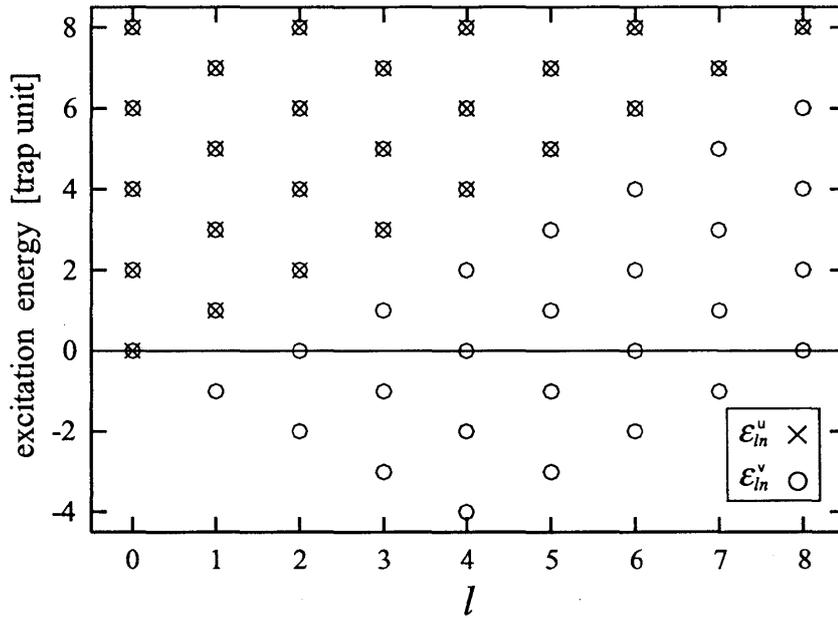


図 3: 量子数 4 の渦状態からの励起エネルギー。相互作用のない  $\eta = 0$  での  $l$  依存性を示している。縦軸は  $\hbar\omega_{HO}$  を単位としてプロットした。x, o はそれぞれ  $\mathcal{E}_{in}^u, \mathcal{E}_{in}^v$  を表し、 $1 \leq l \leq 7$  では  $\mathcal{E}_{in}^v < 0$  の負の励起エネルギーを持つモードが存在する。

その結果  $\eta = 0$  の場合と同様に  $1 \leq l \leq 7$  に対しては負のエネルギーを持つ励起が存在することがわかった。また、複素固有値モードは  $2 \leq l \leq 6$  で現れた。

図 4 には、 $0 \leq \eta \leq 4000$  の範囲で、複素固有値解が存在する領域にその虚部の絶対値をプロットした。この図は Pu らによる  $L = 2, 3$  の渦についての結果 [8] をよく再現している。複素固有値モードは必ず複素共役なペアで現れるので、図 4 中で  $|\text{Im} \omega|$  が有限のところには共役な二つの複素固有値解が存在することになる。図 4 から、複素固有値の現れ方の特徴をまとめておくと、まず、 $\eta$  空間で複素固有値の存在する領域と存在しない領域が交互に現れる。現れる間隔は  $l$  が 2, 3, 4 と増えるにしたがって細くなり、 $l = 5, 6$  では逆に疎になる。 $l = 3$  と 5 でだいたい現れる間隔が同じになっている。また  $l$  が大きくなるほど、複素固有値の虚部の絶対値は小さくなり、存在領域の幅は狭くなっていく。

固有エネルギーを  $\eta$  の関数としてプロットしてみると、複素固有値モードの起源を理解できる。図 5 に示した  $l = 2$  での励起スペクトルを用いて、これを説明する。図 5 (a), (b) には角運動量 2, -2 を持つモードの励起エネルギーを、それぞれ実線でプロットしている。 $l = 2$  の場合は常に励起エネルギーが負のモード  $\mathbf{w}_{20}^v$  が存在するので、その励起エネルギーの大きさ  $-\epsilon_{20}^v$  を図 5 (a), (b) 両方に破線で示している。また、複素固有値の現れるところでは、固有エネルギーの実部を点線でプロットした。複素固有値を持つモードは必ず共役なペアで現れるので、点線部分には複素共役な 2 つの励起が対応している。図 5 (a) を見ると、 $-\epsilon_{20}^v$  が他のスペクトルと交差するところで 2 つの実固有値モードが消え、代わりに複素固有値モードが現れている。一方、図 5 (b) では、 $-\epsilon_{20}^v$  以外のスペクトルは複素固有値には関与していない。つまり、条件  $\epsilon_{2n}^u + \epsilon_{20}^v = 0$  が満たされ

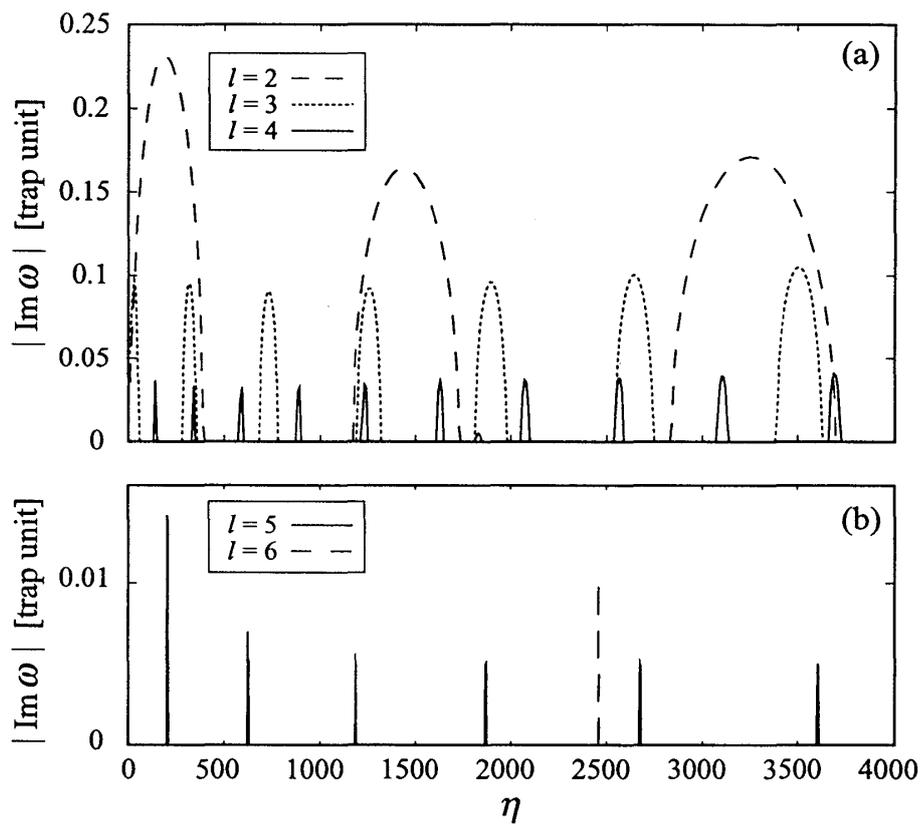


図 4: 複素固有値の虚部の  $\eta$  の依存性。  $l=6$  については、値が小さいため  $|100 \times \text{Im } \omega|$  をプロットした。図中で山ができていところには  $\text{Im } \omega \neq 0$  となる解、つまり複素固有値解が存在する。この  $\eta$  領域で存在する複素固有値は、すべて図中に示されている (3.4 節参照)。また  $l=1, 7$  では  $\eta$  領域を広げても複素固有値が現れることはない。

るときに複素固有値の現れていることがわかる。言いかえると、全角運動量と全エネルギーがともにゼロとなるような2つの励起モードが存在するとき、これらの2つのモードが組み合わさって二つの複素共役なモードとして現れる。全エネルギーがゼロになるためには、当然、2つのモードのうち一方は負の固有エネルギーを持つ必要があり、 $l=2$ の場合は  $\mathbf{w}_{20}^v$  がこれに相当する。もう一方のモードは角運動量が2であればよく、 $\varepsilon_{20}^v$  の変化にあわせて  $\mathbf{w}_{20}^u, \mathbf{w}_{21}^u, \mathbf{w}_{22}^u, \dots$  と順に変わっていく。そのため図4に示されるように、 $\eta$  空間で複素固有値の存在する領域が次々と現れることになる。

このような仕組みは、複素固有値モードのエネルギーと角運動量がともにゼロであるという3.2節で述べた性質をよく説明する。また、3.2節では複素固有値モードの実部と虚部をわけ  $\tilde{\mathbf{w}}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w}_{ln}^u + i\mathbf{w}_{lm}^v)$  と書くことにしたが、ラベル  $n, m$  については複素固有値モードと入れ替わる実固有値モードのラベルを使って表せばよい。例えば、 $\eta \sim 1200$  で2つの実固有値モード  $\mathbf{w}_{21}^u, \mathbf{w}_{20}^v$  が消えて複素固有値モードが現れているので、 $1200 \leq \eta \leq 1700$  での複素固有値モードは

$$\tilde{\mathbf{w}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w}_{21}^u + i\mathbf{w}_{20}^v), \quad \tilde{\mathbf{w}}_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w}_{21}^u - i\mathbf{w}_{20}^v) \quad (63)$$

と書ける。ただし、複素固有値が存在する場合の系の固有解は  $\tilde{\mathbf{w}}_2, \tilde{\mathbf{w}}_2^*$  であって  $\mathbf{w}_{21}^u, \mathbf{w}_{20}^v$  ではないことに注意しなくてはならない。

またこのように書くと、Bogoliubov ハミルトニアン (22) は共鳴状態にある2つのモードの対生成・対消滅を含んだ形になる。励起モード  $\mathbf{w}_{ln}^u$  に対応する準粒子の生成演算子を  $\alpha_{\lambda ln}^\dagger$  とし、式 (63) で書けるような複素固有値  $\tilde{\omega}_2$  を持つモードが存在する場合を考える。ここでは結果だけ示すと、ハミルトニアン (22) は

$$\begin{aligned} \hat{K}_B = E_0 + \sum' \varepsilon_{ln}^\lambda \alpha_{\lambda ln}^\dagger \alpha_{\lambda ln} \\ + \text{Re} \tilde{\omega}_2 \left( \alpha_{u21}^\dagger \alpha_{u21} - \alpha_{v20}^\dagger \alpha_{v20} - 1 \right) + \text{Im} \tilde{\omega}_2 \left( \alpha_{u21}^\dagger \alpha_{v20}^\dagger + \alpha_{u21} \alpha_{v20} \right) \end{aligned} \quad (64)$$

となる。ただしここでの  $\sum'$  は凝縮体自身に対応するモードおよび  $(\lambda, l, n) = (u, 2, 1), (v, 2, 0)$  については和をとらないこと意味している。式 (64) から、励起モード  $\mathbf{w}_{21}^u, \mathbf{w}_{20}^v$  の対生成と対消滅が起こり、これが系の不安定化の引き起こしていることがわかる。

### 3.4 負の励起エネルギーの $\eta$ 依存性

ここまでの議論から、複素固有値モードが出現するためには全角運動量と全エネルギーがともにゼロとなるような2つの励起モードが必要で、これらの2つのモードが組み合わさって2つの複素共役なモードとして現れることがわかった。全エネルギーがゼロになるためには一方の励起エネルギーが負である必要があり、その値が  $\eta$  を変えたときにどう変わるかをみれば、複素固有値が現れるかがわかる。そこで、この節では負の固有エネルギーの  $\eta$  依存性の定性的な振る舞いについて考えることにする。

図6には  $l=1 \sim 7$  のエネルギースペクトルをプロットした。線の意味は図5(a)と同じである。図4と比べてみると、図6で破線と実線が交差する場所には必ず複素固有値解が存在してい

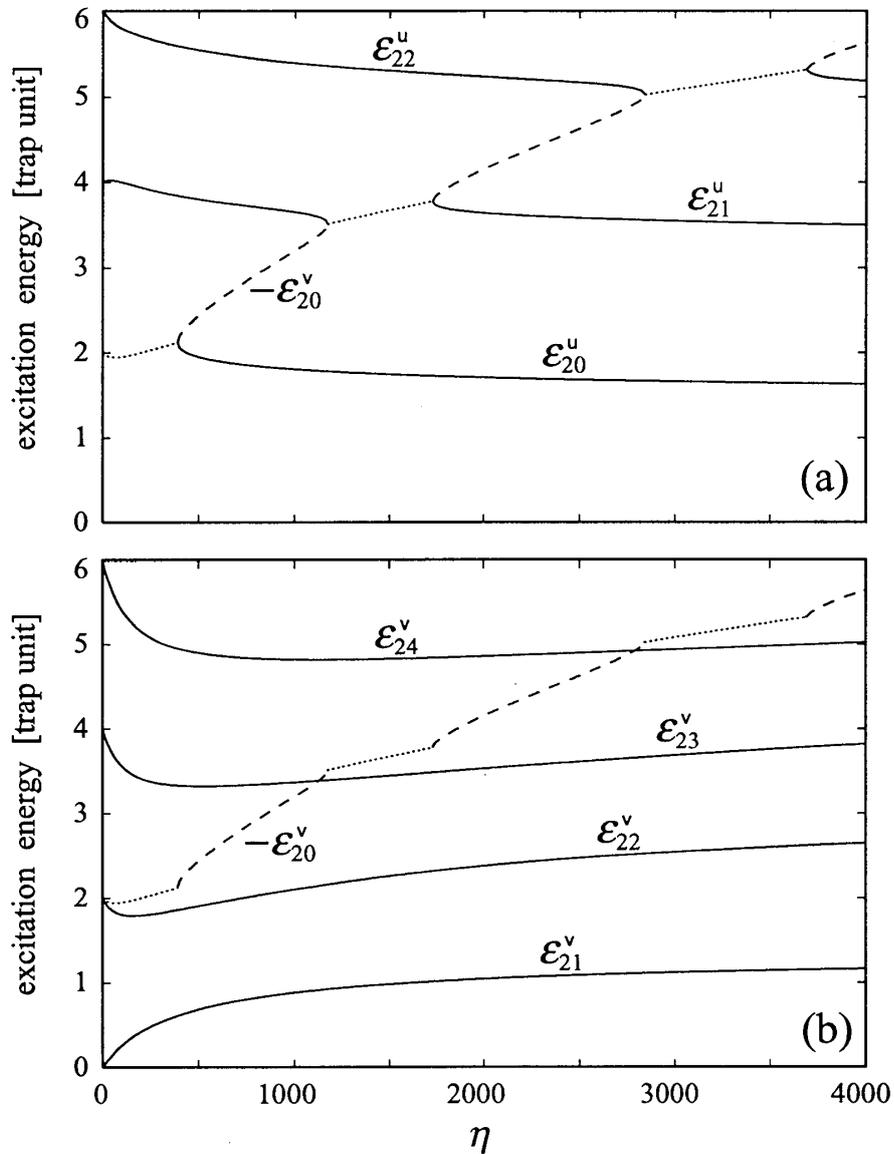


図 5:  $l=2$  の励起スペクトルの  $\eta$  依存性。正負の励起エネルギーと複素固有値の実部をまとめてプロットした。実線は正の励起エネルギーを示し、(a) には角運動量 2 の励起、(b) には角運動量  $-2$  の励起についてプロットした。各励起スペクトルには、動径方向の量子数  $n$ 、角運動量の絶対値  $l$ 、角運動量の符号を表す記号  $u, v$  により  $\epsilon_{ln}^{u,v}$  とラベルを付けている。 $l=2$  の場合には負の励起エネルギー  $\epsilon_{20}^v$  が存在するので (a), (b) 両方に破線で  $-\epsilon_{20}^v$  をプロットしている。また、複素固有値が現れるところでは点線でその実部を示している。(a) から、 $\epsilon_{2n}^u + \epsilon_{20}^v = 0$  となるところで複素固有値が出現しているのがわかる。

ることを確認できる。逆に言うと、 $0 \leq \eta \leq 4000$  の範囲で現れる複素固有値は図 4 に示されているものがすべてで、他には存在しない。

図 6 を見ると、どの  $l$  に対しても正の固有エネルギーは同じような振る舞いをしているのに対し、負の固有エネルギーはこれらとは異なる  $\eta$  依存性を示している。そのため、 $\eta$  の変化とともにスペクトルの交差が次々と起こり、複素固有値モードがいくつも現れることになる。また、負のエネルギーの  $\eta$  依存性は  $\{l, n\}$  によっても異なっている。たとえば  $l=4$  での最低の励起エネルギー  $\varepsilon_{40}^v$  は  $\eta$  の関数としてみたときに傾きが大きく、次々と  $\varepsilon_{4n}^u$  と交差して細かい間隔で複素固有値が現れる。それに対して  $l=2$  での  $\varepsilon_{20}^v$  や、 $l=4$  でも一つ上の励起エネルギー  $\varepsilon_{41}^v$  は  $\eta$  に関して緩やかな減少関数なので、複素固有値の現れる間隔は疎になる。さらに、 $\eta=0$  で負になっているものでも、 $\{\varepsilon_{10}^v, \varepsilon_{31}^v, \varepsilon_{51}^v, \varepsilon_{70}^v\}$  は  $\eta$  に関して増加関数であるために他のスペクトルと交差することがなく、複素固有値モードを作らない。

これらの定性的な振る舞いは、有効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}}(\pm l, r) = \frac{1}{4}r^2 + \frac{(L \pm l)^2}{r^2} + 2\eta A(r)^2 - \mu \quad (65)$$

を考えれば説明できる。これは、式 (43) で  $(u, v)$  の一方をゼロと近似した場合に、角運動量  $\pm l$  をもつ励起成分に働くポテンシャル項である。第一項はトラップポテンシャル、第二項は角運動量に依存した遠心力ポテンシャルを表している。また斥力相互作用のため凝縮体の密度分布はポテンシャルとして働く。これが第三項である。 $A(r)$  として渦状態を考えると、渦心はポテンシャル井戸をつくる。一方、遠心力ポテンシャルの項は  $|L \pm l|$  が大きくなるにつれて、ポテンシャル井戸の幅を小さくするよう働く。したがって角運動量が負の励起に対しては、ポテンシャル井戸が深く、そこに束縛された状態が負の励起エネルギーモードとして現れている [18]。これに対して、正の励起エネルギーを持つ状態はトラップ内に広がった (散乱) 状態にあたり、両者は異なった  $\eta$  依存性を示すことになる。

$\eta$  の変化に伴って、負の固有値モードには 2 つの効果が考えられる。(1)  $\eta$  が増加すると、相互作用エネルギーが増加して化学ポテンシャルが大きくなる。そのため、ポテンシャル井戸は深くなり束縛状態のエネルギーは低くなる。(2) 一方渦芯のサイズは、2.2 節で述べたように式 (19) のコヒーレンス長で決まり、粒子数密度が大きくなるほど渦芯のサイズは小さくなる。 $\eta$  はトラップ中の粒子数に比例する量だったので、 $\eta$  の増加とともにポテンシャル井戸の幅が狭くなり、束縛状態のエネルギーは高くなる。負の励起エネルギーの振る舞いはこの 2 つの効果のバランスでできる。例として、 $\eta = 300, 1000, 3000$  の場合について有効ポテンシャル  $V_{\text{eff}}(-l, r)$  を図 7 に示した。図から確かに  $\eta$  が増えるにつれて、ポテンシャル井戸が深く、かつ狭くなっていく様子が確認できる。

$l=4$  の場合は、もともとポテンシャル井戸の幅が広いために (2) の効果はあまり効かず、 $\eta$  の増加とともに負の励起エネルギーは急激に減少する。それに対して、 $l=1$  場合はもともとポテンシャル井戸の幅が狭いため、(2) の効果が強く負の励起エネルギーは増加する一方となっている。また  $\varepsilon_{20}^v$  と  $\varepsilon_{60}^v$ 、 $\varepsilon_{30}^v$  と  $\varepsilon_{50}^v$  がそれぞれ同じような  $\eta$  依存性を示すのも  $|L-l|$  が等しいことを考えれば理解できる。

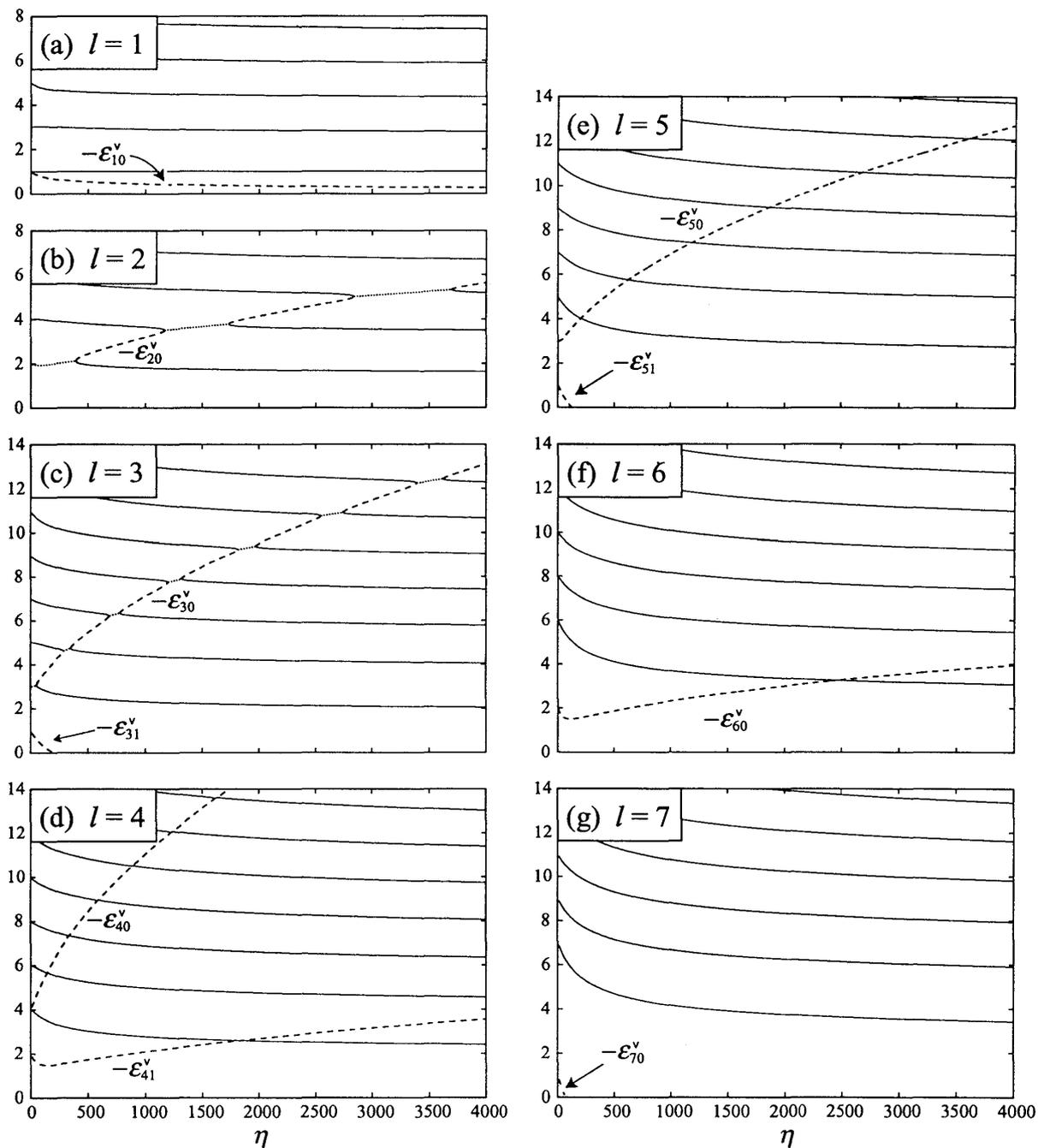


図 6: 励起スペクトルの  $\eta$  依存性。(a)~(g) の順に  $l = 1 \sim 7$  のスペクトルを示す。縦軸は  $\hbar\omega_{\text{HO}}$  を単位とした励起エネルギーである。各図には正の角運動量を持つモードの励起エネルギー  $\mathcal{E}_{ln}^u$  を実線で、負の励起エネルギーは符号を変えて破線でプロットしている。図 4 と比較すると、破線と実線が交差しているところでは必ず複素固有値が現れていることがわかる。実線はほぼ等間隔で平行になっているのに対し、破線の傾きはそれとは大きく異なるために、 $\eta$  を変えると次々と複素固有値が現れることになる。

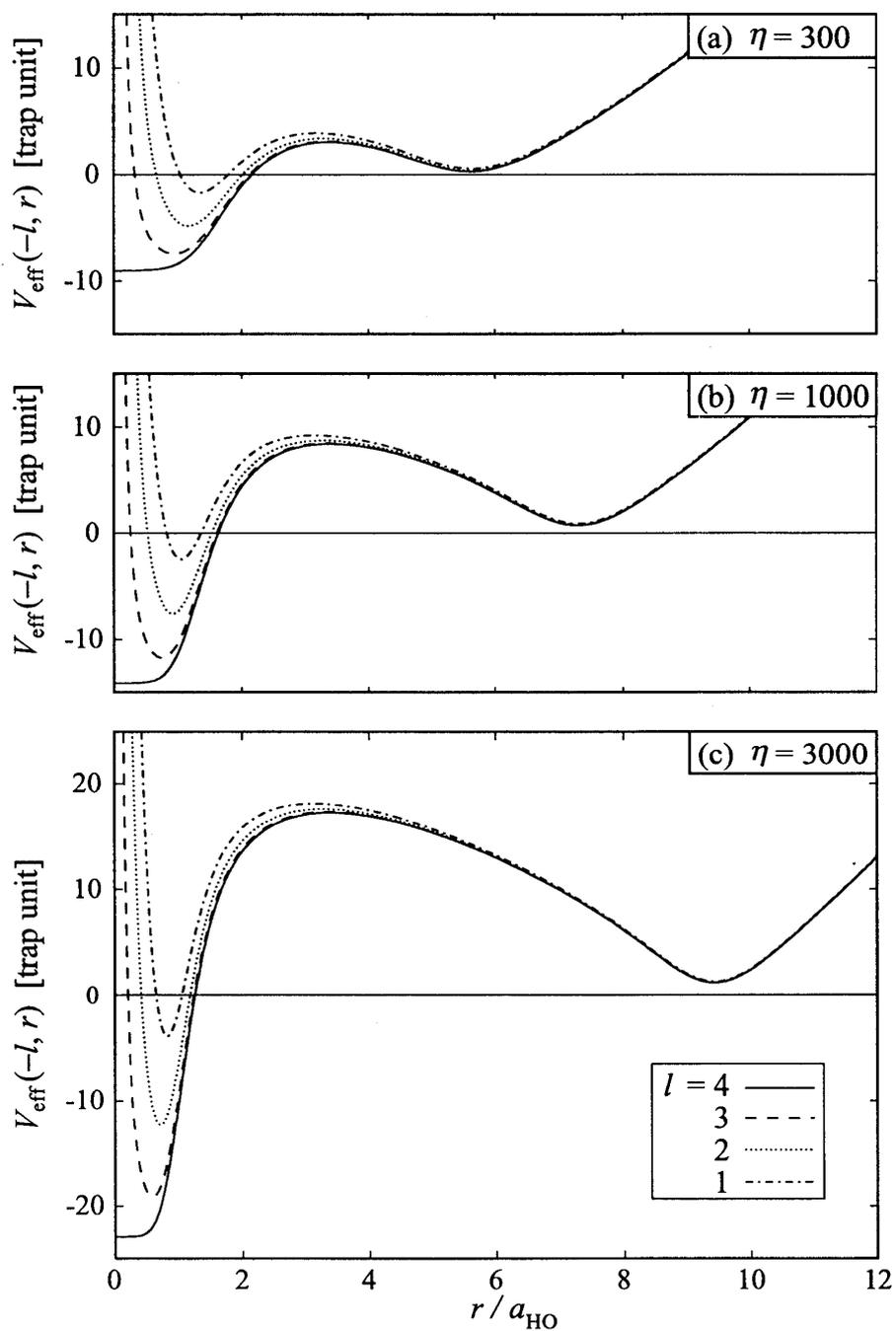


図 7: 有効ポテンシャルの変化。負の角運動量に対する有効ポテンシャル  $V_{\text{eff}}(-l, r)$  のみを考えており、 $l = 1 \sim 4$  について、(a)~(c) の順に  $\eta = 300, 1000, 3000$  でのポテンシャルをプロットした。 $\eta$  の増加にしたがって、ポテンシャル井戸が深く狭くなっていく様子がわかる。

## 4 渦の分裂の動力学

前節の議論から、Bogoliubov 方程式に複素固有値解が存在する場合は系が不安定になり、また実際に量子数  $L = 4$  の渦について解くと、 $\eta$  の値に依存して複素固有値解が現れることをみた。そこでこの節では、複素固有値解が存在する場合に、具体的にどのような不安定化が起こるかについて考える。

### 4.1 渦の分裂パターン

まず、摂動が加わった時の BEC の構造について考えよう。固有モード  $w_l$  の摂動が加えられた時、波動関数は微少な実定数  $\delta$  を用いて、

$$\psi = \left[ A(r) + \delta \left( u_l e^{il\theta} + v_l^* e^{-il\theta} \right) \right] e^{iL\theta} \quad (66)$$

とかける。平衡状態での渦芯構造は、式 (21) より  $r \rightarrow 0$  で

$$A(r) \approx r^L \quad (67)$$

と書ける。Bogoliubov 方程式についても同様に  $r \rightarrow 0$  での振る舞いをみると、GP 方程式との類似性から、渦芯付近の構造が

$$u_l(r) \approx r^{|L+l|}, \quad v_l(r) \approx r^{|L-l|} \quad (68)$$

となることがわかる。したがって、摂動が加わった波動関数を  $r$  で展開すると、最低次は

$$\psi \sim \delta r^{|L-l|} e^{i(L-l)\theta} \quad (69)$$

という形になる。つまり、量子数  $L-l$  の渦が中心に位置することになる。一方、粒子数密度を  $\delta$  で展開した形

$$|\psi(r, \theta)|^2 = A^2 + 2A\delta [\operatorname{Re}(u_l + v_l) \cos(l\theta) - \operatorname{Im}(u_l + v_l) \sin(l\theta)] \quad (70)$$

からは、凝縮体の粒子数密度が  $l$  回対称であることがわかる。以上のことから角運動量の保存を考慮すると、渦芯構造の変形について、

- (I) 中心の渦は量子数  $L-l$  にかわる。
- (II) 量子数 1 の  $l$  個の渦が (I) の渦の周りに  $l$  回対称に現れる。

という法則が得られる。これにしたがって分裂の様子を図示すると、図 8 のようになる。たとえば  $L = 4$  の渦で  $l = 3$  の固有モードが加わると 4 つの量子数 1 の渦に分裂し、一つはトラップ中心に、他の三つはその周りに三角形をつかって並ぶことになる。

ここで注意しておくが、摂動が加わると実固有値モード、複素固有値モードにかかわらず上記の法則にしたがって渦芯が変化をうける。したがって摂動が加わると必ず渦は「分裂」することになる。しかし、 $\delta$  が小さいと個々の渦を区別できず、粒子数分布では何も起こっていないように見える。以下では、粒子数分布から個々の渦がはっきり認識できる場合にのみ「分裂」と呼ぶことにする。微少な摂動から渦の分裂を引き起こせるのは、エネルギー保存系においても成長が可能な複素固有値モードだけである。

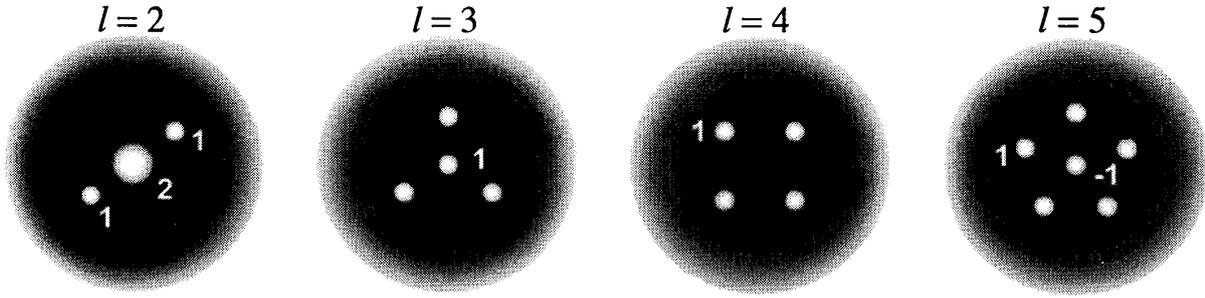


図 8:  $l$  の値による分裂パターン分類。中心に量子数  $|L-l|$  の渦、その周りに  $|l|$  個の量子数 1 の渦が並ぶ。非常に起こりにくいだが、 $l=5$  の励起は中心に逆向きの渦が現れることになる。

## 4.2 励起モードへの射影

次の 4.3 節では渦の分裂過程の数値シミュレーションについて述べるが、シミュレーション結果から各時刻での励起モードの混ざり具合を調べるために、秩序変数を励起モードへ射影する方法をここで前もって述べておく。

まず、秩序変数に含まれる励起モードを角運動量  $l$  で分けて、

$$\psi(r, \theta, t) = \gamma_0(t)A(r)e^{iL\theta} + \sum_l \left[ u_l(r, t)e^{il\theta} + v_l^*(r, t)e^{-il\theta} \right] e^{iL\theta} \quad (71)$$

と展開する。逆に、 $(u_l, v_l)$  は秩序変数  $\psi(r, \theta, t)$  を用いて

$$u_l(r, t) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \psi(r, \theta, t) e^{-i(L+l)\theta}, \quad (72a)$$

$$v_l(r, t) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \psi^*(r, \theta, t) e^{i(L-l)\theta}. \quad (72b)$$

とかける。さらに、 $\mathbf{w}_l(r, t)$  を各  $l$  についての式 (43) の固有解で展開し、

$$\mathbf{w}_l(r, t) = \sum_{\lambda=u, v} \sum_{n=0, 1, 2, \dots} \gamma_{ln}^\lambda(t) \mathbf{w}_{ln}^\lambda(r) \quad (73)$$

と書く。ただし固有解の中に複素固有値モード  $\tilde{\mathbf{w}}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w}_{ln}^u + i\mathbf{w}_{lm'}^v)$  を含む場合は、 $\tilde{\mathbf{w}}_l, \tilde{\mathbf{w}}_l^*$  の代わりに  $\mathbf{w}_{ln}^u, \mathbf{w}_{lm'}^v$  を用いて展開する。そうすると、規格直交条件 (56) を用いてこの係数は

$$\gamma_{ln}^u(t) = 2\pi \int r dr \{ \mathbf{w}_{ln}^u(r) \}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_l(r, t) \quad (74a)$$

$$\gamma_{ln}^v(t) = -2\pi \int r dr \{ \mathbf{w}_{ln}^v(r) \}^T \hat{\sigma} \mathbf{w}_l(r, t) \quad (74b)$$

とかける。また、複素固有値モード  $\tilde{\mathbf{w}}_l, \tilde{\mathbf{w}}_l^*$  の割合  $\tilde{\gamma}_l^A, \tilde{\gamma}_l^B$  は式 (74) で求まる  $\gamma_{ln}^u, \gamma_{lm'}^v$  を用いて

$$\tilde{\gamma}_l^A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_{ln}^u + i\gamma_{lm'}^v) \quad (75a)$$

$$\tilde{\gamma}_l^B = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_{ln}^u - i\gamma_{lm'}^v) \quad (75b)$$

と計算できる。

Bogoliubov 理論が有効な線形近似の範囲内では、実固有値モードについての  $\gamma_{ln}^{u,v}$  はその固有周波数  $\omega_{ln}^{u,v}$  で振動し、

$$\gamma_{ln}^{u,v}(t) \propto \exp(-i\omega_{ln}^{u,v}t) \quad (76)$$

となる。したがってその振幅は一定である。一方複素固有値モード  $\tilde{w}_l, \tilde{w}_l^*$  の固有値を  $\tilde{\omega}_l, \tilde{\omega}_l^*$  とすると、その割合  $\tilde{\gamma}_l^A, \tilde{\gamma}_l^B$  は

$$\tilde{\gamma}_l^A(t) \propto e^{-i\tilde{\omega}_l t} = \exp[-i(\operatorname{Re}\tilde{\omega}_l)t + (\operatorname{Im}\tilde{\omega}_l)t] \quad (77a)$$

$$\tilde{\gamma}_l^B(t) \propto e^{-i\tilde{\omega}_l^* t} = \exp[-i(\operatorname{Re}\tilde{\omega}_l)t - (\operatorname{Im}\tilde{\omega}_l)t] \quad (77b)$$

と時間変化する。ここで  $\tilde{\gamma}_l^A, \tilde{\gamma}_l^B$  が複素共役な関係ではないということに注意しなくてはならない。このために振幅  $|\tilde{\gamma}_l^{A,B}|$  の時間変化を考えると一方が成長、もう一方は減衰することになる。

### 4.3 渦分裂の数値シミュレーション

時間発展の GP 方程式を用いて数値シミュレーションを行い、複素固有値モードが実際にどのような不安定化を起こしているかを調べてみよう。

まず、式 (37) の定常解がある  $\eta$  に対して数値的に求める。この状態からの時間発展をシミュレーションするのであるが、式 (37) の解は何も摂動を加えないままでは (数値的には) 定常なままなので、適当な摂動をパルス的に加えて渦の変化を調べることにする。ここでは  $l_v$  回対称な摂動により外部ポテンシャルを、短時間<sup>6</sup>

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4}r^2 [1 + \delta \cos(l_v \theta)] \quad (78)$$

と変形することにする。このように摂動の対称性を決めることによって、 $l = l_v$  のモードが選択的に励起される。また  $\delta$  は十分小さくとり、摂動を切った直後では渦構造に明確な変化は現れないように注意した。得られた秩序変数の時間変化から、4.2 節で述べた方法により各励起モードの割合  $\gamma_{ln}^\lambda$  を求め、その時間変化を調べた。

図 9 には図 4 (a) の  $0 \leq \eta \leq 1000$  の領域を拡大してプロットしてある。この中で、複素固有値の存在しない場合 ( $\eta = 500$ )、 $l = 2, 3, 4$  の複素固有値が単独で存在する場合 ( $\eta = 200, 730, 590$ )、および 3 種類の複素固有値が共存する場合 ( $\eta = 340$ ) について、それぞれ時間発展の様子を調べた。 $l = 5, 6$  の複素固有値モードについては、複素固有値の虚部が非常に小さく存在領域も狭いため現実には非常に起こりにくいと考え、ここここでは  $l = 2, 3, 4$  のモードのみ考えることにする。

まず、 $\eta = 500$  にとり複素固有値が存在しない場合、つまりすべての励起モードが実固有値を持つ場合について調べた結果、渦芯の構造には変化がみられず、 $|\gamma_{ln}^\lambda|$  も定常なままであることが確認できた。これは線形近似の結果とよく一致する。この結果は摂動の対称性  $l_v$  を変えても同じであった。

<sup>6</sup>ここでは  $1/\omega_{HO}$  程度にとった。

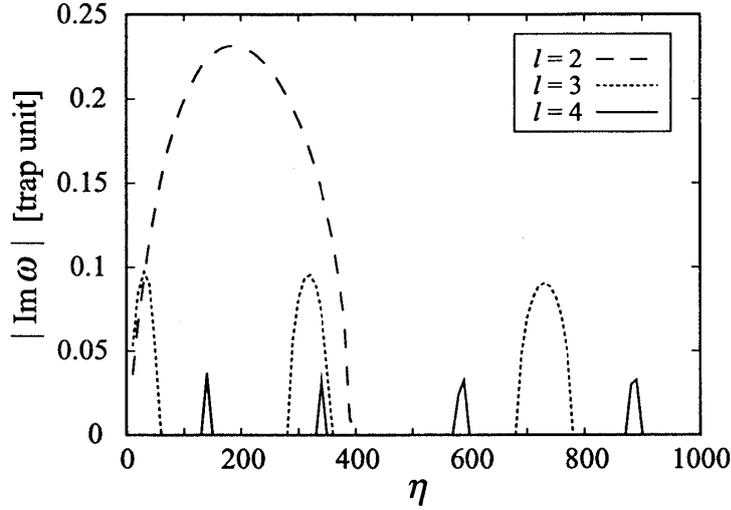


図 9: 図 4 (a) の拡大図。複素固有値の存在しない場合 ( $\eta = 500$ )、 $l = 2, 3, 4$  の複素固有値が単独で存在する場合 ( $\eta = 200, 730, 590$ )、および 3 種類の複素固有値が共存する場合 ( $\eta = 340$ ) について、それぞれ数値シミュレーションにより時間発展の様子を調べた。

次に、複素固有値モードが単独で存在する領域で、渦構造の時間変化を調べた。その典型例として、ここでは  $\eta = 730$  の結果を示す。 $\eta = 730$  では  $l = 3$  の複素固有値モードが存在し、図 6 (c) から  $\tilde{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w}_{33}^u + i\mathbf{w}_{30}^v)$  と表されることがわかる。この複素固有値モードに合わせて  $l_v = 3$  の摂動を加えた後の  $\gamma_{ln}^\lambda$  の変化を図 10 に示す。(  $\eta = 730$  で  $l_v \neq 3$  の場合には複素固有値モードが励起されず、 $\eta = 500$  の場合と同様励起されたモードは定常なままであった。) 図 10 (a) には摂動を加えた直後の様子をプロットしているが、すべての励起モードの振幅が小さい間は時間変化は線形近似で得られるものと一致することがわかる。つまり、複素固有値モードの割合  $|\tilde{\gamma}_3^{A,B}|$  はそれぞれ  $\exp(\pm \text{Im} \tilde{\omega}_3 t)$  で変化し、一方、実固有値モードの振幅は一定になっている。さらに長時間発展させた様子が図 10 (b) である。複素固有値モードの一方 ( $|\tilde{\gamma}_3^A|$ ) が成長し線形近似の範囲を超えると成長は途中でとまり、代わりにこれと複素共役なモード ( $|\tilde{\gamma}_3^B|$ ) が成長しはじめる。この 2 つのモードは互いに相互作用しながら振動する。またこれらのモードが増加すると、非線形効果により他の励起モードも次第にふえてくる。このとき、複素固有値モードとの相関が強い  $l = l_v$  のモードが選択的に増加する。(ただし、 $l_v = 2$  の場合は、非線形効果により  $l = 4$  の実固有値モードも成長する。)

また、図 11 (a), (b), (c) には図 10 中の点 A, B, C での凝縮体の様子を示した。摂動を加えた直後は図 11 (a) にあるように渦の形状にはほとんど変化が見られない。しかし、しばらく時間がたつて  $|\tilde{\gamma}_3^A|$  が大きくなると、図 11 (b) にみられるように渦は分裂して三回対称な配置をとる。2 つの複素共役なモードの相互作用は、これらの分裂した渦間距離の振動という形で現れる。図 11 (b) で分裂した渦は、 $|\tilde{\gamma}_3^{A,B}|$  の入れ替わる点 C では図 11 (c) でみられるように再び中心に集まりひとつになろうとしている。その後は複素固有値モードの振幅の振動に対応して、図 11 (b), (c) の状態を行き来する。しかし、この振動の中で、いったん 4 つの渦に分裂した後は量子数 4 の渦に戻

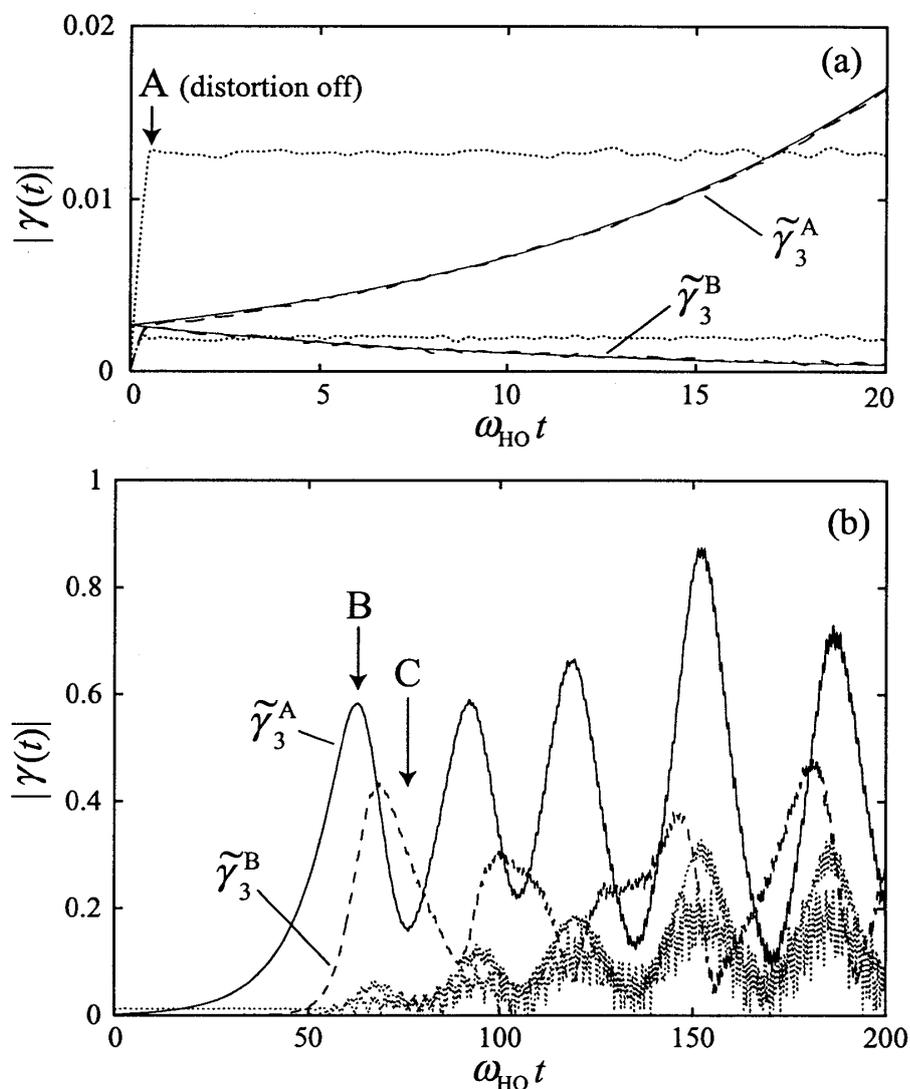


図 10: 励起モードの割合の時間変化。(a) は摂動を加えた直後の様子を示している。点 A で摂動を切った。破線は複素固有値モードの割合 ( $|\tilde{\gamma}_3^{A,B}|$ ) を表し、 $\exp(\pm \text{Im}\tilde{\omega}_3 t)$  をプロットした実線と一致している。実固有値モードについてはいくつか例として点線でプロットしており、摂動を切った後は一定値になっていることがわかる。(b) はさらに時間のばして変化を追った様子を示す。複素共役な 2 つのモードの割合を表す  $|\tilde{\gamma}_3^A|, |\tilde{\gamma}_3^B|$  をそれぞれ実線と破線で示している。途中から  $\exp(\pm \text{Im}\tilde{\omega}_3 t)$  の形をはずれて両者が振動を始める。点線は実固有値モードの割合で、 $|\tilde{\gamma}_3^{A,B}|$  が大きくなり振動を始めるとその影響を受けて次第に増加する。点 A, B, C での凝縮体の密度分布は図 11 に示す。

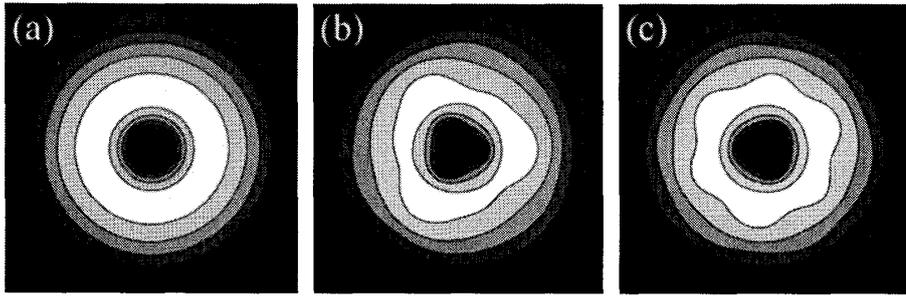


図 11: 図 10 中の (a) 点 A, (b) 点 B, (c) 点 C に対応する凝縮体の粒子数分布。白が粒子数密度の大きい領域、黒が小さい領域を表す。摂動を切った直後の (a) では密度分布は定常な分布からほとんど変化をうけていないが、複素固有値モードが成長した (b) では渦が 4 つに分裂して、三回対称な形に並んでいる。また複素固有値モードの振動にあわせて、(c) のように渦が再び中心に集まろうとする様子が見られる。

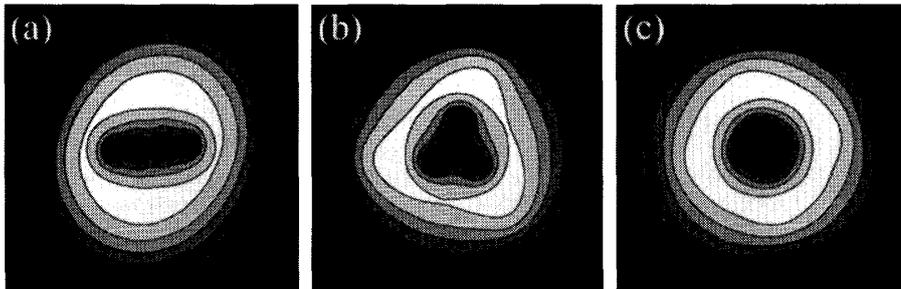


図 12:  $l = 2, 3, 4$  の複素固有値が共存する  $\eta = 340$  での分裂の様子。加えた摂動は (a)  $l_v = 2$ 、(b)  $l_v = 3$ 、(c)  $l_v = 4$  である。これより分裂パターンは  $l_v$  によって選択できることがわかる。

る事はない。さらに時間を進めると、非線形効果により励起された実固有値モードのために、分裂した渦の平均的な渦間距離は次第に離れ、中心の渦は細かい振動を始めた。凝縮体の外形も次第にひずんでいった。

さらに、我々は複数の複素固有値モードが共存する領域での振る舞いも調べた。図 12 には  $l = 2, 3, 4$  の複素固有値モードが共存する  $\eta = 340$  での結果を示す。(a), (b), (c) は、それぞれ  $l_v = 2, 3, 4$  の摂動を加えた後の分裂の様子である。それぞれ、 $l_v$  回対称な形で渦が整列している。このことから、複素固有値モードが共存している場合には、加える摂動の対称性によって分裂パターンを選択できる事がわかる。ただし、時間発展の時定数は複素固有値の虚部の逆数で決まっており、ランダムなノイズが与えられたときには  $\text{Im} \tilde{\omega}_l$  の大きい  $l = 2$  の分裂がみられるであろう。また、 $l = 2$  の場合については、中心に出来た量子数 2 の渦も不安定であるようで、密度分布からは量子数 2 の渦は確認できず、分裂がはっきりみとれる状況では図 12 (a) のように量子数 1 の渦が直線上に並ぶ様子がみられた。

## 5 まとめ

本稿では、量子数 4 の渦の分裂過程について考察した。特に、エネルギー散逸のない状況でも不安定性を引き起こしうる複素固有値励起について調べた。

複素固有値を持つモードは、励起エネルギーとしてはゼロの状態であり、そのためにエネルギーを保存したままでも成長することが可能となっている。複素固有値モードの出現には、全角運動量と全エネルギーがともにゼロとなるような 2 つの励起モードが必要で、これらが組み合わさって、2 つの複素共役なモードとして現れることがわかった。このとき、2 つのモードの一方が負の励起エネルギーを持つモードでなくてはならない。負の励起エネルギーの  $\eta$  依存性を定性的に説明し、複素固有値の現れ方が励起の角運動量  $l$  によって異なることを示した。

また、複素固有値モードにより凝縮体の分布がどのような変形を受けるかを考察した。分裂の形状を分類すると、図 8 のようになる。さらに、GP 方程式の数値シミュレーションにより、実際に微少な摂動を加えた後の凝縮体の時間変化を調べた。その結果、時間変化は線形近似から得られるものとよく一致し、励起モードがすべて実固有値を持つ場合は、凝縮体はほとんど変化を受けないままであった。しかし複素固有値モードが存在すればそれが指数関数的に成長して渦は分裂した。また、線形近似の範囲内では、成長の時定数は複素固有値の虚部で決まるものであるが、非線形効果により他のモードも増幅されて、次第に複雑な渦の運動に変わっていった。

本研究で特に注目したいのが、複素固有値モードが現れるかどうかはトラップされている原子の数に依存しているため、それを変えることで、様々な (量子数 4 の渦の場合は主に 3 通り) の分裂パターンが観測されるという点である。また、複数の複素固有値モードが共存している場合には、加える摂動によって起こりうる不安定化を制御できる。渦の分裂を実験的に制御できるという非常に興味深い結果である。

## 謝辞

本稿での議論は、著者の大学院での研究 [10] であり、指導教官である大見哲巨教授に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] T. Ohmi and K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn. **67** (1998) 1822.
- [2] T.-L. Ho, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 742.
- [3] 中原幹夫、大見哲巨, 日本物理学会誌 **57** (2002) 188.
- [4] M. Nakahara, T. Isoshima, K. Machida, S. Ogawa, and T. Ohmi, Physica B **284** (2000) 17.
- [5] T. Isoshima, M. Nakahara, T. Ohmi, and K. Machida, Phys. Rev. A **61** (2000) 063610.

- [6] A. E. Leanhardt, A. Görlitz, A. P. Chikkatur, D. Kielpinski, Y. Shin, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 190403.
- [7] Y. Shin, M. Saba, M. Vengalattore, T. A. Pasquini, C. Sanner, A. E. Leanhardt, M. Prentiss, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 160406.
- [8] H. Pu, C. K. Law, J. H. Eberly, and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. A* **59** (1999) 1533.
- [9] M. Möttönen, T. Mizushima, T. Isoshima, M. M. Salomaa, and K. Machida, *Phys. Rev. A* **68** (2003) 023611.
- [10] Y. Kawaguchi and T. Ohmi, *Phys. Rev. A* **70** (2004) 043610.
- [11] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269** (1995) 198.
- [12] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3969.
- [13] *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases: Proceedings of the International School of Physics (Enrico Fermi) Course Cxl : Varenna on Lake Como Villa Monastero 7-17 July 1998 (Proceedings of the International School of Physics)* M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, eds., (IOS Press, 1999).
- [14] C. J. Pethick and H. Smith *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, 2002).
- [15] A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, *J. Phys.* **13** (2001) R135.
- [16] D. S. Rokhsar, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 2164.
- [17] R. J. Dodd, K. Burnett, M. Edwards, and C. W. Clark, *Phys. Rev. A* **56** (1997) 587.
- [18] A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, *Phys. Rev. A* **58** (1998) 3168.
- [19] A. A. Svidzinsky and A. L. Fetter, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 5919.
- [20] S.-I. Ogawa, M. Möttönen, M. Nakahara, T. Ohmi, and H. Shimada, *Phys. Rev. A* **66** (2002) 013617.
- [21] M. Möttönen, N. Matsumoto, M. Nakahara, and T. Ohmi, *J. Phys.: Condens. Matter* **14** (2002) 13481.
- [22] Y. Kawaguchi, M. Nakahara, and T. Ohmi, *Phys. Rev. A* **70** (2004) 043605.

- [23] E. Hodby, G. Hechenblaikner, S. A. Hopkins, O. M. Maragò, and C. J. Foot, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 010405.
- [24] P. C. Haljan, I. Coddington, P. Engels, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 210403.
- [25] 山田一雄、大見哲巨, 「超流動」 (培風館, 1995).
- [26] D. V. Skryabin, *Phys. Rev. A* **63** (2000) 013602.