

N -点渦系のダイナミクスと統計力学¹

— 少数自由度系から大自由度系へ —

京都大学 大学院 人間・環境学研究科 佐野光貞、八柳祐一、吉田剛²

(2005年6月3日受理)

N 個の点渦を無限平面、或いは、円周境界内に配置した時、「どのような運動をするのか」、また、「その統計的な性質は何か」、について調べた結果を報告する。特に、Onsager理論の検証、大正準集団による特徴付けとその破綻、および、エネルギースペクトルの挙動について紹介する。

目次

1	はじめに	566
2	ハミルトン系としての点渦系	569
2.1	無限平面の場合	569
2.2	円周境界の場合	571
3	負温度の導入	571
3.1	3点渦系	571
3.2	Onsager理論(1949)	572
3.3	Direct simulationによる検証	575
4	大正準集団による点渦系の統計力学	579
4.1	無限平面の場合	580
4.2	円周境界の場合	584
4.2.1	同符号点渦の場合	584
4.2.2	異符号点渦の場合	586
5	エネルギースペクトル	587
5.1	無限平面の場合	588
5.1.1	同符号点渦の場合	588

¹本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

²〒606-8501 京都府京都市左京区吉田二本松町 京都大学大学院人間・環境学研究科

5.1.2	異符号点渦の場合	591
5.2	円周境界の場合	592
5.2.1	同符号点渦の場合	592
5.2.2	異符号点渦の場合	593
6	まとめ	595

1 はじめに

まず、著者の紹介をしておく。佐野は非線形動力学・非平衡統計力学が専門、八柳はプラズマ物理学が専門、吉田は現在博士課程3回生の大学院生である。いずれも、流体力学のプロパーな専門家ではない。我々は、点渦系（或いは、二次元渦系）に関しての最近の発展についてのレビューと、この三人が日頃議論して研究してきた成果を以下紹介していく [1-3]。したがって、流体力学の専門家からすると、首を傾げたくなるようなこともあるかもしれないし、また、流体力学の専門家には考えつかないことを我々がやっている可能性もある。何かお気づきの点があったならば、ご指摘頂ければ幸いである。我々の扱いは全般的に学部レベル程度の統計力学の応用である。ランダム行列論との関係に関する部分以外は難しいと感ずることなく読み進めると思う。

我々が点渦系を扱うに至った経緯は以下のようなものである。UCSDのグループによる非中性プラズマの実験 [4-11] と、我々のいる人間・環境学研究科内の際本研究室内で行われている非中性プラズマの実験 [12-16] で出た結果をどのように理論的に解析したらよいのであろうかという問題を提起されたことに始まる。ちなみに、八柳は際本研究室内の所属である。以下、この実験について説明する。

Malmberg トラップと呼ばれる閉じこめ方法によって円筒容器に閉じこめられた電子プラズマの運動が二次元 Euler 流体の渦運動と等価になることを示す。円筒軸方向に一樣な強磁場がかかっており、円筒軸方向 (z 方向) に一樣な電荷密度分布が与えられているとき、電子の運動は円筒軸に垂直な断面内の運動のみによって特徴づけられる。一樣磁場 \mathbf{B}_0 の中で運動する粒子はサイクロトロン運動をする。今、電子の分布によって静電場 \mathbf{E} が発生しているとすると、このサイクロトロン運動の中心はドリフト速度と呼ばれる速度 \mathbf{v}_d

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad (1)$$

で運動する。磁場が十分強くて、電荷密度分布に比べてサイクロトロン運動の半径が十分小さいと、電子の運動はドリフト速度で与えられるとしてよい。このとき、案内中心で代表される速度をスカラーポテンシャル $\phi(x, y)$ で書き直す ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$) と、

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0}{B_0^2} = \frac{1}{B_0} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{e}_y \right) = \mathbf{e}_z \times \nabla \frac{\phi}{B_0}, \quad (2)$$

となる。一方、二次元非圧縮性流体は流れ関数によってその運動を記述できることから、

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla\Psi, \quad (3)$$

となり、

$$\Psi(x, y) = \frac{\phi(x, y)}{B_0}, \quad (4)$$

の対応がつく。このことから、ドリフト速度の発散はゼロとなり、非圧縮流となっていることが分かる（非圧縮性： $\nabla \cdot \mathbf{v}_d = 0$ ）。こうして、電子の流れ (\mathbf{v}_d) が流れ関数 (Ψ) で書けると読み替えができるのである。速度の回転をとって渦度を求めると、

$$\zeta = \zeta \mathbf{e}_z = \nabla \times \mathbf{v}_d = \mathbf{e}_z \nabla^2 \frac{\phi}{B_0}. \quad (5)$$

電荷密度を $n(x, y)$ 、電荷を e とすると、Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi = \frac{en}{\epsilon_0}, \quad (6)$$

により、渦度と電荷密度との関係は、

$$\zeta(x, y) = \frac{en}{\epsilon_0 B_0}, \quad (7)$$

となる。電荷密度については連続の式が成り立つ。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla n = 0. \quad (8)$$

これから、渦度の連続の式が求まる。つまり、式 (7) により、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = 0. \quad (9)$$

まとめると、渦度 $\zeta(x, y)$ の従う方程式は、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla \Psi = 0, \quad (11)$$

$$\zeta = \nabla^2 \Psi. \quad (12)$$

となる。二次元電磁気学と二次元 Euler 流体との関係を表にすると以下のようになる。

	二次元電磁気学	二次元 Euler 流体
非圧縮性	$\nabla \cdot \mathbf{v}_d = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
速度	$\mathbf{v}_d = -\nabla \phi \times \mathbf{e}_z / B_0$	$\mathbf{v} = -\nabla \Psi \times \mathbf{e}_z$
渦度	$\zeta = \nabla \times \mathbf{v}_d = \mathbf{e}_z \nabla^2 \phi / B_0$	$\zeta = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_z \nabla^2 \Psi$
連続の式	$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v}_d \cdot \nabla n = 0$	$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = 0$

この非中性プラズマの実験では、初期に比較的渦度の強い分布から出発すると、平衡状態へ緩和する過程で、渦度の強い部分（クランプと呼ぶ）が結晶構造を作る渦結晶などが見られている [6-11]。この渦結晶は準安定状態としてかなり長い時間スケールでその構造を保ちながら、しかし、その

構造は少しずつ変化し、クランプが合体して最終的に大きな渦になる。この現象はこの非中性プラズマの問題で最も面白い現象の一つである。

上で見たように、非中性プラズマの挙動は二次元 Euler 流体として記述できる。逆に言うと、非中性プラズマの実験は二次元 Euler 流体のアナログ・シミュレーションと言えないでもない。当然、理論的に解析するためにも、二次元 Euler 流体を数値的にシミュレートすることが求められる。しかし、我々は流体力学の専門家ではないので、二次元 Euler 流体を数値的に解くだけの計算機資源および技量もない。そもそも、Euler 流体の数値計算は大変な作業である。だが、二次元 Euler 流体を離散近似で解くことは何とか我々にもできる。二次元 Euler 流体の離散近似として点渦系を考えるのである。幸い八柳は MDGRAPE-2 を使用できる環境にあり、点渦系を高速に数値計算することができる。MDGRAPE-2 については後述する。点渦系は二次元 Euler 方程式と Poisson 方程式を満たしている。したがって、一つの解になっているが、点渦系が連続場をどれだけ近似しているかは数学的によく分かっていないようである。つまり、連続極限（流体力学極限？）で Euler 方程式の解になっているか？ということである。この基礎的な問題を頭の隅に置きながら、この研究の動機を述べていこう。

1. まず第一に、点渦系としてのどのような運動形態が可能であるのかに興味がある。これが我々の研究の最も根幹となる動機である。
2. しかし、闇雲にシミュレーションをして運動形態を枚挙するだけでは芸がない。そこで、統計理論としての Onsager 理論 (1949) [27] に注目した。Onsager 理論は論文にして 3 ページぐらいの記述であって、二次元渦系の本質についているが現象論の域を出ていない。実際に、Onsager 理論を検証してみる必要があると思われる。これが第二の動機である。
3. そして、点渦系に対してはエネルギースペクトルの陽な表式が無限平面系 [49] と円周境界系 [1] について得られている。この式を使って統計力学的にエネルギースペクトルのべき則を求めることができる。これが第三の動機である。
4. さらに、点渦系に統計力学を応用する際、(大) 正準集団を扱うときに問題があることが Kraichnan によって 1975 年に指摘されているが [32]、その問題が実際にどのようなものであるのか確かめておきたい。また、できればその問題を克服する手段を開発したい。そして、さらに、二次元渦の統計力学と共通した問題があるはずである (BEC の量子渦や Kosterlitz-Thouless 転移など)。二次元渦の研究は一つの分野にとどまらず、いろいろな分野につながる可能性がある。これが第四の動機である。

以下、タイトルの副題にあるように、少数自由度系（少数点渦系）の振る舞いから、大自由度系（多点渦系）の振る舞い・統計力学的振る舞いへという順序でこの小文を書き進めていくことにする。

なお我々は点渦系を、網羅的に研究を進めるために、次のように分類した。まず、境界条件に関しては、無限平面系と円周境界系の二つの系を考える。さらに、点渦の循環の値を同符号で同

じ値にした系と、異符号で大きさを同じにした系を考える。したがって、次の四つの異なる系を扱うことにする。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{無限平面系} \\ \text{円周境界系} \end{array} \right\} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \text{同符号点渦の場合} \\ \text{異符号点渦の場合} \end{array} \right\} \quad (13)$$

2 ハミルトン系としての点渦系

それでは、まず、点渦系の紹介から始めていくことにする。点渦系の研究の始まりは非常に古い。19世紀に Helmholtz [17]、Kirchhoff [18] によってハミルトン形式で無限平面での運動方程式が書かれることが示されてから、点渦系の安定性解析を実現できる実験が Kelvin [19] によって提案された。その提案は、磁化した針を正 n 角形配置に水槽に浮かべて、上から電磁コイルで磁場をかけて浮かべた針が動くかどうかで安定性を調べるというものであった [22]。その後、Mayer が実際に実験を行い、正 n 角形配置の安定性を調べ、 $n \leq 5$ は安定、 $n \geq 6$ は不安定であると結論づけたが、安定性の解析は後に Havelock によって線形解析がなされた [20]。しかし、どの n が安定・不安定の境になるのかは諸説があり、曖昧だった。その後も Morikawa and Swenson [21]、Kurakin and Yudovich [22] らにより解析が続けられた。その結果、Kurakin and Yudovich によって、Kelvin の問題は $n \leq 7$ で安定、 $n \geq 8$ で不安定という結論が得られている。

次に、無限平面の場合における、点渦系のハミルトニアンと運動方程式を見ていこう。

2.1 無限平面の場合

無限平面上におかれた点渦系を考えることにする。点渦の位置を $\mathbf{r} = (x, y)$ で表すとして、 $z = x + iy$ と複素数表示を用いると、系のハミルトニアンは、無限大に発散する自己エネルギーを除いて、

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_n^N \sum_{m \neq n}^N \lambda_n \lambda_m \log |z_n - z_m|, \quad (14)$$

で与えられる。 λ_n は n 番目の点渦の循環である。運動方程式は、

$$\lambda_n \frac{dz_n^*}{dt} = 2i \frac{\partial H}{\partial z_n}, \quad (15)$$

或いは、

$$\lambda_n \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_n}; \quad \lambda_n \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_n}, \quad (16)$$

と与えられる。 x が座標、 y が運動量と見ると、左辺に循環があるため、厳密な意味でのハミルトンの運動方程式ではないが、その点を除けばハミルトンの運動方程式と見なせる。例えば、ポアソン括弧を書くと、以下のようなになる。

$$\{f, g\} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial g}{\partial y_n} - \frac{\partial f}{\partial y_n} \frac{\partial g}{\partial x_n} \right). \quad (17)$$

無限平面点渦系の保存量は、運動に直接関係して独立なものとして、

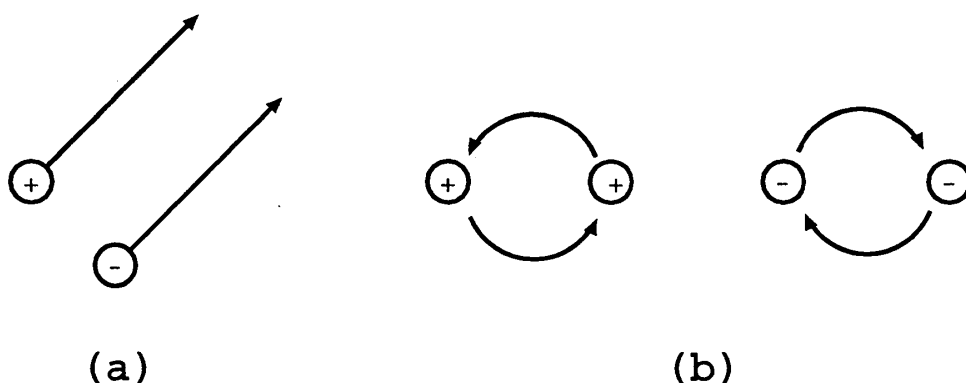


図 1: バイナリーの形成: (a) 並進型バイナリー、(b) 回転型バイナリー

1. ハミルトニアン H 、
2. 重心 (linear impulse)、

$$M = \sum_n \lambda_n z_n / \sum_n \lambda_n, \quad (18)$$

ただし、 $\sum_n \lambda_n \neq 0$ とする。この条件がない場合は保存量ではない。

3. 慣性モーメント (angular impulse)、

$$I = \sum_n \lambda_n |z_n|^2. \quad (19)$$

以上が独立な保存量である。独立ではないが保存量となっているものに、全循環 $\sum_n \lambda_n$ 、角運動量 $\sum_n \lambda_n (x_n \frac{dy_n}{dt} - y_n \frac{dx_n}{dt})$ がある。

境界のない無限平面上におかれた場合の二つの点渦の運動は可積分であり、その挙動は境界がある場合においても基本となる運動である。(1) 二つの点渦の循環が λ と $-\lambda$ と異符号の場合。この場合、二つの点渦はバイナリーを形成し併走する。図 1(a) を参照。そこで、このような状態を並進型バイナリー (translational binary) と呼ぶことにする。(2) 二つの点渦の循環が $\lambda > 0$ (或いは $\lambda < 0$) と同符号である場合。この場合も、二つの点渦はバイナリーを形成するが、図 1(b) のようにお互い回転しあう。そこで、このような状態を回転型バイナリー (rotational binary) と呼ぶことにする。

保存量の数と可積分性: 保存量はハミルトニアン (1 個)、linear impulse (2 個)、angular impulse (1 個) で合計 4 である。2-点渦系、3-点渦系は可積分であることが知られている。保存量の値の取り方によっては、4-点渦系からカオス的な振る舞いをすることもあり、また、可積分である場合もあることが分かっている。無限平面上の点渦系の可積分性については、Novikov, Aref, Ziglin らの仕事があり、Newton の本に参考文献が挙げられている [23]。

2.2 円周境界の場合

円周境界内の点渦系を考えることにする。円周の半径を R とする。点渦の位置を $\mathbf{r} = (x, y)$ として、 $z = x + iy$ と複素数表示すると、系の Hamiltonian(系のエネルギー)は、無限平面系の場合と同様に、無限大に発散してしまう自己エネルギーを除いて、

$$H = -\frac{1}{4\pi} \left(\sum_n \lambda_n \right)^2 \log R - \frac{1}{4\pi} \sum_n \sum_{m \neq n} \lambda_n \lambda_m \log |z_n - z_m| + \frac{1}{4\pi} \sum_n \sum_m \lambda_n \lambda_m \log |R^2 - z_n z_m^*|, \quad (20)$$

で与えられる。最初の定数は不必要に思われるかもしれないが、流れ関数を円周境界上でゼロにするために必要である。また、この項は体積に依存しているため、後節で統計力学を考える場合、重要なファクターとなる。第三項は境界の効果、つまり境界の外にある鏡像点渦との相互作用を表している。鏡像の位置 z' は、 z を境界内の点渦の位置とすると、 $z' = R^2/z^*$ である。 z^* は z の複素共役である。運動方程式は、

$$\lambda_n \frac{dz_n^*}{dt} = 2i \frac{\partial H}{\partial z_n}, \quad (21)$$

或いは、

$$\lambda_n \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_n}, \quad \lambda_n \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_n}, \quad (22)$$

と与えられる。この系の保存量は、運動に関して独立なものとして、(1) ハミルトニアン H 、(2) 慣性モーメント (angular impulse) I がある。ほかに、独立ではないが、全循環 $\sum_n \lambda_n$ も保存量である。

保存量の数と可積分性: 保存量はハミルトニアンと angular impulse があるので、1-点渦系、2-点渦系は可積分系であると考えられ、3-点渦系から非可積分性の可能性が出てくる。円周境界系に関しては、 $N \geq 3$ についての可積分性・非可積分性に関する証明は無いようである。3-点渦系 ($\lambda_n = \lambda > 0$) については、小節 3.1 において、ポアンカレ断面の様子を調べることで、非可積分系であることが確認される。

3 負温度の導入

3.1 3点渦系

次の小節で Onsager 理論を紹介し負温度の導入をする前に、少数自由度系である円周境界の場合の 3-点渦系において、どのような運動形態があるのか調べておく。少数自由度ではあるが、Onsager 理論の統計力学的扱いと直接関係している点に注目してもらいたい。キーとなるのは、点渦の運動する領域は有限であること、運動の形態が大別して二通りのパターンに分かれることである。

我々は、3-点渦系に対して、Aref and Pomphrey [26] の方法を用いてポアンカレ断面を調べ、どのような運動形態があるのか調べてみた [1]。使った正準変換の詳細は [1] に譲って、以下にその結果を示す。簡単のために、同符号点渦系を考え、 $\lambda_n = 1 (n = 1, 2, 3)$ 、 $R = 10$ とした。

次の小節の Onsager 理論にとって重要となる状態密度をパラメータ空間 (エネルギーと angular impulse) でプロットした図が図 2(a)、その一部を拡大したのが、図 2(b) である。一目して分かる

ように、状態密度には尾根がある。つまり、ある I で状態密度の断面をとった際に E に対して、状態密度の勾配が正の部分と負の部分とがある。勾配が正負となるそれぞれの領域での運動の様子を知るために、図3に図2(b)において印を付けた点に対応するポアンカレ断面が示されている。プロットした点の散らばり具合から分かるように点渦はカオス的な運動をしていることが分かる。3-点渦系が非可積分系であろうことが、これから推測される。図3(a)は状態密度の尾根の下側の点、つまり、勾配が正の側にある。このとき、ポアンカレ断面は2重リングのようなプロットとなる。ところが、状態密度の尾根の近傍(c)では、その2重リングが合体している。また、状態密度の尾根の向こう側、つまり勾配が負の側でのプロット(b)、(d)は、 S^1 と同様なプロットが得られている。明らかに、状態密度の勾配によって運動の形態が異なっており、勾配の符号に応じて二通りの運動形態があることが分かる。この運動形態の違いは、次小節に述べる Onsager 理論における「温度」の符号と関係していることが理解される。

3.2 Onsager 理論 (1949)

Onsager 理論を紹介しよう [27]。Onsager の論文では、たったの3ページの記述にすぎないが、二次元渦系の性質を見事に言い当てている。

今、点渦系は有限領域に閉じこめられているとする。ハミルトニアンは、

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_n^N \sum_{m \neq n}^N \lambda_n \lambda_m \log |z_n - z_m| + (\text{mirror terms}), \quad (23)$$

となる。Onsager は保存量のことと考えて、正方形の領域を思い浮かべていたようである。このとき回転対称性は破れているため、angular impulse と linear impulse は保存量にならず、ハミルトニアンだけが保存量になる。この点渦系の状態密度を $W(E)$ とおくことにする。点渦の座標 x と y が正準共役な変数と見なされ、系の配位空間は位相空間と考えることができる。そして、その領域は有限である。このとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(E) dE = \int_{\mathcal{D}} \cdots \int_{\mathcal{D}} dx_1 dy_1 \cdots dx_N dy_N = \mathcal{A}^N, \quad (24)$$

である。ただし、 \mathcal{D} は点渦の動ける領域であり、 \mathcal{A} は \mathcal{D} の面積である。通常の統計力学における小正準集団の考え方を応用するならば、エントロピー S は次のように与えられる。

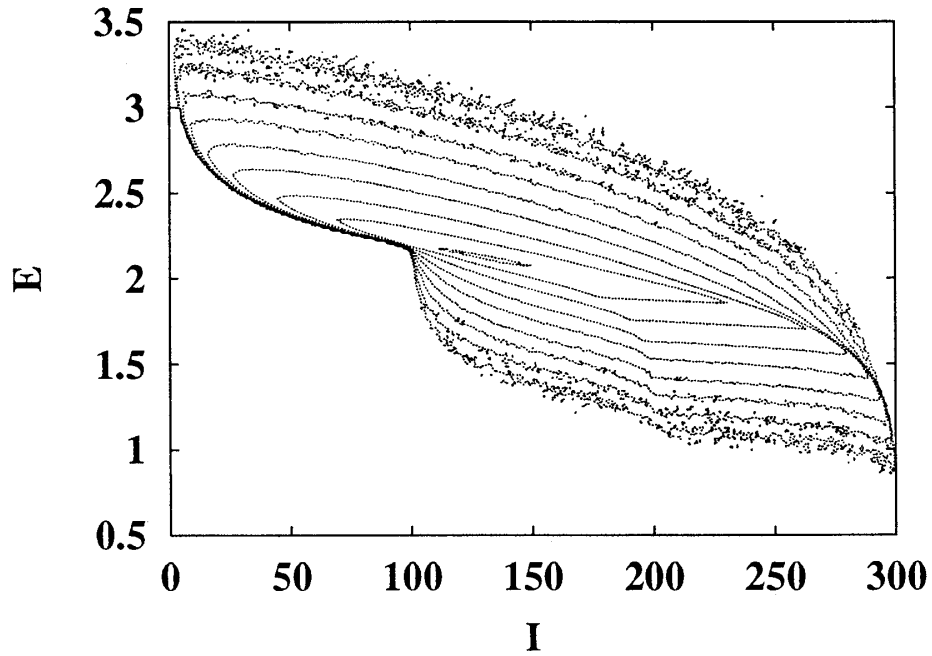
$$S = \log W(E). \quad (25)$$

ただし、Boltzmann 定数は $k_B = 1$ とした。これから「形式的に」温度を定義することができる。つまり、

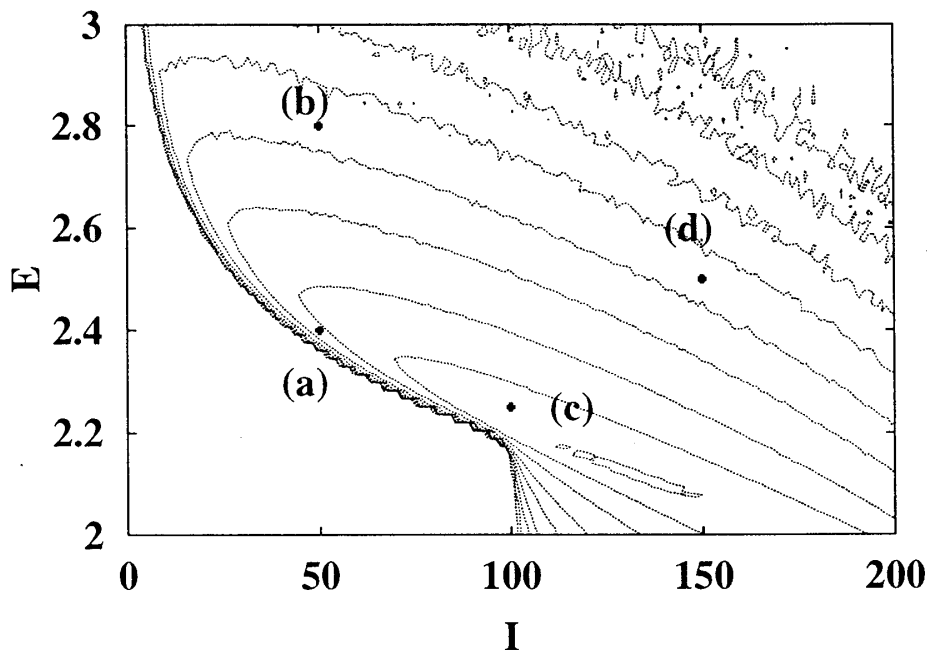
$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{dS}{dE}, \quad (26)$$

である。この温度はもちろん流体の熱力学的な温度ではない。上式を認めることにすると、 $W(E)$ は先の積分が有限であることから、

$$\lim_{|E| \rightarrow \infty} W(E) = 0, \quad (27)$$



(a)



(b)

図 2: 円周境界 ($R = 10$) 内 3 点渦系の状態密度:(a) 状態密度、(b) 拡大図。(b) において示した点 (a) と (c) 付近が状態密度が高く、尾根になっている。

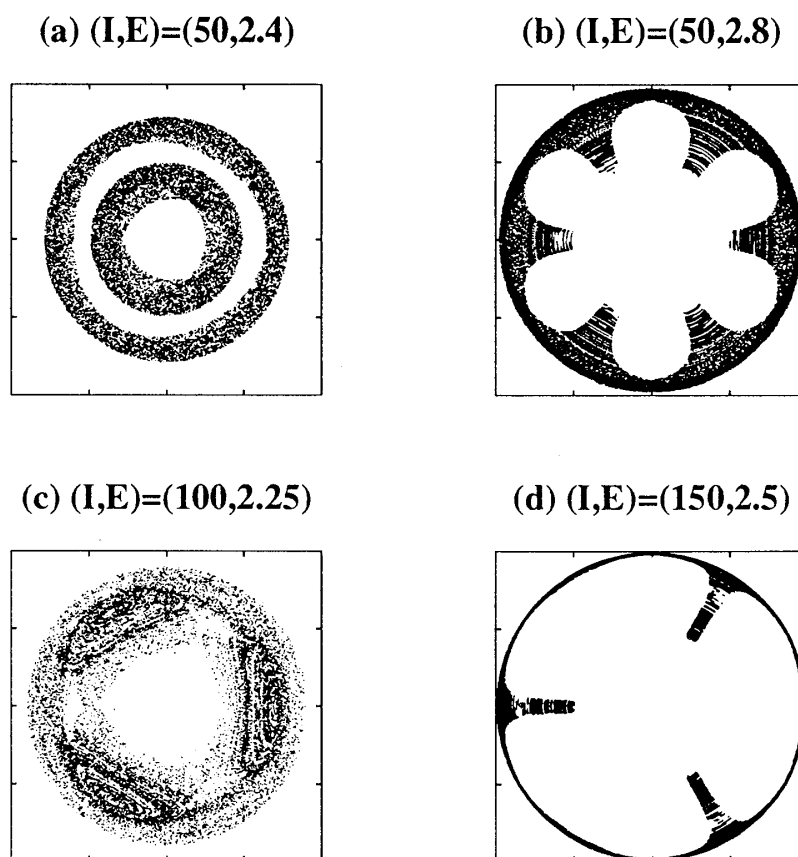


図 3: ポアンカレ断面:(a) $I = 50, E = 2.4$, (b) $I = 50, E = 2.8$, (c) $I = 100, E = 2.25$, (d) $I = 150, E = 2.5$.

とならなければならず、 $W(E)$ はどこかで最大値を持つ。今、最大値をもつエネルギーは一つだと仮定して、それを E_c とおくことにする。このとき、 $W(E)$ は $E > E_c$ において減少関数となると考えられる。もし系が平衡状態に落ち着くならば、平衡状態は式 (26) の温度 T によって特徴づけられることになる。特に、 $E > E_c$ において、温度は

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} = \frac{1}{W(E)} \frac{dW(E)}{dE} < 0, \quad (28)$$

とエネルギーの増加に伴って負になる。ここで、Boltzmann 因子 $e^{-\beta H}$ によってどのような状態が平衡状態として実現されるか考えてみると、負温度状態 ($E > E_c$) では E が大きい状態が実現しやすく、点渦は互いに合体して凝集した状態になり、また、正温度状態 ($E < E_c$) の時、循環が正の点渦と循環が負の点渦とが近づき、全体として点渦は領域の境界間際まで広がり、エネルギーを減らそうとすることになる。

Onsager 理論は地球表面 (擬二次元系) でなぜハリケーンや台風といった大きな渦 (コヒーレントな構造) が成長するのかという疑問に対して最も簡単な説明となるかもしれない。もちろん、実際の気象現象では大気の高さやコリオリ力なども重要であるので、目安にすぎないことは事実であるが、最も本質的なところをついていると言えるだろう。

前小節で円周境界 3-点渦系で調べたポアンカレ断面の様子から分かるように、既に 3-点渦系から温度の違いによって運動の形態 (凝集しようとするか、広がろうとするか?) が異なることが理解される。

Onsager の乱流に関する仕事は数編の論文しか発表されていないが、未発表の仕事はいくつかあったようである。Onsager の遺稿を調べ、その辺りの歴史的背景を含めたレビューが [28] にまとめられているが、まだ出版されていないようである。

3.3 Direct simulation による検証

Onsager 理論の検証を行うため、半径 R の円周境界内に閉じ込められた循環が $\lambda_0 (> 0)$ の点渦 $N/2$ 個と、 $-\lambda_0$ の点渦 $N/2$ 個から成る異符号点渦系の状態密度 $W(E, I)$ を、系の保存量であるエネルギー (式 (20)) と、慣性モーメント (式 (19)) をパラメータとした大規模ランダムサンプリングによって求めた [2]。

まず初めに、合計 N 個の点渦を乱数を用いて、円周境界内にランダムに配置する。この配置に対するエネルギー E と慣性モーメント I を求めると、 (E, I) 平面上の 1 点が定まる。この 1 点が、 E, I を一定とするミクロカノニカルアンサンブルでの 1 つの状態に対応する。この作業を合計 10^7 回繰り返すことにより得た (E, I) 平面上の点のヒストグラムが、すなわち状態数の分布となる。ここでのポイントは、いかに多くの状態をサンプリングするか、ということに尽きる。しかし、エネルギーの計算は総点渦数の 2 乗に比例する“重たい”計算のため、 N が 10^3 を超えたあたりから徐々に待ち時間が気になり始め、 10^4 を超えると、タイムステップ数にも依存するが、VIC やツリーコードのような、なんらかの高速アルゴリズムを用いない限り、高速なワークステーションといえども耐え難い計算時間となってしまふ。そこで、我々はこの問題をクリアするため、分子

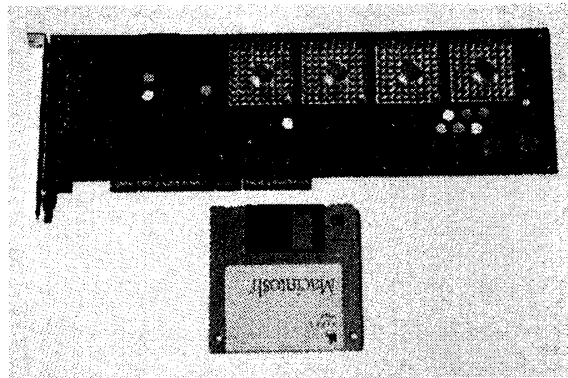


図 4: MDGRAPE-2 (PCI) ボードの様子。プログラムからは、ポアソン方程式を解くサブルーチンを呼び出す感覚で使用できる。

動力学専用計算機 MDGRAPE-2(図 4) を用いた [29,30]。同様の専用計算機に重力多体専用計算機 GRAPE-6 [31] があるが、MDGRAPE-2 は GRAPE-6 と異なり、ポアソン方程式に対するグリーン関数を自由に書き換えられるという特徴を持つ。すなわち、一般に、2 体間の距離の関数の和

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{F}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|), \quad (29)$$

を、高速化することが可能である。我々はこの機能を用い、グリーン関数を 2 次元ポアソン方程式に対する $-1/(2\pi) \log r$ に書き換え、ハミルトニアンを計算を行った。このため、たとえば 3GHz クラスの Pentium4 で 1 週間の計算であれば、数時間で終了させることが可能となった。

図 5 に、 $N = 6724$ 、 $\lambda_0 = 0.15$ の系に対して、 10^7 回サンプリングを行った後の状態数の分布を示す。図 5 が示すとおり、状態数は、ある値 $E_0 \approx 28.0$ 、 $I_0 \approx 0.0$ でピークを示し、予想通り一山分布となった。状態数は、正負点渦の数の対称性から、 $I = 0$ の面に関して対称である。この断面内では、系のエネルギーが $E > E_0$ となるところで、式 (28) が示すとおり、系の温度は負となる。また、系の粒子数を変化させて同様のサンプリングを行うと、粒子数が増大すると共に、 E_0 の値、及び $I = 0$ の面内での E_0 でのピークに対する半値幅は減少することが確認できた [2]。すなわち、粒子数が無限大の極限で、状態密度は $E = I = 0$ にピークを持つデルタ関数になると予想できる。

理想気体 (正温度) では、よく知られているように、 $E \propto T$ である。一方、この系の負温度側 ($E > E_0$ 、 $I = 0$) における状態数の E 依存性を調べたところ、図 6 に示すとおり、 $\ln W(E, I) \propto -E^2$ より、 $E \propto -1/T$ となることがわかった [37,39]。すなわち、正温度側と負温度側で、状態密度はエネルギーに対して異なる依存性を示す。

次に、我々は、温度をパラメータとした漸近的平衡分布を、時間発展シミュレーションから得た。時間発展の結果を図 7 に示す。正の点渦は黒い点、負の点渦は灰色の点で表現されている。図 7(a) では、半径 $0.07R$ で同一符号の点渦 346 個から構成される塊 (クランプ) を正 10 個、負 10 個用意し、それらの中心が境界の中心から $0.2R$ の円周上に正負交互かつ等間隔に並ぶように配置した。クランプの一部は相互に重なっているため、初期時刻の分布は、ドーナツ状に見える。ま

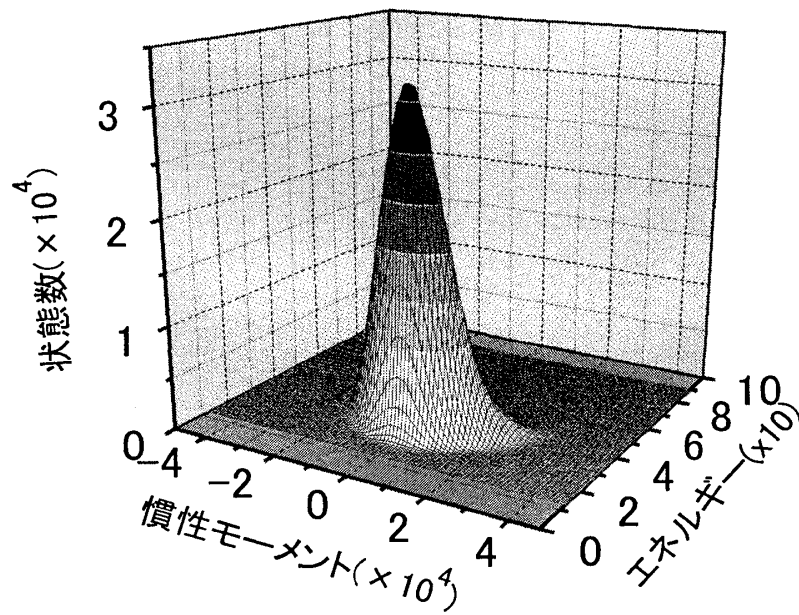


図 5: 状態密度のプロット。ある値 $(E_0, I_0) \approx (28.0, 0.0)$ でピークを示す一山分布となる。

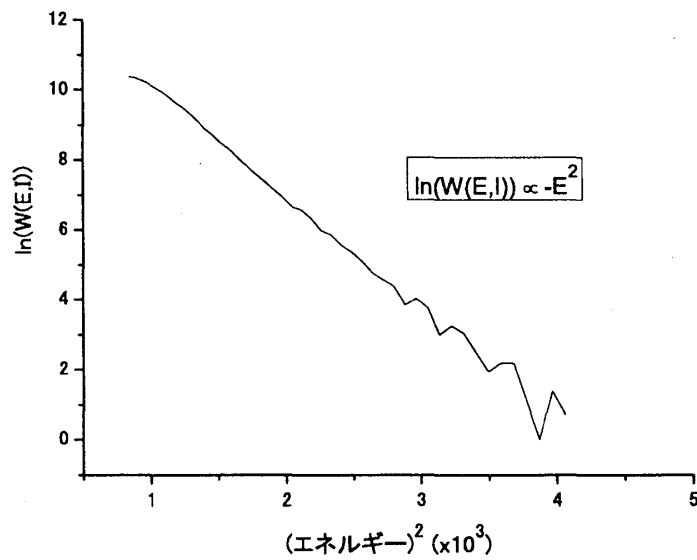


図 6: 負温度側での状態数の H 依存性

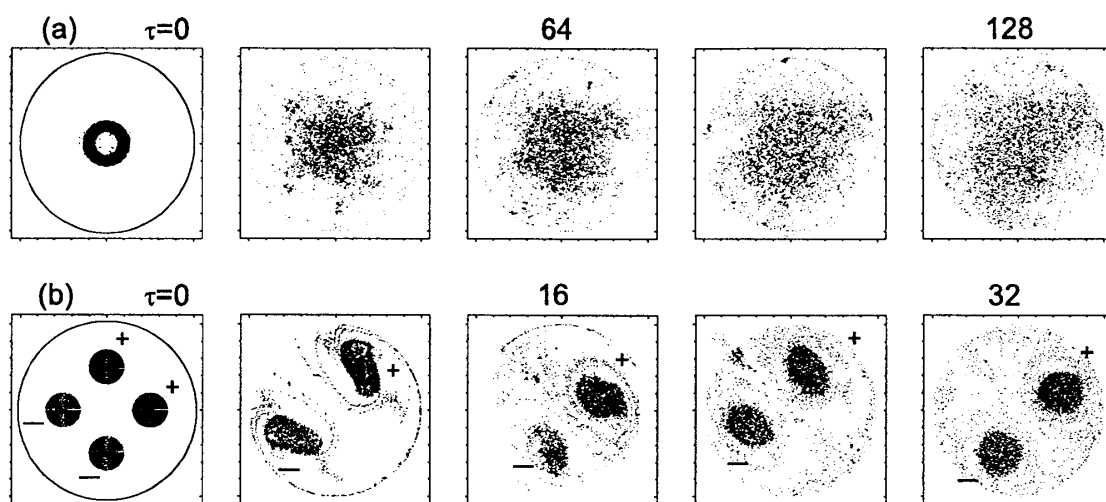


図 7: 点渦群の時間発展の様子。(a) $T > 0$. $E = 24.1$, $I \approx 0$, $R = 50.0$, $\lambda = \pm 0.15$, $N_{tot} = 6920$. (b) $T < 0$ に対応。 $E_{2N} = 2.69 \times 10^4$, $I_{2N} \approx 0$, $R = 50.0$, $\lambda = \pm 0.15$, $N_{tot} = 6724$. 正の点渦は黒、負の点渦は灰色で表現した。 $\tau = 0$ の円は、境界の位置を示す。

た、(b) では、半径 $0.2R$ で同一符号の点渦 1681 個から構成されるクランプを正 2 個、負 2 個用意し、正 2 個は $(0.5R, 0)$ 、 $(0, 0.5R)$ に、負 2 個は $(-0.5R, 0)$ 、 $(0, -0.5R)$ に配置した。各クランプ内での点渦の配置は、(a)、(b) 共に一様である。今考えている系は、エネルギー保存系のため、点渦群の初期分布を決めると系のエネルギーが決まり、結果として系の温度が決まる。図 7(a) の場合のエネルギーは、 $E = 24.1 < E_0$ なので、温度は正である。一方、(b) の場合のエネルギーは、 $E = 2.69 \times 10^4 > E_0$ なので、温度は負である。

温度が正である (a) の場合、正の点渦と負の点渦は、互いに混ざり合い、一様に分布し、中性化しようとする傾向がある。各点渦位置での速度は、全体の点渦分布が中性化するほど小さくなるので、時間発展のタイムスケールは、(b) の場合に比べて長い。一方、温度が負である (b) の場合、同符号の点渦同士が凝集し、正は正、負は負で大きなクランプをそれぞれ 1 つずつ作っている。この同符号点渦の凝集が、負温度における特徴的振る舞いである。(b) の時間発展シミュレーションは $\tau = 200$ まで続けても、この 2 クランプの配位は、基本的に変化しないので、平衡状態にあるものと考えられる。

ここで、 $\beta < 0$ の場合の平衡状態 (図 7(b) $\tau = 32$) での 2 つのクランプの位置関係について、簡単なモデルを用い、考察する。二つのクランプをそれぞれ 1 個の点渦に見たて、背景は一様に分布しており、中性化しているものとする。すなわち、半径 R の円周境界内に、正の点渦 1 個が $(r, 0)$ に、負の点渦 1 個が $(-r, 0)$ に置かれていると考える。この場合、 $r = (\sqrt{5} - 2)^{1/2} R$ で 2 点渦系のエネルギーは最大となる。この値は、シミュレーションで観測した図 7(b) $\tau = 32$ でのクランプ重心間の距離と近い値であり、最終時刻における二つのクランプは、エネルギーがより高い状態を目指して、このような位置に落ち着いたものと考えられる。系の全エネルギーは保存されなくてはならないため、よりエネルギー状態の高いクランプが生成されるためには、系内に

エネルギーが下がった点渦群が存在しなければならない。この役割を果たすのが、背景渦である。すなわち、同符号の点渦が凝集してエネルギーが高くなった点渦が増えるとともに、一部の点渦はクランプ外へ行き、よりエネルギーが低い様な背景分布を構成する。逆に、背景渦がなければ、このようなクランプは生成されない。これは、非中性プラズマを用いた渦実験において、クランプ群が対称な配位へ導かれる「結晶化」での背景渦の役割と共通したものであると、我々は考えている [15,16]。

点渦系の数値計算についての注意: ハミルトニアンが $H = T + V$ の形になっていないことから、時間発展作用素を構成しようとするとき、Baker-Campbell-Hausdorff 公式による展開ができないため、陽的なシンプレティック積分法 [24] は使えない。そのため、シンプレティック積分法を使うとすると、陰的なシンプレティック積分法を使うことが求められる。そのような計算例は [25] にある。しかし、陰的なシンプレティック積分法は、各時間ステップで連立非線形方程式をニュートン法のようなもので数値的に解かなければならず数値誤差、計算機時間の問題であまりメリットがない。そのため、我々は Runge-Kutta 法 (4 次)、或いは、Runge-Kutta-Fehlberg 法 (5 次) を使うことにした。

上に書いたとおり、特に同符号系の場合、回転型バイナリーを作ると、全体で回転する時間スケールとバイナリーの持つ回転時間スケールとがかけ離れてしまい、数値的に誤差が溜まりやすい。高精度な計算を行うためには、時間刻みを十分小さくする必要がある。

また、特に円周境界系の場合には、円周上は流線に一致し、流れ関数がゼロになっており、円周上で法線方向の速度成分は無いはずであるが、数値誤差によってこれが破れて、点渦が境界の外に出てしまうことがある。円周境界上では速度場が無限になっていることにも注意。そのようなことが起こらないようにするためにも、十分に時間刻みを小さくして数値計算を行う必要がある。

4 大正準集団による点渦系の統計力学

Onsager 以後、点渦系の統計力学的考察によるいくつかの成果がある。(大) 正準集団を使うと問題が生じることが Kraichnan [32] によって指摘された。この問題点はこの節で述べる。その後、円周境界に関しては平衡状態として軸対称解を平均場近似で求めたものとして木田 [33] の仕事がある。同じように平均場近似で平衡状態を扱ったもの (正方形の領域で周期境界条件) として Joyce and Montgomery [34], Pointin and Lundgren [35,36] がある。また、正方形領域で周期境界条件の場合に、状態密度を解析的に見積もることも成功している (Seyler [37])。木田の仕事で見つかったいなかった非軸対称解を求めたものとして、Smith and O'Neil [38] がある。また、二種類の点渦を入れた系を扱ったものとして Bühler [39] がある。

総じて、平衡状態を求めるには平均場近似がうまく働き、最終的に次の Poisson-Boltzmann 方程式 (Ψ は流れ関数)

$$\Delta\Psi = Ae^{-\beta F(\Psi)}, \quad (30)$$

を解けば良いことになる。しかし、解析的に解ける場合はかなり限られた場合だけであり、平衡

状態の全体像が見渡せる（相図が書けるといふ意味の）モデルは少ない。解析的に解ける場合は、Joyce and Montgomery によって調べられた正方形周期境界条件の場合である [40]。この場合は、sinh-Poisson 方程式を

$$\Delta\Psi = -d \sinh(\beta\Psi), \quad (31)$$

sine-Gordon 方程式

$$\Psi_{tt} - \Psi_{xx} + \sin(\Psi) = 0, \quad (32)$$

に帰着して解く。

4.1 無限平面の場合

この小節と次の小節および次節の結果は、[3] によっている。まず初めに、この系は無限系であるため、Onsager 理論の適用例にはならない。そのため、温度領域は負温度の領域があるか確かではない。この点は、次に述べる（正・負温度がある）円周境界内の場合とは大きく異なる。

小正準集団の議論が正当化されるならば、状態密度の畳み込みの議論から大正準集団が構成できることが分かる。ただし、この小正準集団から大正準集団への移行は形式的であり、実際に等価であるかは怪しい。そもそも、熱浴を点渦系につけるとはどのようなことなのか分からない。また、以下に見るように、大正準集団が破綻する場合があることがある。

系の分配関数を評価することを考える。今、 N 点渦がある場合を考え、保存量 H, I, M を考えると、Boltzmann 因子は、

$$e^{-\beta H - \nu I - q_1 \text{Re}(M) - q_2 \text{Im}(M)}, \quad (33)$$

で与えられる。重心をゼロに固定して考えることにするならば、Boltzmann 因子は、

$$e^{-\beta H - \nu I}, \quad (34)$$

を考えれば良いことになる。点渦の循環が同符号の場合を考える。 $\lambda_n = \lambda (n = 1, 2, \dots, N)$ 。このとき、分配関数は、

$$Z(\beta, \nu) = \frac{1}{N! h^N} \alpha^{-N - \frac{\gamma N(N-1)}{2}} \int \prod_{j=1}^N \left(\frac{dz_j dz_j^*}{2i} \right) \prod_{n < m}^N |z_n - z_m|^{2\gamma} e^{-\sum_{n=1}^N |z_n|^2}, \quad (35)$$

となる。ただし、

$$\gamma = \frac{\lambda^2 \beta}{4\pi}, \quad \alpha = \nu \lambda, \quad (36)$$

である。結局、次の積分が評価できればよいことになる。

$$I(N, \gamma) = \int \prod_{j=1}^N \left(\frac{dz_j dz_j^*}{2i} \right) \prod_{n < m}^N |z_n - z_m|^{2\gamma} e^{-\sum_{n=1}^N |z_n|^2}. \quad (37)$$

式 (37) に現れる $\prod_{n<m}^N |z_n - z_m|^2$ は、次の Van dermonde 行列式の積 ($\Delta(z)\Delta(z)^*$) で書くことができる。Van dermonde 行列式を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\Delta(z) &\equiv \det(a_{ij}) \\ &= \prod_{n<m} (z_n - z_m)\end{aligned}\tag{38}$$

$$= \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{-\mathcal{P}} z_1^{p_1-1} z_2^{p_2-1} \dots z_N^{p_N-1}.\tag{39}$$

ただし、 $a_{ij} = z_i^{j-1}$ ($i, j = 1, 2, \dots, N$) である。 \mathcal{P} は置換を表している。また、 p_1, p_2, \dots, p_N は 1 から N までの数字を置換 \mathcal{P} によってあてがうことにする。 $I(N, \gamma = 1)$ の場合は、ちょうどランダム行列論における Ginibre アンサンブル [41] と等価であって、積分値は、

$$I(N, \gamma = 1) = \pi^N \prod_{j=1}^N j!,\tag{40}$$

である。これは、先の Van dermonde 行列式を使うと示すことができる。我々の問題では γ が実数値をもつようにして考察を進めたいのであるから、より一般的な定式化が必要となる。

詳細は [3] に譲って、結果だけを書くと、積分 $I(N, \gamma)$ は調和振動子の量子力学に出てくる昇降演算子を使って、以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\langle 00 \dots 0 | \{\Delta(a)\}^\gamma \{\Delta(a^\dagger)\}^\gamma | 00 \dots 0 \rangle \\ = \int \prod_{j=1}^N \left(\frac{dz_j dz_j^*}{2\pi i} e^{-z_j^* z_j} \right) |\Delta(z)|^{2\gamma}\end{aligned}\tag{41}$$

$$= \pi^{-N} I(N, \gamma).\tag{42}$$

ただし、

$$\Delta(a) = \prod_{i<j}^N (a_i - a_j),\tag{43}$$

$$\Delta(a^\dagger) = \prod_{i<j}^N (a_i^\dagger - a_j^\dagger),\tag{44}$$

さらに、

$$|00 \dots 0\rangle \equiv |0\rangle_1 |0\rangle_2 \dots |0\rangle_N,\tag{45}$$

である。 $|0\rangle$ は調和振動子の固有状態を表すケットである。したがって、単純に期待値

$$\langle 00 \dots 0 | \{\Delta(a)\}^\gamma \{\Delta(a^\dagger)\}^\gamma | 00 \dots 0 \rangle,\tag{46}$$

を評価すれば良いことが分かる。つまり、積分は実行できており、この期待値の評価さえできれば、分配関数の値が分かることになる。ただし、 γ は一般には実数であるので評価は面倒である。この評価をするために、以下の展開に注目する。

$$\begin{aligned}x^\gamma &= (1 - (1-x))^\gamma \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma-n+1)} (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^k,\end{aligned}\tag{47}$$

ただし、 $0 \leq |x| \leq 1$ である。この式の x に $\Delta(a)$ 、或いは、 $\Delta(a^\dagger)$ を入れれば、

$$\{\Delta(a)\}^\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma-n+1)} (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \{\Delta(a)\}^k, \quad (48)$$

となり、Van dermonde 行列式の整数べきで書くことができる。したがって、求める積分、式 (46) を評価するためには、

$$\langle 00 \dots 0 | \{\Delta(a)\}^n \{\Delta(a^\dagger)\}^m | 00 \dots 0 \rangle, \quad (49)$$

を評価できればよいことになる。ただし、 n, m は正の整数である。ちなみに、昇降演算子の数を考えれば、

$$\langle 00 \dots 0 | \{\Delta(a)\}^n \{\Delta(a^\dagger)\}^m | 00 \dots 0 \rangle = \delta_{nm} \langle 00 \dots 0 | \{\Delta(a)\}^n \{\Delta(a^\dagger)\}^n | 00 \dots 0 \rangle, \quad (50)$$

であろう。

$$\langle 00 \dots 0 | \{\Delta(a)\}^n \{\Delta(a^\dagger)\}^n | 00 \dots 0 \rangle, \quad (51)$$

の値を計算するには、正直に Van dermonde 行列式の展開式を代入していけばよい。昇降演算子が掛け合わされて、ブラとケットのインデックスが変わり、ブラとケットのインデックスがあったもの同士の内積が値を持つことになる。結局、次に述べる組み合わせ論の問題が解ければよいことになる。

解かなければならない問題: ある組み合わせ論の問題 N 枚のカードに 1 から N までの数字が書かれている。このカードが n 組あるとしよう。 N 個の箱が一行に左から右に並べられており、これらの箱にそれぞれの組のカードをシャッフルして一枚ずつ 1 番目から N 番目の箱へ入れていく。このとき、それぞれの箱の中に入ったカードに書かれている数の和を箱にあてがう (i_1, i_2, \dots, i_N) 。ランダムにシャッフルしたカードの場合、 i_1, i_2, \dots, i_N はどのような分布をするであろうか？これが我々の知りたい問題（組み合わせ論）である。もちろん、場合の数は、 $(N!)^n$ である。問題は i_1, i_2, \dots, i_N の分布である。この分布について知見が得られれば、求める積分 $I(N, \gamma)$ の値の表式を少しでも簡単なものにできるはずである。分配関数を計算しているのであるから、これは状態数の計算であって、組み合わせ論的な計算が出てくるのは至極当然である。問題は、 $I(N, \gamma)$ の表式を如何に我々の使い勝手の良い形に書き直すことができるかである。現時点では、それに成功していない。漸近的にでも評価ができれば十分であるが残念である。

数理的な側面での面白いところとして、直交多項式（我々の場合 Hermite 多項式）が出てくる辺りは、数理的な奥深さを感じさせる。ランダム行列論では、直交多項式の種類によって色々なアンサンブルが構成できたのを思い起こしておこう。また、積分 $I(N, \gamma)$ はある意味で Selberg 積分と似ている。Selberg 積分は次の積分である [43]。

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta, \gamma, N) &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\Delta(x)|^{2\gamma} \prod_{j=1}^N x_j^{\alpha-1} (1-x_j)^{\beta-1} dx_1 \cdots dx_N \\ &= \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(1+\gamma+j\gamma)\Gamma(\alpha+j\gamma)\Gamma(\beta+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+(N+j-1)\gamma)}. \end{aligned} \quad (52)$$

ただし、 $\Delta(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)$ である。この積分はランダム行列論に現れる分配関数の計算と関係している [42]。

もし、我々の求めたい分配関数と対応させるならば、複素化されたある種の Selberg 積分が必要である。実際、複素 Selberg 積分は青本によって考察されており、その論文の最後に我々の知りたい $I(N, \gamma)$ に関するコメントが述べられている [44]。青本による複素 Selberg 積分は次の積分である。

$$I_c(\alpha, \beta, \gamma, N) = \int \cdots \int \prod_{j=3}^N |z_j|^{2\alpha} |z_j - 1|^{2\beta} \prod_{3 \leq j < k \leq N} |z_j - z_k|^{2\gamma} \left(\frac{i}{2}\right)^{N-2} dz_3 \wedge dz_3^* \wedge \cdots \wedge dz_N \wedge dz_N^*. \quad (53)$$

この積分は少なくとも次の領域で定義されている。

$$-1 < \operatorname{Re}\alpha, -1 < \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < -1 \text{ and } (N - 3)\operatorname{Re}\gamma + \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < -1. \quad (54)$$

その値は、

$$I_c(\alpha, \beta, \gamma, N) = \frac{\prod_{j=1}^{N-2} \sin\left(\pi\left(\alpha + \frac{j-1}{2}\gamma\right)\right) \sin\left(\pi\left(\beta + \frac{j-1}{2}\gamma\right)\right) \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)}{(N-2)! \prod_{j=1}^{N-2} \sin\left(\pi\left(\alpha + \beta + \frac{n+j-2}{2}\gamma\right)\right) \sin\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right)} \times I\left(\alpha + 1, \beta + 1, \frac{\gamma}{2}, N - 2\right)^2, \quad (55)$$

となる。青本は次の積分を評価するのは興味深いと述べている。

$$\int \cdots \int_{\mathcal{D}_1^N} \prod_{j=1}^N |1 - z_j z_j^*|^\alpha |z_j|^{2\beta} \prod_{1 \leq j < k \leq N} |z_j - z_k|^{2\gamma} \left(\frac{i}{2}\right)^N dz_1 \wedge dz_1^* \wedge \cdots \wedge dz_N \wedge dz_N^*, \quad (56)$$

ただし、積分領域 \mathcal{D}_1^N は $\mathcal{D}_1 = \{z \mid |z|^2 < 1\}$ で定められる。この積分は無限平面の場合の点渦系の分配関数の計算と関係している。しかし、複素 Selberg 積分のようにガンマ関数の積で書くことはできないであろうと予想が述べられているにとどまり、実際の計算は行われていない。彼のコメントの通り、特別な場合 ($\gamma = 1$) を除いて、我々の計算が確かにガンマ関数の積には書けないだろうことは先に見た式面から想像できる。

ランダム行列論に現れる Ginibre アンサンブル [41] は $\gamma = \frac{\lambda^2\beta}{4\pi} = 1$ と特殊であるが、無限平面点渦系のある特殊な温度の場合の振る舞いに示唆的である。ランダム行列論で、よく使われる結合確率分布と n -点相関関数について解析的に計算ができています。Ginibre アンサンブルの場合、結合確率分布は、

$$P(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{n < m}^N |z_n - z_m|^2 \exp\left(-\sum_{n=1}^N |z_n|^2\right) / Z_N, \quad (57)$$

である。 n -点相関関数は以下のように定義される。

$$R_n(z_1, \dots, z_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int \cdots \int \prod_{j=n+1}^N \left(\frac{dz_j dz_j^*}{2i}\right) P(z_1, z_2, \dots, z_N). \quad (58)$$

Ginibre アンサンブルに対しては 1-点相関関数が

$$R_1(z) = \pi^{-1} e^{-|z|^2} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{|z|^{2l}}{l!}, \quad (59)$$

と与えられている。近似的に、

$$R_1(z) \approx \begin{cases} 1/\pi & \text{for } r^2 \ll N \\ 0 & \text{for } r^2 \gg N, \end{cases} \quad (60)$$

である。つまり、この温度においては点渦は一様分布しようとする [45]。2-点相関関数は

$$R_2(z_1, z_2) = \pi^{-2} \exp(-|z_1|^2 - |z_2|^2) \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} \frac{|z_1|^{2l}}{l!} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{|z_2|^{2l}}{l!} - \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(z_1 z_2^*)^l}{l!} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(z_2 z_1^*)^l}{l!} \right\}, \quad (61)$$

と与えられている。一般の n に対する n -点相関関数の解析表現も与えられている。

$$R_2(z_1, z_2, \dots, z_n) = \pi^{-2} \exp\left(-\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right) \det[K_N(z_i, z_j)]_{i,j=1,\dots,n}. \quad (62)$$

ただし、

$$K_N(z_i, z_j) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(z_i z_j^*)^l}{l!}. \quad (63)$$

4.2 円周境界の場合

円周境界の場合の分配関数は、式 (34) で H に式 (20) を用いて、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} Z(\beta, \nu, V) &= \frac{1}{N! h^N} \pi^{-\frac{\beta}{8\pi} (\sum_n \lambda_n)^2 - N - \frac{\beta}{8\pi} \sum_{n \neq m} \lambda_n \lambda_m + \frac{\beta}{4\pi} \sum_{n,m} \lambda_n \lambda_m} \\ &\times V^{\frac{\beta}{8\pi} (\sum_n \lambda_n)^2 + N + \frac{\beta}{8\pi} \sum_{n \neq m} \lambda_n \lambda_m - \frac{\beta}{4\pi} \sum_{n,m} \lambda_n \lambda_m} \\ &\times \int_{\mathcal{D}_1} \cdots \int_{\mathcal{D}_1} dx_1 dy_1 \dots dx_N dy_N \\ &\times \prod_{n \neq m}^N |z_n - z_m|^{\frac{\beta \lambda_n \lambda_m}{4\pi}} \prod_{n,m}^N |1 - z_n z_m^*|^{-\frac{\beta \lambda_n \lambda_m}{4\pi}} \exp\left(-\frac{\nu V}{\pi} \sum_{n=1}^N \lambda |z_n|^2\right), \quad (64) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $V = \pi R^2$ である。

4.2.1 同符号点渦の場合

$\lambda_n = \lambda (n = 1, 2, \dots, N)$ の場合、分配関数は、

$$\begin{aligned} Z(\beta, \nu, V) &= \frac{1}{N! h^N} \pi^{-N + \frac{\beta \lambda^2 N}{8\pi}} V^{N - \frac{\beta \lambda^2 N}{8\pi}} \\ &\times \int_{\mathcal{D}_1} \cdots \int_{\mathcal{D}_1} dx_1 dy_1 \dots dx_N dy_N \\ &\times \prod_{n \neq m}^N |z_n - z_m|^{\frac{\beta \lambda^2}{4\pi}} \prod_{n,m}^N |1 - z_n z_m^*|^{-\frac{\beta \lambda^2}{4\pi}} \exp\left(-\frac{\nu V \lambda}{\pi} \sum_{n=1}^N |z_n|^2\right), \quad (65) \end{aligned}$$

となり、自由エネルギーは

$$F = -T \ln Z(\beta, \nu, V), \quad (66)$$

であるので、形式的に圧力は、

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\partial F}{\partial V} \\ &= \frac{NT}{V} \left(1 - \frac{\beta\lambda^2}{8\pi}\right) + T \frac{\partial}{\partial V} \ln Y(\beta, \nu, V), \end{aligned} \quad (67)$$

で与えられる。この圧力は流体の圧力ではない³。ここで、

$$\begin{aligned} Y(\beta, \nu, V) &= \int_{\mathcal{D}_1} \cdots \int_{\mathcal{D}_1} dx_1 dy_1 \cdots dx_N dy_N \\ &\times \prod_{n \neq m}^N |z_n - z_m|^{\frac{\beta\lambda^2}{4\pi}} \prod_{n,m}^N |1 - z_n z_m^*|^{-\frac{\beta\lambda^2}{4\pi}} \exp\left(-\frac{\nu V \lambda}{\pi} \sum_{n=1}^N |z_n|^2\right), \end{aligned} \quad (68)$$

である。従って、 $\nu = 0$ の場合は、一見すると圧力の符号が変わる転移温度は

$$T_{c1} = \frac{\lambda^2}{8\pi}, \quad (69)$$

である。しかし、実際には $Y(\beta, \nu, V)$ の積分の発散する項による効果も見積もらなければならない。

非積分関数中の $|z_n - z_m|^a, |1 - z_n z_m^*|^b$ の形のべきによって分配関数が収束する領域は $\beta = 1/T \in \left(-\frac{8\pi}{\lambda^2 N}, \frac{4\pi}{\lambda^2}\right)$ である [39, 65]。正温度領域では転移温度は $T_{c2} = 4\pi/(\lambda^2)$ と考えられる。すると、 $\nu = 0$ の場合の圧力は、分配関数が発散しない領域内 ($T > T_{c2}$) では、

$$p = \frac{N}{V} \left(T - \frac{T_{c2}}{2}\right), \quad (70)$$

であり、それ以下 ($0 < T < T_{c2}$) では同符号渦は鏡像点渦とのバイナリーを形成すると考えられ、圧力

$$p = \frac{NT}{2V}, \quad (71)$$

の理想気体となり、圧力は $T = T_{c2}$ において連続につながると考えられる。この転移は、正の高温度側で点渦が一様に分布する状態から、正の低温度側で境界に近づいて鏡像点渦とバイナリーを形成する状態への転移と考えられる。

分配関数の発散の仕方は $Y(\beta, \nu, V)$ によっているが、基本的に $|z_n - z_m|, |1 - z_n z_m^*|$ のべき指数によっているので、 $\nu = 0$ での転移点と $\nu \neq 0$ での転移点は同じかもしれない。しかし、状態方程式は異なるであろうと思われる。これ以上解析が進められないので、モンテカルロ法などで相図などを調べる必要があるだろう。

分配関数が発散する領域は大正準集団での記述が危うくなる領域である。この危うい領域には負温度領域が含まれている。実際、我々は大正準モンテカルロ法で平衡状態を求めようと試みたが、Kraichnan [32] によって指摘されている超凝縮 (supercondensation) がこの危うい領域で起こ

³この圧力は運動エネルギーも考慮して、2次元クーロン系にした場合の圧力になっている。

ることを確認している。超凝集とは点渦が凝集して一点につぶれてしまうことである。もちろん、普通に時間発展をした場合はこれはエネルギーと angular impulse の制約で起こり得ないが、大正準集団を基にした理論では起こり得る。エネルギーが底なし・天井なしであるために Boltzmann 因子に従った最大確率を取る状態を目指そうとすると超凝縮が自然に起こってしまうのである。同符号点渦の場合は、この超凝縮が起こる領域と現象は、以下の通りである。(1) 負温度領域で同符号点渦が超凝縮する場合がある。(2) 正温度領域で実点渦と鏡像点渦の間での超凝縮が起こりうる。

4.2.2 異符号点渦の場合

N 個の点渦 λ と N 個の点渦 $-\lambda$ があることにすると、分配関数は、

$$\begin{aligned}
 Z(\beta, \nu, V) &= \frac{1}{(N!)^2 h^{2N}} \pi^{-2N + \frac{2\beta\lambda^2 N}{8\pi}} V^{2N - \frac{2\beta\lambda^2 N}{8\pi}} \\
 &\times \int_{\mathcal{D}_1} \cdots \int_{\mathcal{D}_1} dx_1 dy_1 \cdots dx_{2N} dy_{2N} \\
 &\times \prod_{n \neq m}^{2N} |z_n - z_m|^{\frac{\beta\lambda_n \lambda_m}{4\pi}} \prod_{n, m}^{2N} |1 - z_n z_m^*|^{-\frac{\beta\lambda_n \lambda_m}{4\pi}} \exp\left(-\frac{\nu V}{\pi} \sum_{n=1}^{2N} \lambda |z_n|^2\right), \quad (72)
 \end{aligned}$$

となる。圧力は、

$$\begin{aligned}
 p &= -\frac{\partial F}{\partial V} \\
 &= \frac{2NT}{V} \left(1 - \frac{\beta\lambda^2}{8\pi}\right) + T \frac{\partial}{\partial V} \ln \Xi(\beta, \nu, V), \quad (73)
 \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}
 \Xi(\beta, \nu, V) &= \int_{\mathcal{D}_1} \cdots \int_{\mathcal{D}_1} dx_1 dy_1 \cdots dx_{2N} dy_{2N} \\
 &\times \prod_{n \neq m}^{2N} |z_n - z_m|^{\frac{\beta\lambda_n \lambda_m}{4\pi}} \prod_{n, m}^{2N} |1 - z_n z_m^*|^{-\frac{\beta\lambda_n \lambda_m}{4\pi}} \exp\left(-\frac{\nu V}{\pi} \sum_{n=1}^{2N} \lambda_n |z_n|^2\right), \quad (74)
 \end{aligned}$$

である。同符号系に行ったのと同じように、 $\Xi(\beta, \nu, V)$ の発散を調べなければならない。分配関数が収束している領域は $\beta \in \left(-\frac{8\pi}{\lambda^2 N}, \frac{4\pi}{\lambda^2}\right)$ である。 $\nu = 0$ の条件のもとでの正の温度領域では、分配関数が正温度で、かつ、発散しない領域 ($T > T_{c2} = \lambda^2/(4\pi)$) までは、

$$p = \frac{2N}{V} \left(T - \frac{T_{c2}}{2}\right), \quad (75)$$

であり、 $0 < T < T_{c2}$ では、異符号点渦は並進型バイナリー (図1) を形成して、理想気体となり、 $T = T_{c2}$ で連続でつながり、

$$p = \frac{NT}{V}, \quad (76)$$

となる。この転移は Kosterlitz-Thouless(KT) 転移 [47, 48] と同じであると考えられる。 T_{c2} の転移温度は KT 転移の粗い解析で求められるものと同じである。しかし、注意が必要である。(1)

今考えている系は有限系であるので、臨界現象ではない。(2) KT 転移のオリジナルの仕事でなされているモデルは格子定数で log ポテンシャルの発散が打ち切られている [47, 48]。我々のモデルではポテンシャルに特異点が入っているので KT 転移とは少し異なることがあるかもしれない。

異符号点渦の場合は、超凝縮が起こる領域と現象は、以下の通りである。(1) 負温度領域で同符号点渦が超凝縮する。(2) 正温度領域で正点渦と負渦の対の間で超凝縮が起こる。(3) 正温度領域で実点渦と鏡像点渦の間で超凝縮が起こる。

同符号系の場合と同様により詳細を調べるためには、 $\Xi(\beta, \nu, V)$ の振る舞いを特定しなければならないが、解析的にできることはここまでである。モンテカルロ法などで相図を調べることが必要であろう。点渦系にモンテカルロ法を応用するときは小正準モンテカルロ法 [46] を用いるのがよいようである [38]。我々はモンテカルロ法のいくつかの結果を得ている。その結果(円周境界内で同符号・異符号点渦系)は別の機会に論文として発表する予定である。

5 エネルギースペクトル

無限平面の場合の点渦系のエネルギースペクトルは Novikov によって求められている [49]。

$$E(k) = \frac{1}{4\pi k} \left\{ \sum_n^N \lambda_n^2 + 2 \sum_{n<m}^N \lambda_n \lambda_m J_0(k|z_n - z_m|) \right\}. \quad (77)$$

円周境界の場合は、吉田と佐野によって求められている [1]。

$$\begin{aligned} E(k) = & \frac{1}{4\pi k} \left\{ \sum_n^N \lambda_n^2 + 2 \sum_{n<m}^N \lambda_n \lambda_m J_0(k|z_n - z_m|) \right. \\ & - 2 \sum_{n,m}^N \lambda_n \lambda_m \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l \left(\frac{r_m}{R} \right)^l J_l(kR) J_l(kr_n) \cos(l(\varphi_m - \varphi_n)) \\ & \left. + \sum_{n,m}^N \lambda_n \lambda_m \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l [J_l(kR)]^2 \left(\frac{r_m r_n}{R^2} \right)^l \cos(l(\varphi_m - \varphi_n)) \right\}. \quad (78) \end{aligned}$$

ただし、 $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ とおいた。また、

$$\varepsilon_l = \begin{cases} 1 & l=0 \\ 2 & l \geq 1. \end{cases} \quad (79)$$

である。式 (78) は見て分かるように、「無限平面として見た場合のエネルギー」(式 (77)) + 「境界の効果」という形になっている。

この節では、上のエネルギースペクトルの表式から平衡状態におけるエネルギースペクトルのべき則を評価することを目標とする [3]。この時、前節で見たランダム行列論とのアナロジーから 2-点相関関数が平衡状態を特徴づけるにあたって非常に有用であることに注目する。エネルギースペクトルのべき則は、2-点相関関数から評価することになる。2-点相関関数は以下のようにして定義される。

$$R_2(z_1, z_2) = \frac{N(N-1)}{Z} \int \dots \int \prod_{j=3}^N \left(\frac{dz_j dz_j^*}{2i} \right) e^{-\beta H - \nu I}. \quad (80)$$

ただし、 Z は分配関数である。無限平面系では、linear impulseの影響が無いような場合を考えている。そして、その場合では $N \rightarrow \infty$ の時は、並進対称性があるため、例の特別な場合 ($\gamma = 1$) に対しては、この関数は2点間の距離 $r = |z_1 - z_2|$ の関数になる。

$$R_2(r) = R_2(z_1, z_2), \quad (81)$$

しかし、無限平面系で $\gamma \neq 1$ の場合と円周境界内の場合は、そもそも式 (80) の積分を実行するのは容易ではない。そこで、無限平面系で $\gamma \neq 1$ の場合は、単純に点渦間の距離のヒストグラムを測って、 $R_2(r)$ とする。また、円周境界系では、鏡像点渦の効果は無視して、円周境界内の点渦に関して距離を測り、数値的にヒストグラムを書いたものを $R_2(r)$ として扱うことにする。

5.1 無限平面の場合

無限平面の場合について、Novikov のエネルギースペクトル [49] を用いて、高木らは数値的にエネルギースペクトルのべき則を評価した [50]。我々は2点相関関数を使ってそのべき則を見積もることにする。

5.1.1 同符号点渦の場合

同符号点渦の場合 ($\lambda_n = \lambda, n = 1, \dots, N$)、エネルギースペクトルは、

$$E(k) = \frac{1}{4\pi k} \left\{ N\lambda^2 + 2\lambda^2 \sum_{n < m}^N J_0(k|z_n - z_m|) \right\}, \quad (82)$$

となる。 k が大きい所では第二項の Bessel 関数はゼロであるから $E(k) \sim k^{-1}$ である。また、 k が小さいところでは Bessel 関数は定数であるから、同様に $E(k) \sim k^{-1}$ となる。問題は k が中間領域においてどのような振る舞いをするかである。 N が大きな場合は、2点相関関数を使うと式 (82) における和の部分を下のように

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= 2\lambda^2 \sum_{n < m}^N J_0(k|z_n - z_m|) \\ &\simeq \lambda^2 \int_0^\infty dr R_2(r) J_0(kr), \end{aligned} \quad (83)$$

と、評価できる。ここで問題になるのは、平衡状態における $R_2(r)$ の振る舞いである。数値計算の結果、平衡状態における $R_2(r)$ は以下の関数型によくフィットされることが確認できた。

$$R_2(r) \approx c_1 r^a \exp(-c_2 r^d). \quad (84)$$

この関数型はランダム行列論に現れる実ランダム行列に対する最近接準位間隔分布に非常によく似ている [42]。ちなみにランダム行列論で知られているアンサンブルに対応する最近接準位間隔分布を以下に挙げておく。(ガウス直交アンサンブル (GOE, $\beta = 1$), ガウスユニタリーアンサンブル

ル (GUE, $\beta = 2$)、ガウスシンプレクティックアンサンブル (GSE, $\beta = 4$)⁴

$$P_{\beta=1}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right), \quad (\text{GOE}), \quad (85)$$

$$P_{\beta=2}(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right), \quad (\text{GUE}), \quad (86)$$

$$P_{\beta=4}(s) = \frac{2^{18}}{36\pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right), \quad (\text{GSE}). \quad (87)$$

もし、ランダム行列論との関係を考えるならば、複素数で書かれた点渦の位置を行列の固有値とみるわけであるから、複素行列のアンサンブルを考えるべきである。それは Ginibre アンサンブルであって、特別な温度の場合 ($\gamma = \frac{\lambda^2 \beta}{4\pi} = 1$) にのみ点渦系と対応することは先の節で述べたとおりである。いずれにせよ、数値的な観測結果である、式 (84) (ただし、 $d = 2$) を認めると、式 (83) を解析的に評価できる。

$$\mathcal{I} \simeq c_1 \lambda^2 \int_0^\infty dr r^a \exp(-c_2 r^2) J_0(kr). \quad (88)$$

次の積分の評価は [51] に載っている。

$$\int_0^\infty dx x^\mu e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x) = \frac{\beta^\nu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{2^\nu \alpha^{\frac{\mu+\nu+1}{2}} \Gamma(\nu+1)} F\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \nu+1; -\frac{\beta^2}{2\alpha}\right), \quad (89)$$

ただし、 $F(a, b; z)$ は合流型超幾何関数である ($\text{Re}(\alpha) > 0$, $\text{Re}(\mu + \nu) > -1$)。 $|z| \rightarrow \infty$ における、 $F(a, b; z)$ の漸近形は、

$$\begin{aligned} F(a, b; z) \sim & A \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n (a-b+1)_n}{n! z^n} \\ & + B \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(z)} e^z z^{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_n (b-a)_n}{n! z^n}, \end{aligned} \quad (90)$$

である [52]。ただし、 $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ であり、 A と B は Stokes 係数である。我々はこの漸近展開において Stokes 現象を考えなければならない。負の実数 z については、 $A = 1$ かつ $B = 0$ と取るべきであることから、主要項の評価は

$$F(a, b; z) \sim (-z)^{-a}, \quad (91)$$

となる。従って、 \mathcal{I} の評価は、

$$\mathcal{I} \sim k^{-(a+1)}, \quad (92)$$

となる。それゆえ、エネルギースペクトルの漸近形は、

$$E(k) \sim C_2 k^{-(a+2)} + C_3 k^{-1}, \quad (93)$$

⁴ここに現れる β は、我々が先に点渦系に定義した β と同じ温度の役割をしているが、ランダム行列論が扱っていると見なせる系は我々のものとは異なるので別物だと思ってほしい。ただし、Ginibre アンサンブルに関しては完全な対応関係が見つるのは先に見たの $\gamma = \frac{\lambda^2 \beta}{4\pi}$ 場合である。

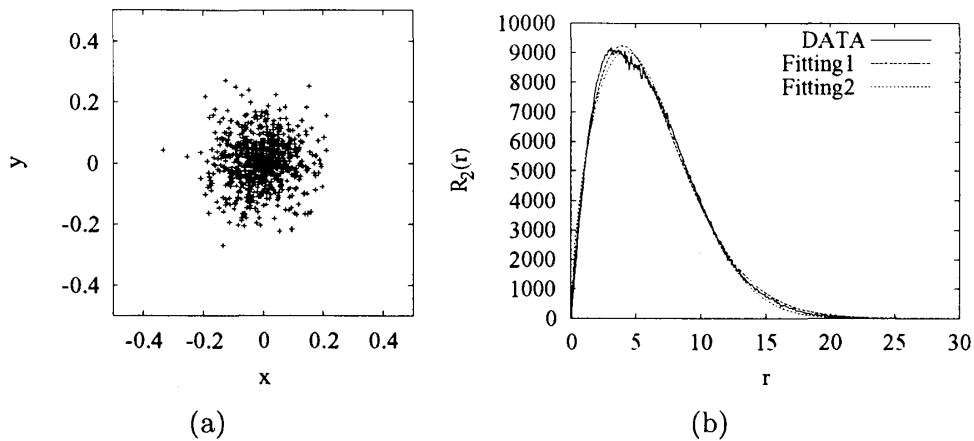


図 8: 平衡状態の例 (無限平面系): (a) 平衡状態での点渦の配置、 $N = 10000$. $\lambda = 1.0$. (b)(a) に対応した $R_2(r)$ 、実線は (a) から取ったデータ。残りの波線・点線はそれぞれ式 (95) と式 (94) によってフィッティングしたもの。

となる。もし、 $a = 1$ であると、べきは k^{-3} となり、自由に緩和する二次元乱流のものと一致する [53–56]。実際に観測されるのは $d \neq 2$ であるが、 r が小さいところでの $R_2(r)$ の振る舞いがエネルギースペクトルの漸近形に効いていることは式 (82) から分かるので、エネルギースペクトルのべきは $d \neq 2$ での a の値によって決まっている。

次に、我々の理論から求まるべきが実際にあっているか確かめてみる。図 8(a) に典型的な平衡状態での点渦の分布を載せた ($N = 1000$, $E = 1.854 \times 10^5$, $I = 1.014 \times 10^1$, $M = -6.346 \times 10^{-3} + i1.586 \times 10^{-3}$)。この状態は乱数によって正規分布させた点渦系を時間発展し、平衡状態と思われる状態まで十分時間発展させて得たものである。この平衡状態における $R_2(r)$ を図 8(b) に載せた。まず、次の関数型でフィッティングをしてみた。

$$R_2(r) = br^a \exp(-cr^2). \quad (94)$$

その結果は、 $a = 0.5673$ 、 $b = 42506$ 、 $c = 40.17$ である。パラメータを増やして試した中で、最もフィッティングが良かったのは、次の関数型である。

$$R_2(r) = br^a \exp(-cr^d). \quad (95)$$

この場合、 $a = 0.6365$ 、 $b = 55565$ 、 $c = 31.81$ 、 $d = 1.795$ であった。図 9 にこの分布に対するエネルギースペクトルを載せてある。 k^α , ($\alpha \approx -3$) の振る舞いから k^{-1} のテールの振る舞いに遷移する点を $k_2^* = 1/r_{\min}$ とおく。ただし、 r_{\min} は二点渦間の最小間隔である。一方で、 k が小さい領域での k^{-1} の振る舞いから k^α , ($\alpha \approx -3$) の振る舞いに遷移する点を $k_1^* = 1/r_{\text{size}}$ と置くことにする。 r_{size} は大体点渦の固まりの分散である。ここで、 $k_1^* \leq k \leq k_2^*$ の領域を中間領域と呼ぶことにする。式 (94) による中間領域におけるべきの予想は式 (93) より -2.5673 である。図 9 から観測されたべきは -2.65 である。もし、フィッティング関数型を式 (95) にすると、べきは -2.6365 となり、一致が少し良くなる。

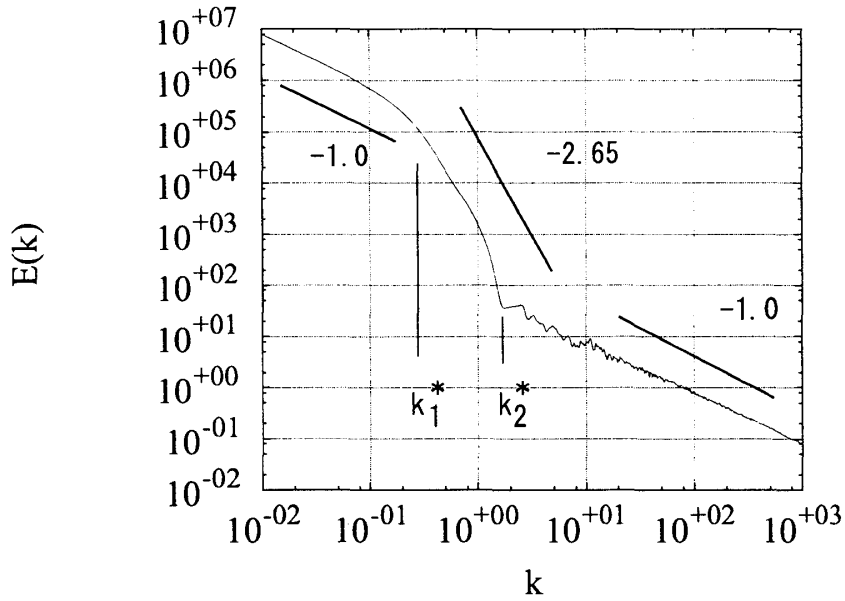


図 9: エネルギースペクトル $E(k)$ (図 8 に対応) (無限平面系): $N = 1000, \lambda = 1.0$. 中間領域のべきは -2.65 である。 k が小さい所と大きな所のべきは -1 である。

まとめると、いくつか数値計算を行ったところでは、無限平面の場合、同符号点渦系では、エネルギースペクトルは、

$$E(k) \sim \begin{cases} k^{-1}, & (k < k_1^*), \\ k^{-\alpha}, & (k_1^* < k < k_2^*), \\ k^{-1}, & (k_2^* < k), \end{cases} \quad (96)$$

となることが分かった。ただし、 $\alpha = 1.8 \sim 3.5$ である。 α は温度に依存している。つまり、エネルギー、angular impulse によっている。

5.1.2 異符号点渦の場合

異符号点渦の場合は、循環を $\lambda_n = \lambda (n = 1, \dots, M), \lambda_n = -\lambda (n = M + 1, \dots, 2N)$ とおいて考える。この場合、条件 $\sum_n \lambda_n \neq 0$ は満たされていないといけない。エネルギースペクトルは、

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{1}{4\pi k} \left\{ 2N\lambda^2 + \lambda^2 \sum_{n \neq m, ++} J_0(k|z_n - z_m|) \right. \\ &\quad \left. - \lambda^2 \sum_{n \neq m, +-,-+} J_0(k|z_n - z_m|) + \lambda^2 \sum_{n \neq m, --} J_0(k|z_n - z_m|) \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi k} \left\{ 2N\lambda^2 + I_{++} + I_{+-,-+} + I_{--} \right\}. \end{aligned} \quad (97)$$

である。ここで、和における $n \neq m, ++$ は、循環が正の点渦ペアだけについて和をとるという意味である。残りの和も同様の定義である。点渦の符号毎に $++, +-, -+, --$ の場合を考え、それに対応した 2-点相関関数を考えなければならない。これらを $R_2^{(++)}(r), R_2^{(+-,-+)}(r), R_2^{(--)}(r)$

と置こう。これから、以下の項を評価すれば良いことになる。

$$\begin{aligned}
 I_{++} &= \lambda^2 \sum_{n \neq m, ++} J_0(k|z_n - z_m|) \\
 &\simeq \lambda^2 \int_0^\infty dr R_2^{(++)}(r) J_0(kr).
 \end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned}
 I_{+-, -+} &= -\lambda^2 \sum_{n \neq m, +-, -+} J_0(k|z_n - z_m|) \\
 &\simeq -\lambda^2 \int_0^\infty dr R_2^{(+-, -+)}(r) J_0(kr).
 \end{aligned} \tag{99}$$

$$\begin{aligned}
 I_{--} &= \lambda^2 \sum_{n \neq m, --} J_0(k|z_n - z_m|) \\
 &\simeq \lambda^2 \int_0^\infty dr R_2^{(--)}(r) J_0(kr).
 \end{aligned} \tag{100}$$

しかし、正と負の点渦が並進型バイナリーを作って、無限遠に飛んで行ってしまふ可能性があるため、この無限平面の場合で異符号点渦系に対して実際に数値計算をすることはしないことにする。ここで定義した $R_2^{(++)}(r), R_2^{(+-, -+)}(r), R_2^{(--)}(r)$ は、次に述べる円周境界内異符号点渦系の場合に使うことになる。

5.2 円周境界の場合

5.2.1 同符号点渦の場合

負温度の場合、円周境界内の実点渦の平衡状態に対して測った $R_2(r)$ は、式 (84) に良く合うことを確認した。これについて以下に述べることにしよう。負温度の場合、凝集を起こして境界から離れているために境界からの効果はあまり効かない、つまり、式 (78) において第三、四項はあまり大きな値を持たない。そのため、中間領域のエネルギースペクトルのべきは、ほとんど式 (78) における第一、二項で決まる。そのため、無限平面の場合で同符号の場合に考えたのと同じ方法で、エネルギースペクトルのべきを評価できる。 $R_2(r)$ の形が式 (84) であるならば、エネルギースペクトルの形は、 $k > k_1^*$ の部分で、

$$E(k) \sim C_2 k^{-(a+2)} + C_3 k^{-1}, \tag{101}$$

となる。

図 10(a) に平衡状態での分布をプロットした。それに対応したエネルギースペクトルは図 10(b) になる。一目して分かることは、無限平面の場合と異なり、 k が小さいところでは k^{α_1} , $\alpha_1 > 0$ となる点である。これは、有限系であるため低波数領域の振る舞いが異なるためである。フィッティングの結果、この領域のべきは $\alpha_1 = 2.5$ である。エネルギースペクトルの中間領域のべきは -2.92 と、自由に緩和する二次元乱流のべき則 -3 に近い。

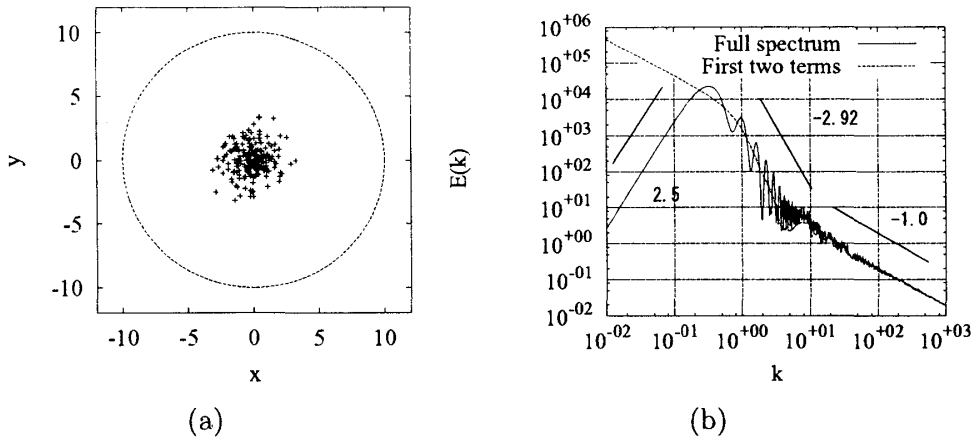


図 10: 平衡状態での分布（負温度状態）と対応したエネルギースペクトル：(a) 負温度に対応した平衡状態での点渦の配置（円周境界）。 $N = 240$, $E = 8.58 \times 10^3$, $I = 5.74 \times 10^2$, $\lambda = 1.0$, $R = 10.0$. (b)(a) に対応したエネルギースペクトル中間領域のべきは -2.92 である。

正温度の場合に、平衡状態とエネルギースペクトルをプロットしたのが、図 11 である。この場合、境界からの効果が効いてくるので、エネルギースペクトルが式 (78) の第一、二項で評価した部分と全体の評価したスペクトルを比較すると、境界の効果でエネルギースペクトルが嵩上げされていることが分かる。第一、二項からの寄与はほとんど k^{-1} であって自己エネルギーの寄与と同じだが、境界の効果で中間領域のべきが -1.96 となっている。

円周境界で同符号点渦系の場合は、エネルギースペクトルは、

$$E(k) \sim \begin{cases} k^{\alpha_1}, & (k < k_1^*), \\ k^{-\alpha_2}, & (k_1^* < k < k_2^*), \\ k^{-1}, & (k_2^* < k), \end{cases} \quad (102)$$

となる。ただし、 $\alpha_1 = 2.5 \sim 2.9$, $\alpha_2 = 1.8 \sim 3.5$ である。 α_2 は温度に依存している。つまり、エネルギー、angular impulse によっている。

5.2.2 異符号点渦の場合

まず、負温度の場合を紹介しよう。図 7(b) $\tau = 32$ で示された負温度平衡状態について考える。図 12(a) にこの分布に対応した 2-点相関関数、循環の正負のペアごとに分けて、 $R_2^{(++)}(r)$, $R_2^{(+-)}(r)$, $R_2^{(-+)}(r)$, $R_2^{(--)}(r)$, がプロットしてある。この図を見て分かるように、 $R_2^{(++)}(r)$ と $R_2^{(--)}(r)$ は、ほとんど重なっており、式 (84) のフィッティング関数型に合っている。同様に、 $R_2^{(+-)}(r)$ と $R_2^{(-+)}(r)$ はほとんど重なっているが、ピーク位置は先のものとは大きく異なっている。そのピーク位置は $r = 45$ であり、これはちょうど正負クランプの間の距離となっている。この平衡状態に対応したエネルギースペクトルを図 12(b) に載せている。中間領域のべきは -1.94 であり、先の系と比べると、このべきは -3 よりも随分小さい。理由は、正負点渦であるため、エネルギースペクトルの表式の中で和を取るときにキャンセルが起こるためだと思われる。エネルギースペクトル

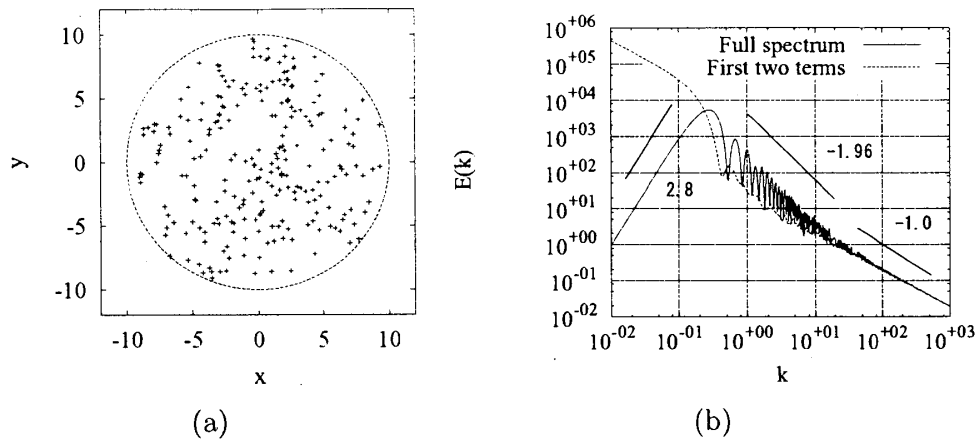


図 11: 平衡状態における点渦の配置 (正温度状態) と対応したエネルギースペクトル: (a) 平衡状態における点渦の配置 (正温度状態) $N = 240$, $E = 1.71 \times 10^3$, $I = 9.94 \times 10^3$, $\lambda = 1.0$, $R = 10.0$. (b)(a) に対応したエネルギースペクトル中間領域におけるべきは -1.96 である。

の形は、

$$E(k) \sim \begin{cases} k^{\alpha_1}, & (k < k_1^*), \\ k^{-\alpha_2}, & (k_1^* < k < k_2^*), \\ k^{-1}, & (k_2^* < k), \end{cases} \quad (103)$$

である。ただし、 $\alpha_1 = 4.81$, $\alpha_2 = 1.94$ である。このエネルギースペクトルの形は同符号点渦系のエネルギースペクトルに近いが、中間領域のべきが少し異なり、 α_1 の値も異なる。

次に、異符号点渦系で正温度の場合を紹介する。図 13(a) に図 7(a) $\tau = 128$ で示された正温度平衡状態に対応する 2-点相関関数 $R_2^{(++)}(r)$, $R_2^{(+-)}(r)$, $R_2^{(-+)}(r)$, $R_2^{(--)}(r)$ をプロットしてある。見て分かる通り、 $R_2^{(++)}(r)$, $R_2^{(--)}(r)$, $R_2^{(+-)}(r)$, $R_2^{(-+)}(r)$ が重なっている。図 13(b) には対応したエネルギースペクトルをプロットした。これを見ると我々が中間領域と呼んでいた、 $k^{-\alpha_2}$, ($\alpha_2 = 1.9 \sim 3.5$) の領域が存在しない。K が小さい領域 (k^{α_1} , $\alpha_1 = 2.97$) と自己エネルギーの領域 (k^{-1}) しかない。つまり、エネルギースペクトルの表式、式 (78) における第二、三、四項における和がキャンセルしあって、自己エネルギーの依存性しか残らないことを示している。エネルギースペクトルの形をまとめると、

$$E(k) \sim \begin{cases} k^{\alpha_1}, & (k < k_1^* = k_2^*), \\ k^{-1}, & (k_2^* = k_2^* < k), \end{cases} \quad (104)$$

となる。ただし、 $\alpha_1 \approx 2.97$ である。このように正温度の場合は、負温度の場合とは非常に異なるエネルギースペクトルを示す。

この節のまとめをしておく。点渦系の平衡状態は 2-点相関関数によって特徴づけるのが自然であることが分かった。特に、無限平面の場合については、点渦系のエネルギースペクトルはこの 2-点相関関数によって評価する事ができる。円周境界系では、温度の値 (正負) によってエネルギースペクトルの中間領域のべきが異なり、このべきに温度依存性 (或いは、エネルギー・慣性

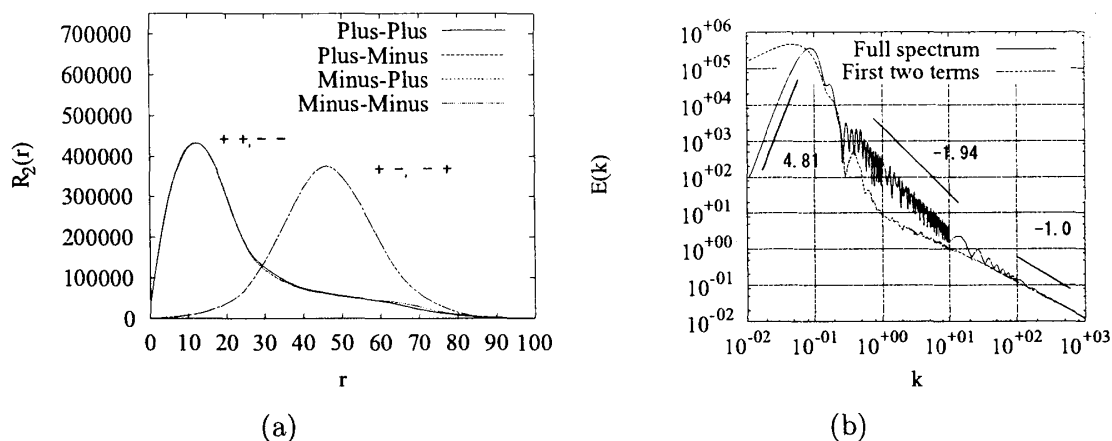


図 12: 2-点相関関数とエネルギースペクトル: (a) 図 7(b) の平衡状態に対応した 2-点相関関数 (負温度状態)。 $R_2^{(++)}(r)$, $R_2^{(+-)}(r)$, $R_2^{(-+)}(r)$, $R_2^{(--)}(r)$ 。 $E = 2.69 \times 10^4$, $I \approx 0$, $E_{2N} = 2.69 \times 10^4$, $I_{2N} \approx 0$, $R = 50.0$, $\lambda = \pm 0.15$, $N_{tot} = 6724$ 。 (b) 最終状態に対するエネルギースペクトル (図 7(b) $\tau = 32$ に対応、負温度状態)。中間領域のべきは -1.94 である。

モーメント依存性) が現れることが分かった。また、平衡状態の点渦系のエネルギースペクトルのべき則は、連続場で得られている、逆カスケード領域の $-5/3$ 則や自由に緩和する乱流に見られる -3 則 [53-56] にはならず、ユニバーサルでは無いことが分かった。おそらく、流体力学で普通に扱われている連続場の実験・理論は、点渦系の高エネルギー状態に対応するのではないと思われる。つまり、系の物理が変わらないように循環を $\lambda \rightarrow \lambda/N$ とスケールして、点渦の数を無限に飛ばす極限操作 (連続極限) をする事で、エネルギースペクトルがユニバーサルになるのかもしれない。これは確かめたことではないので、単なる予想に過ぎず、間違っているかもしれない。

6 まとめ

この小文では、少数点渦系のダイナミクスから始めて、Onsager 理論とその数値的検証、さらに、大正準集団による平衡統計力学、エネルギースペクトルの評価まで見てきた。普通の流体力学の研究者から見ると少し風変わりな研究スタイルであったかもしれない。しかし、我々は点渦の粒子描像に立つことで、統計力学的視点から理論を発展することができた。統計力学の専門家からするとおそらく自然な扱いであると思われるだろう。

しかし、統計力学の問題としては大きな困難が存在した。つまり、点渦系の大正準集団による記述がうまくいかなくなることである。それは分配関数の発散という形で現れた。これは一つには我々の考えている系が有限系であって加法性を満たしていないことに起因する可能性がある。小正準集団と大正準集団の等価性が、あるパラメータ領域 (温度領域) において破れているのであろう。小正準集団から大正準集団に移行する際に仮定する熱浴をつけるという操作にも問題があるのかもしれない。確かに、Tsallis 統計が使われている場合もあり [58]、大正準集団 (Boltzmann 統計) とは異なる統計が必要なかもしれない。しかし、Tsallis 統計がうまくいくこともあるか

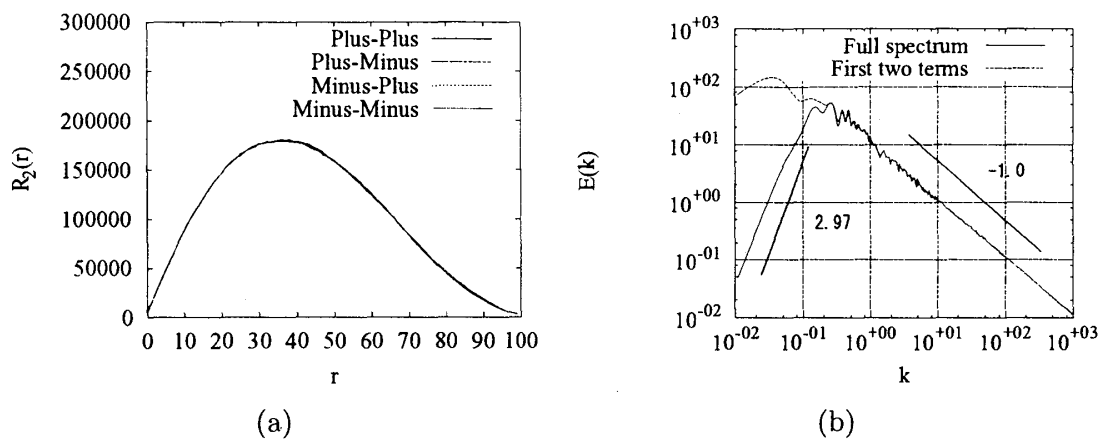


図 13: 図 7(a) $\tau = 128$ に対応した正温度状態における 2-点相関関数とエネルギースペクトル: (a) 2-点相関関数、 $R_2^{(++)}(r)$ 、 $R_2^{(+-)}(r)$ 、 $R_2^{(-+)}(r)$ 、 $R_2^{(--)}(r)$ 。 $E = 24.1$ 、 $I \approx 0$ 、 $R = 50.0$ 、 $\lambda = \pm 0.15$ 、 $N_{tot} = 6920$ 。(b) エネルギースペクトル。中間領域が無いのが特徴的である。

もしれないが、少なくとも小正準集団による記述はうまくいっているようである（正確には、小正準集団プラス平均場近似）[33–36,38]。Onsager 理論も小正準集団を出発点にしている。点渦系を統計力学的に扱うには小正準集団を使うのが、最も安全であるのであろう。また、二次元渦系（連続系、Euler 流体）に統計力学を応用する際、正準集団を使うにしても少し工夫が必要であることが分かっている。詳しくは文献にあたって頂きたい [59–62]。

流体力学の専門家からすると、統計力学がうまく働くのであるから点渦系ではエルゴード性が成り立っているのかと疑問に思われる方もいるかもしれない。残念ながら、点渦系ではエルゴード性が成り立たないという論文がある [64]。別に驚くことは無い。普通に統計力学の研究対象とされている系でもエルゴード性が破れている系はある。統計力学に仮定されるエルゴード性は非常に強い数学的要請であり、実際には、もう少し弱い形でも良いのかもしれない。また、粒子数を増やすことによって大数の法則が成り立つことが、エルゴード性の強い要請を打ち負かしてしまうのかもしれない。実は、この辺りの問題は統計力学の基礎的な問題として、まだ解かれていない問題であるように思う。しかし、その道の専門家を除いて、普通に統計力学を使う場合（大自由度系を考える場合）には、特に過敏にエルゴード性を気にする必要は無いだろう。

統計理論を使う以前に、もっと根本的な問題もある。我々は点渦系を用いて二次元 Euler 流体の挙動を知ろうとしている。しかし、点渦系はあくまで二次元 Euler 流体を近似するに過ぎない。点渦系が流体極限で二次元 Euler 流体に向かうか？を議論することは難しい問題である。数理物理学の結果として [65–68] があるが、特に、この問題については [67] に記述がある。この問題は避けられない問題であるようにも思える。また、例えば、剛体球系の Boltzmann 方程式から Navier-Stokes 方程式が導き出せるのはよく知られていることであるが、これと類似のこともしても、つまり、点渦系の運動論 [69] を発展させても、Euler 方程式は出てこないであろう。粗視化が入るから Navier-Stokes 方程式が導かれるに過ぎないだろう。実際、点渦系と Euler 方程式との間の違いは、Sommeria [63] によって指摘されているように、ある時間スケールまでは点渦系は Euler 方程

式系をよく近似するだろうが、それ以後は「ずれ」が生じ、良い近似にはならないであろう。もし、これが正しいとすると、我々が大正準・小正準モンテカルロ法で求める平衡状態は真の Euler 方程式系の平衡状態を近似していない可能性もあり得る。このように、実は、非常に微妙な問題を含んでいるのかもしれない。VIC(Vortex in Cell) 法 [9] によるシミュレーションにも同じような問題が潜んでいるように思われる。無限個の Casimir 保存量を持つ Euler 流体は数値的にも実際の系としても、どれだけ実現可能であるのか非常に微妙な問題であるようである。

我々は点渦系のエネルギースペクトルの解析的な表式を与え、そのスケール則を求めた。平衡状態における点渦系のエネルギースペクトルのべき則はユニバーサルではないことが分かった。当然、このエネルギースペクトルは実際の系でどのようになっているか、比較が必要であると考えられる。エネルギースペクトルを非中性プラズマの実験から求めることは比較的簡単ではないかと思われる。是非とも、点渦系として求められるエネルギースペクトルと実際の連続場でのエネルギースペクトルの差異を明確にするためにも、実験データからエネルギースペクトルを求めて頂きたい。

主に、平衡状態の研究を紹介したが、二次元渦系の非平衡過程の問題も面白い。いくつか例を挙げる。

1. violent relaxation (初期の速い緩和)。
2. 平衡状態へのゆっくりとした緩和。
3. 渦の合体。
4. 渦結晶。

二次元渦系は三次元重力系と似ている点が多い。例えば、二次元 Euler 方程式は三次元無衝突 Boltzmann 方程式 (Vlasov 方程式) と形が似ているため、緩和の仕方が似ているという指摘がある。上に挙げた violent relaxation という言葉は元々 astrophysics の分野で使われている言葉である。このアナロジーに注目した研究もある [70]⁵。渦結晶については、クランプを点渦と見なした場合の扱いについては [71] にある。連続場で見られる渦結晶については、非中性プラズマの実験などで現象として見えるものに関して [6, 7, 9, 11] がある。理論といえるものは渦結晶の状態をエントロピー法で捉えようという regional maximum entropy method [8] ぐらいしかない。唯一、渦結晶の一側面を捉えているものとして、渦度の高いところは渦の合体が起こっても高さは変わらないとして (高エネルギー状態を保つわけであるから当たり前と言えども)、孤立渦の個数の緩和のべき則を求めた [72] がある。渦結晶は非平衡系の問題として最も面白い問題と考えられるが、そのメカニズムについてはまだまだ分からないことが沢山ある。今後の理論の発展が注目される問題である。また、量子渦における渦格子も我々の解析したい渦結晶と関係があるかもしれない [73]。

⁵ただし、この文献の Chavanis による扱いは非常に荒っぽく、間違った結果を出している点もあるので注意が必要。

謝辞

日頃、この研究に対して我々を叱咤激励をし続けてくださった、富田博之教授、際本泰士教授に感謝します。また、この文章を書く機会を与えてくださった武末真二助教授に改めて感謝いたします。

参考文献

- [1] T.Yoshida and M.M.Sano *J.Phys.Soc.Jpn* **74**, 587 (2005);
- [2] Y.Yatsuyanagi, Y.Kiwamoto, H.Tomita, M.M.Sano, T.Yoshida and T.Ebisuzaki *Phys.Rev.Lett.* **94**, 054502 (2005).
- [3] M.M.Sano, Y.Yatsuyanagi, T.Yoshida, H.Tomita “Statistical mechanical estimate of energy spectrum for N-point vortex systems”, submitted for publication (2005).
- [4] T.B.Mitchell, C.F.Driscoll, and K.S.Fine *Phys.Rev.Lett.* **71**, 1371 (1993).
- [5] D.A.Schecter and D.H.E.Dubin *Phys.Rev.Lett.* **83**, 2191 (1999).
- [6] X.-P.Huang and C.F.Driscoll *Phys.Rev.Lett.* **72**, 2187 (1994).
- [7] K.S.Fine, A.C.Cass, W.G.Flynn, and C.F.Driscoll *Phys.Rev.Lett.* **75**, 3277 (1995).
- [8] D.Z.Jin and D.H.E.Dubin *Phys.Rev.Lett.* **80**, 4434 (1998).
- [9] D.A.Schecter, D.H.E.Dubin, K.S.Fine, and C.F.Driscoll *Phys.Fluids* **11**, 905 (1999).
- [10] D.Z.Jin and D.H.E.Dubin *Phys.Rev.Lett.* **84**, 1443 (2000).
- [11] C.F.Driscoll, D.Z.Jin, D.A.Schecter, E.J.Moreau, and D.H.E.Dubin *Physica Scripta* **T84**, 76 (2000).
- [12] 際本泰士 : 「非中性プラズマの渦」、*Journal of Plasma and Fusion Research*, **77**, 338 (2001).
- [13] 際本泰士 : 「非中性プラズマ中の渦運動」、*日本物理学会誌*, **56**, 253 (2001).
- [14] Y.Kiwamoto, K.Ito, A.Sanpei and A.Mohri *Phys.Rev.Lett.* **85**, 3173 (2000).
- [15] A.Sanpei, Y.Kiwamoto, K.Ito, and Y.Soga *Phys.Rev.E* **68**, 016404 (2003).
- [16] Y.Soga, Y.Kiwamoto, A.Sanpei and J.Aoki *Phys.Plasma* **10**, 3922 (2003).
- [17] H.von Helmholtz *Phil.Mag.* **4(33)**, 485 (1858).
- [18] G.R.Kirchhoff *Vorlesungen über Mathematische Physik I*, (Teubner, Leipzig, 1876).

- [19] W.Thomson *Nature* **18**, 13 (1878); W.T.Kelvin, *Mathematical and Physical Papers*(Cambridge University Press, Cambridge, 1910), Vol.4, pp.135-140.
- [20] T.H.Havelock *Phil.Mag.* **11**, 617 (1931).
- [21] G.K.Morikawa and E.V.Swenson *Phys.Fluids* **14**, 1058 (1971).
- [22] L.G.Kurakin and V.I.Yudovich *Chaos* **12**, 574 (2002).
- [23] P.K.Newton *The N-Vortex Problem: Analytical Techniques* (Springer, New York, 2000).
- [24] H.Yoshida *Phys.Lett.A*, **150**, 262 (1990).
- [25] D.I.Pullin and D.G.Saffmann, *Proc.Roy.Soc.Lond.*, **A432**, 481 (1991).
- [26] H.Aref and N.Pomphrey *Proc.R.Soc.Lond.* **A380**, 359 (1982).
- [27] L.Onsager *Nuovo Cimento Suppl.* **6**, 279 (1949).
- [28] G.L.Eyink and K.R.Screenivasan “Onsager and the Theory of Hydrodynamic Turbulence”, preprint (2005).
- [29] T. Narumi, R. Susukita, T. Ebisuzaki, G. McNiven, and B. Elmegeen *Mol. Simul.* **21**, 401 (1999).
- [30] R. Susukita, T. Ebisuzaki, B. G. Elmegeen, H. Furusawa, K. Kato, A. Kawai, Y. Kobayashi, T. Koishi, G. D. McNiven, T. Narumi, and K. Yasuoka *Comput. Phys. Comm.* **155**, 115 (2003).
- [31] J. Makino, T. Fukushige, M. Koga, and K. Namura *Publ. Astron. Soc. Japan* **55**, 1163 (2003).
- [32] R.H.Kraichnan *J.Fluid Mech.* **67**, 155 (1975).
- [33] S.Kida *J.Phys.Soc.Jpn.* **39**, 1395 (1975).
- [34] G.Joyce and D.Montgomery *J.Plasma Phys.* **10**, 107 (1973).
- [35] Y.B.Pointin and T.S.Lundgren *Phys.Fluids.* **19**, 1459 (1976).
- [36] T.S.Lundgren and Y.B.Pointin *J.Stat.Phys.* **17**, 323 (1977).
- [37] C.E.Seyler, Jr. *Phys.Fluids* **19**, 1336 (1976).
- [38] P.A.Smith and T.M.O’Neil *Phys.Fluids* **B2(12)**, 2961 (1990).
- [39] O.Bühler *Phys.Fluids* **14**, 2139 (2002).

- [40] A.C.Ting, H.H.Chen, and Y.C.Lee *Physica D* **26**, 37 (1987).
- [41] J.Ginibre *J.Math.Phys.* **6**, 440 (1965).
- [42] M.L.Mehta *RANDOM MATRICES: REVISED AND ENLARGED Second Edition* (Academic Press, San Diego, 1991).
- [43] A.Selberg *Norsk Matematisk Tidsskrift.*, **26**, 71 (1944).
- [44] K.Aomoto *Quart.J.Math.Oxford* **38**, 385 (1987).
- [45] S.M.Assad and C.C.Lim *Discrete and Continuous Dyamical Systems B* **5**, 1 (2005).
- [46] M.Creutz *Phys.Rev.Lett.* **50**, 1411 (1983).
- [47] J.M.Kosterlitz and D.J.Thouless *J.Phys.C* **6**, 1181 (1973).
- [48] J.M.Kosterlitz *J.Phys.C* **7**, 1046 (1974).
- [49] E.A.Novikov *JETP* **41**, 937 (1976).
- [50] R.Takaki and M.Utsumi *Forma* **7**, 107 (1992).
- [51] I.S.GradshTEyn and I.M.Ryzhik *Table of Integrals, Series and Products, Fifth Edition* (Academic Press, San Diego, 1994).
- [52] F.W.J.Olver *Aysmptotics and Special Functions* (A K Peters, Massachusetts, 1997).
- [53] R.H.Kraichnan *Phys.Fluids* **10**, 1417 (1967).
- [54] G.K.Batchelor *Phys.Fluids* **12** Suppl. II, 233 (1969).
- [55] R.H.Kraichnan and D.Montgomery *Rep.Prog.Phys.* **43**, 547 (1980).
- [56] P.Tabeling *Phys.Rep.* **362**, 1 (2002).
- [57] E.D.Siggia and H.Aref *Phys.Fluids* **1981**, 171 (1981).
- [58] B.M.Boghosian *Phys.Rev.E* **53**, 4754 (1996).
- [59] J.Miller *Phys.Rev.Lett.* **65**, 2137 (1990).
- [60] J.Miller, P.B.Weichman, and M.C.Cross *Phys.Rev.A* **45**, 2328 (1992).
- [61] R.Robert and J.Sommeria *J.Fluid Mech.* **229**, 291 (1991).
- [62] R.Robert and J.Sommeria *Phys.Rev.Lett.* **69**, 2776 (1992).

- [63] J.Sommeria “Two-dimensional turbulence”, Session Les Houches, “New trends in turbulence”, Eds. by M.Lesieur, A.Yaglom, and F.David, **74** (Springer-Verlag, Berlin, 2001), pp.385-447.
- [64] J.B.Weiss and J.C.McWilliams *Phys.Fluids* **A3**, 835 (1991).
- [65] E.Caglioti, P.L.Lions, C.Marchioro, and M.Pulvirenti *Commun.Math.Phys.* **143**, 501 (1992).
- [66] G.L.Eyink and H.Spohn *J.Stat.Phys.* **70**, 833 (1993).
- [67] C.Marchioro and M.Pulvirenti *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids* (Springer, New York, 1994).
- [68] P.-L.Lions *On Euler equations and statistical physics* (Scuola Normale Superiore, Pisa, 1998).
- [69] H.Marmanis *Proc.Roy.Soc.Lond.* **A454**, 587 (1998).
- [70] P.H.Chavanis “Statistical mechanics of two-dimensional vortices and stellar systems”, in “Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions”, T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, M. Wilkens Eds., *Lecture Note in Physics* **602** (Springer, Berlin, 2002).
- [71] H.Aref, P.K.Newton, M.A.Stremler, T.Tokieda, and D.L.Vainchtein *Adv.Appl.Mech.* **39**, 1 (2004).
- [72] G.F.Carnevale, J.C.McWilliams, Y.Pomeau, J.B.Weiss, and W.R.Young *Phys.Rev.Lett.* **66**, 2735 (1991).
- [73] 川口由紀 原子気体 BECにおける量子渦の分裂、物性研究 **83-6**, 787 (2005).