

自己相似・自己アフィン・マルチフラクタル

* 中大・理工・物理 松下 貢

§1. はじめに

幸運にも飛行機の窓側の席に着けた時にぼんやり外を眺めていると、モクモクとした、時には稲妻が走ったりする、雄大な雲を見掛けることがある。積雲、積乱雲の類いなのだろうか。このような雲の表面を見ていると不思議な気持ちに襲われる。目をこらして見ると、大きなモコモコの中に小さなモコモコが、またその中により小さなものが、……といった具合で、モコモコの絶対的な大きさがてんで見定められない。雲の表面に基準となるような特徴的な長さが見付からないので、そこまでの遠近の見当もつかない。意外に動きがのろいので結構遠いのだなと思う程度である。

我々の身边には雲、稲妻だけでなく、山並み、河川網、海岸線など、ランダムなパターンが数多く見られる。しかも、意外に多くのもが上述の雲のように大小様々のスケールを持つ部分から構成されているように見える。マンデルブロ (B.B.Mandelbrot, Yale 大学) は早くからこのことに気付き、一見何の変哲もないランダム・パターンにも非常に単純で美しい規則性 — スケール不変性 (scale invariance) — が隠されている場合があることを多くの実例とともに示して来た。そして 30 年ばかり前にフラクタル (fractal) という新しい概念を導入してこれらの統一的な記述を試みたのである。

しかし科学の概念はいったんそれが受け入れられると一人歩きする傾向があるものである。このフラクタルの場合はどうであろうか。その動向を概観してみよう。

§2. 自己相似フラクタル

最も単純なスケール不変性は自己相似性 (self-similarity) と呼ばれるものである。ある与えられたパターンの任意の一部を取り出して拡大して見てももとのパターンと区別がつかないとき、そのようなパターンを自己相似フラクタル (self-similar fractals) と呼ぶ。ここでは幾何学的に厳密に自己相似な場合だけでなく、ランダムなパターンに対して統計的に自己相似な場合も自己相似フラクタルに含めよう。

厳密に規則的な場合の典型例が図 1 のコッホ曲線である。作り方は至って単純で、ある線分 (イニシエータ (initiator) と呼び、操作の第 0 段階) を 3 等分し、中央の線分をそれを底辺とする正 3 角形の他の 2 辺で置き換える (ジェネレータ (generator), 第 1 段階)。できた曲線の 4 個の構成線分のそれぞれについて同じ操作を繰返す (第 2 段階)。この操作を無限回行った後にできる曲線がコッホ曲線である。図 2 にやや模式的に示して

* 〒 112-8551 文京区春日 1-13-27

(e-mail: matusita@phys.chuo-u.ac.jp, URL: <http://www.phys.chuo-u.ac.jp/labs/matusita/>)

あるように、この曲線のどの一部を取り出して拡大しても全体と変わらないものが得られることは容易に想像がつく。即ち、コッホ曲線は自己相似である。直観的にはコッホ

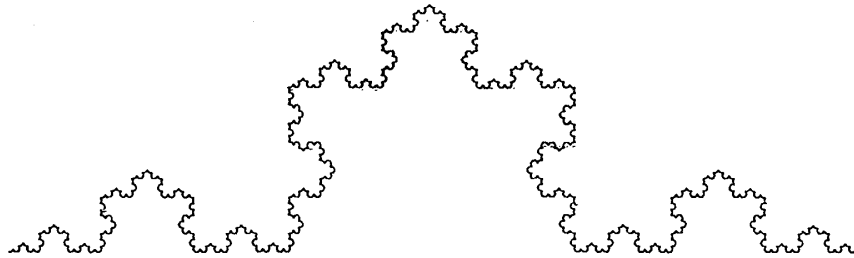


図 1: コッホ曲線. 典型的な規則的自己相似曲線.

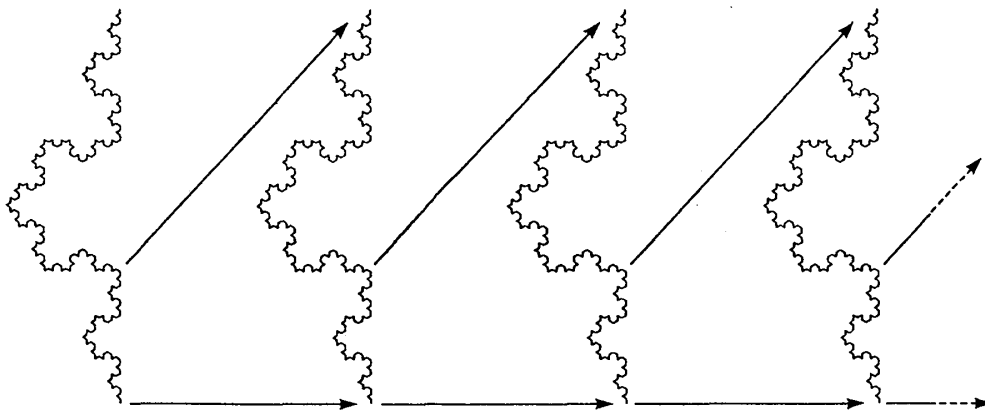


図 2: コッホ曲線の自己相似性. 拡大して見ても全く同じように見える.

曲線は大小様々な凹凸からできていて、全体の大きさ以外にこの曲線の特徴づける長さ(スケール)がないと言える。

今、プロッターの精度の限界などの現実的な理由でコッホ曲線を有限な第 n 段階で近似せざると得ないとしよう。この時の最小単位である構成線分の長さを a とすると、両端の直線距離(コッホ曲線の大きさ)は $R = 3^n a$ だが、構成線分の総数は $N = 4^n$ (コッ

ホ曲線の長さ $N a$) である。従って、 N と R の間には $N \sim R^D$, $D = \ln 4 / \ln 3 \cong 1.26$ という関係が n によらず常に成り立つ。このとき、この近似的なコッホ曲線の大きさ R は構成線分の総数 (\sim 長さ) N に対して

$$R \sim N^\nu \quad (\nu = 1/D) \quad (1)$$

のようにスケールされるという。この指数 D をフラクタル次元と呼び、自己相似パターンを特徴づける最も重要な量といえる。この D は上例のように一般には非整数であるが、線分、円板、球体ではそれぞれ、 $D = 1, 2, 3$ となり、通常の次元の自然な拡張になっている。

上の議論から察せられるように、一般のパターンに対するフラクタル次元は次のようにして決定できる。まず、ある与えられたパターンを大きさ a の構成体からなるとみなす。それを基準の長さとしてパターンの大きさ R を測り、構成体の総数 N を求める。 a をいろいろな値に変えた時の N を縦軸に、 R を横軸に両対数プロットした時に、データが直線に乗れば元のパターンは自己相似であると断定でき、その傾きからフラクタル次元 D が決定できる。

コッホ曲線は規則的な自己相似パターンの例であるが、この凹凸をくずしてランダムにすると何となくリアス式海岸線によく似ていることに気付かれるであろう。海岸に沿ってドライブする時、大きな湾の中に突き出した半島があり、それに小さな湾が付随してその中にまた小さな半島があり、…… という経験を持たれたことはないだろうか。実際に多くの海岸線が自己相似フラクタルであることが知られている。これに関しては次節でも議論しよう。最初に記した雲は多分、3次元空間中の自己相似フラクタルの例であろう。

水面に浮んだ花粉からの微粒子などに見られるブラウン運動は現代の科学に絶大な役割を果しているが、その軌跡が実は典型的なフラクタルなのである。ブラウン運動を理想化して1歩の長さを a (一定) とすると、 N 歩後の軌跡のおおよその大きさ R はよく知られた Einstein の関係から $R \cong N^{1/2} a$ で与えられる。即ち、(1) 式からブラウン運動の軌跡は自己相似で、そのフラクタル次元はそれが埋め込まれている空間次元によらず $D = 2$ であることがわかる。

§3. 自己アフィン・フラクタル

3.1 自己アフィン性

厳密にいうと、コッホ曲線の大きさ R が有限であってもその長さは ∞ である (あるいは長さが無い)。このようなことは初めの線分 (イニシエータ) 上にコッホ曲線を投影したときに無限の重なりがなければ起り得ない。確かに山並みは大小様々な凹凸からなり、自己相似フラクタルに見えるかも知れないが、それを水平線上に投影した時に無限の重なり (オーバハング) があるとはとても思えない。山並みは自己相似ではなさそうである。ではどのような規則性に従うのだろうか。

図3は時間 $t = 0$ に原点 $x_H = 0$ をスタートした1次元ブラウン運動の変位 $x_H(t)$ (但し $H = 1/2$; この意味については後述) を t の関数として描いたものである (変化を強

調するために x_H 軸は t 軸の4倍のスケールで表してある)。かなり険しいが、近くから見た北アルプスの山並みに見えなくもない。これを1個の与えられたパターンと見なす。時刻0から T までのこの曲線の長さを N とすると、時空間 ($t-x_H$ 平面) での



図 3: 1次元ブラウン曲線 $x_H(t)$ ($H = 1/2$) の例.

1歩1歩は一定の長さを持つので、 N は勿論 T に比例する。即ち、曲線の横幅 T は長さ N に対して $T \sim N^\nu$, $\nu_t = 1$ とスケールされる。他方、時間 T 内のブラウン運動の変位の大きさの目安として

$$X \equiv \sqrt{\langle x_H^2(t) \rangle}$$

($\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を意味する) を採用するとよく知られているように $X \sim T^{1/2}$ である。従って、このパターンの縦幅 X は長さ N に対して $X \sim N^{\nu_x}$, $\nu_x = 1/2$ とスケールされる。この関係は前節最後で議論したブラウン運動の1次元の場合に相当する。以上により、このブラウン曲線 $x_H(t)$ ($H = \nu_x = 1/2$) から任意に取った部分曲線では、長さ N に対して縦幅 X と横幅 T のスケールのされ方が異なっていることがわかった。

前節の式(1)でみたように、コッホ曲線のような自己相似なパターンでは縦横無関係に大きさは $R \sim N^\nu$, $\nu = 1/D$ (D はそのパターンのフラクタル次元) とスケールされた。これに対して図3の例のように、より一般に方向によってスケールのされ方が異なるような特性を自己アフィン性 (self-affinity) といい、そのような性質を持つパターンを自己アフィン・フラクタル (self-affine fractals) とよぶ。そしてこの時には1個の指数 ν (あるいは D) だけではパターンを特徴づけることができず、一般に複数個のスケールリング (自己アフィン) 指数 ν_i (図3の例では ν_x, ν_t の2個) が必要である。即ち、自己相似は自己アフィンのうちでスケールリング指数 ν_i が全て等しいという特別な場合なのである。

3.2 自己アフィン性の意味

図3のブラウン曲線をもう少し詳しく分析して自己アフィン・フラクタルの性質を考察してみよう。図4は図3のブラウン曲線を x 軸と t 軸を同じスケールで描き、図2のコッホ曲線のとくのように、初めの半分を次々に2倍に等方的に拡大して示したものである。はるか大平原のかなたにかすかにほぼ直線状に見える山並みが、近付くにつれて険しく見えて来る様子を彷彿させるのではないだろうか。

ともかく、図2のコッホ曲線の場合と違って、この図の初め(上)と後(下)の曲

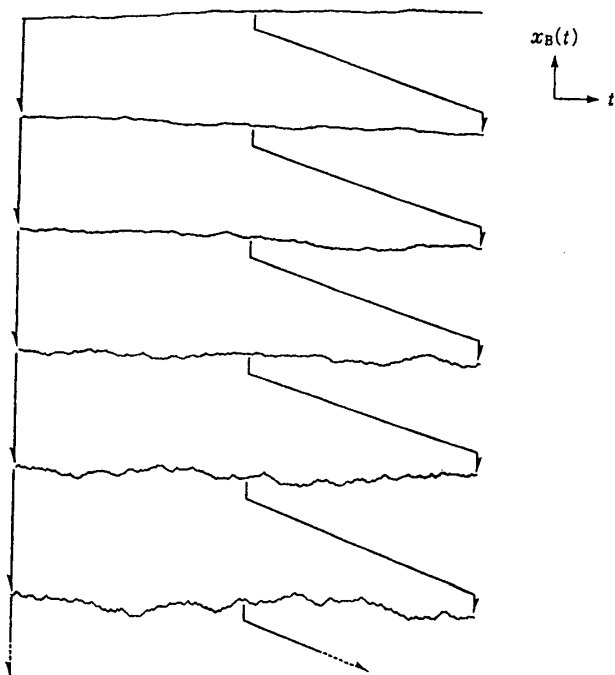


図4: ブラウン曲線は自己相似ではない。等方的に拡大すると縦の変化がより強調される。

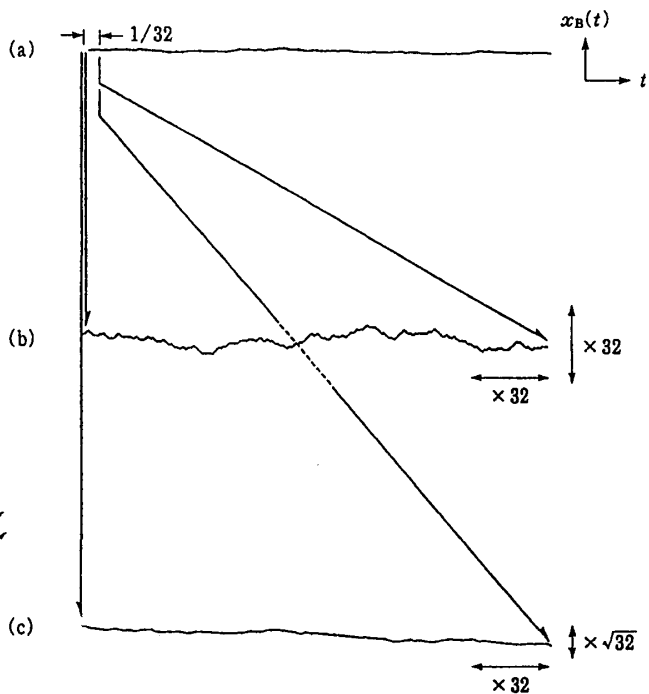


図5: 1次元ブラウン曲線の自己アフィン性

線は似ても似つかないので、ブラウン曲線はたしかに自己相似ではない。ところで、図

5(a)には図4の最上段の曲線が示してある。その初めの $1/32 (= (1/2)^5)$ を縦横等方的に32倍に拡大したものが(b)に示してあり、これは図4の最下段の曲線である。(a)と(b)では全く様子が異なるので、1次元ブラウン曲線は自己相似フラクタルでないことは上に述べたとおりである。ところが、初めの $1/32$ を横は32倍に、縦は $\sqrt{32} = 32^{1/2}$ 倍に異方的に拡大した(c)の曲線をもとの(a)と比較してみると、ほとんど区別がつかず、同じ曲線のように見える。これが異方的スケーリングの意味である。

これはしかし、次の点で非常に深刻な問題ををはらむ。即ち、自己相似フラクタルの場合にそのフラクタル次元を決定するために導入された前節の方法やボックス・カウンティング (box-counting) 法などの簡便な方法が自己アフィン・フラクタルには使えない。もし無理に適用すると、フラクタル次元がスケールに依存して変化するという不合理な結果になってしまう。勿論、マンデルブロが提案している局所次元や大局次元などをブラウン曲線のような既知の曲線に定義することはできる。しかし、これらの次元はいずれも与えられた曲線の極限的な性質、図4で言えばそこに示されていないずっと上方、あるいはずっと下方の曲線の特徴から決まる量である。その特徴を知りたい未知の、しかも有限な曲線が与えられた時に、一般にはこれらの次元は求めることができない。

3.3 スケーリング (自己アフィン) 指数

例えば図4の上から4番目の曲線 (あるいは図3) が未知の曲線として単独に与えられたとしよう。この曲線には自己相似ではないにしても、何らかのスケール不変な性質 (自己アフィン性) が内在しているかも知れない。それをこの有限な曲線から引き出すにはどうすればよいだろうか。フラクタル次元 D を諦め、素直にスケーリング指数 ν_L を探ればよい。

今、簡単の為、2次元空間に図6のような曲線 $y = f(x)$ があるとしよう。曲線ではなくて、樹木や岩石などを抽象化したクラスター、あるいは曲面、さらにはこれらの高次元への拡張はほとんど直接的で容易である。また、図6のように異方性が明らかでない

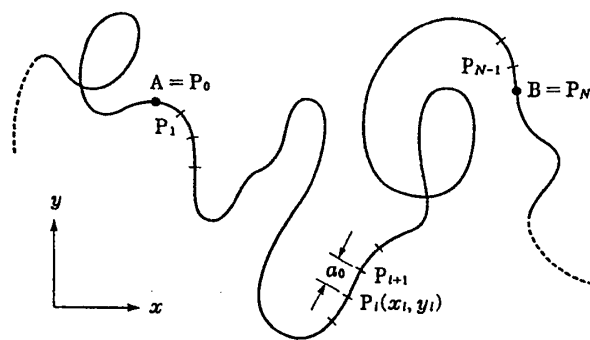


図6: 固定した最小の長さ単位 a_0 で与えられた曲線上の2点間 AB の長さを測る。

場合には座標軸をどのように取ってもよいが、図3の1次元ブラウン曲線や後述する図8の山並みのようにそれがはっきりしている時は水平方向を x 軸に、垂直方向を y 軸に選べばよいだろう。先ず初めに、曲線の様子から判断して適当な最小単位の長さスケール $a_0 (= 1)$ を定義する。前節のときと違って、これは注目する同一曲線を扱う間は一切

変えない。次に、図6に示したように、この長さスケールを単位（物差し）にして曲線上の任意の2点 A, B 間の曲線に沿った長さ $Na_0 (= N)$ を測る。[これは実はこの曲線が直径 $a_0 (= 1)$ の単位粒子で構成されており、 A, B 間にはこれらの粒子が N 個あるとみなすことと等価である。このことが上述のクラスターや面の場合への拡張の基礎なのである]。同時に、 AB 間の曲線上の全測定点の x, y 座標に関する分散 X^2, Y^2 を計算する：

$$\left. \begin{aligned} X^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_c)^2, \\ Y^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_c)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで (x_i, y_i) は曲線上の i 番目の測定点 P_i の座標で、 (x_c, y_c) は曲線 AB の重心

$$x_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad y_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (3)$$

である。標準偏差 X, Y はこの部分曲線 AB の x 方向、 y 方向のおおまかな大きさを表すとみてよい。こうして部分曲線 AB について1組の値 $(N; X, Y)$ が得られた。与えられた曲線上に任意に2点を取って上の測定手続きを繰返して多数の値の組 $(N; X, Y)$ を求め、 X と Y を N に対して両対数プロットする。そして X, Y が N に対して

$$X \sim N^{\nu_x}, \quad Y \sim N^{\nu_y} \quad (4)$$

とスケールされるかどうか（両対数グラフでデータが直線に乗るかどうか）チェックする。もし(4)式がある範囲で成り立つ（一般に $\nu_x \neq \nu_y$ ）ことが確認されれば、その範囲内でこの曲線は自己アフィンであるといえる。そして異方的にスケールされる自己アフィン・パターンはフラクタル次元ではなくて、スケーリング指数 $\nu_i (\nu_x, \nu_y$ 等) で指定すべきなのである。

図7は図3のブラウン曲線に上述の方法を適用した例である。ここではこれまでの y 軸が x_H 軸で、 x 軸が t 軸で表されている。ブラウン曲線のスケールに依らない特性 ($\nu_x = 1/2, \nu_t = 1$) がこの方法によってあいまい性なく引き出されている様子がよくわかると思う。次にこの方法を未知の曲線に適用してみよう。図8は福島、栃木、茨城の3県にまたがる八溝山系の垂直断面プロフィール（山並みに近い）である。ここでは垂直方向が z 軸、水平方向が x 軸で表されている。これについて調べた結果が図9であり、2ケタ近くにわたって自己アフィン性が成り立っている ($\nu_z \cong 0.55, \nu_x = 1.00$) ことがわかる。

一般に、注目するパターンが構成あるいは形成される過程で異方性が顕著と考えられる場合には、そのパターンは自己アフィンの可能性が高いとみてよい。この意味で地表や固体の破断面など物体の表面は多くの場合、自己アフィンであると思われる。

図3のブラウン曲線や $1/f$ ノイズ曲線、図8の地表の垂直断面をはじめ、一般に時系列的な曲線は概して自己アフィンである（横軸と縦軸は異質）ことが多い。これらの場

合には横軸はトリビアルで, 図 7, 9 に見られるようにいつでも $\nu = 1$ である. この

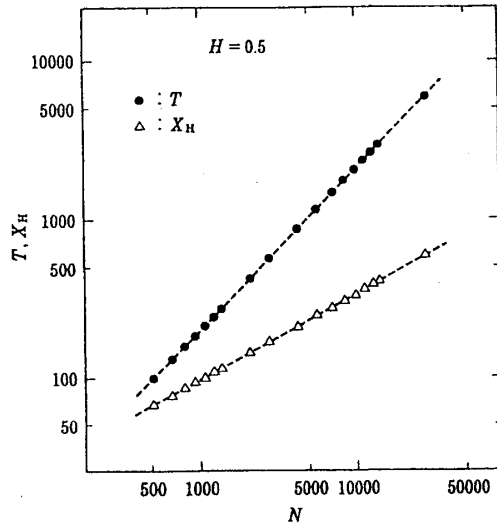


図 7: 図 3 に示したブラウン曲線上の任意の 2 点間の長さ N とその間の横軸及び縦軸方向の変化の標準偏差 T と X_H との関係. 傾きから $\nu_x \cong 0.50$, $\nu_t = 1.00$.

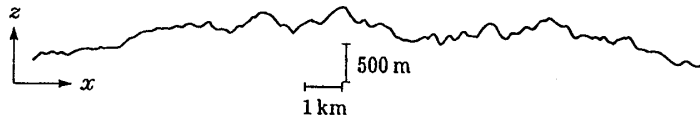


図 8: 福島県八溝山系の垂直断面プロフィール

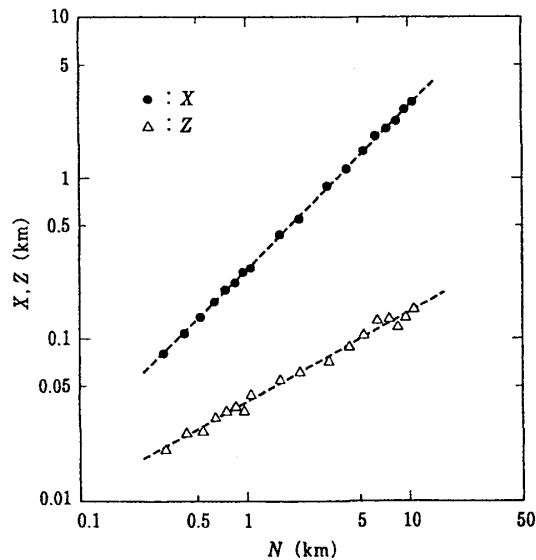


図 9: 図 8 に示した曲線上の任意の 2 点間の長さ N とその間の横軸及び縦軸方向の変化の標準偏差 X と Z との関係. 傾きから $\nu_z \cong 0.55$, $\nu_x = 1.00$.

時, 縦軸のノントリビアル指数 $\nu (< 1)$ は通常, Hurst 指数 H で表される. このように

Hurst 指数 1 個で指定されるような通常の時系列的な曲線に対しては、わざわざ仰々しく上述のような解析をすることはなくフーリエ解析すればことが済む。しかし、いつでもこのような曲線ばかりが問題だとは限らない。粒子凝集モデルでは $\nu_x \neq \nu_y \neq 1$ である自己アフィン・クラスターがいくつか知られている。また、河川網は世に自己相似の典型のように言われているが、上流、下流がはっきりしていることと Hack の経験則（主流長と流域面積の間のスケーリング則）を考え合わせると、 $\nu_x \neq \nu_y \neq 1$ の自己アフィン・パターンと見るのが最も合理的と思われる。今後の再検討の課題であろう。いずれにせよ、これらのより一般的な場合には Hurst 指数は意味をなさない。

3.4 海岸線の自己相似性

ではなぜ地表の一部である海岸線が前節で議論したように自己相似なのだろうか。水平方向には一般に異方性が考えられないからであるが、これにはもう少し解析的に議論を進めることができる。図 9 の結果を一般化して、地表の垂直断面プロフィールは水平方向に $\nu_x = 1$ 、垂直方向に $\nu_z < 1$ とスケールされる自己アフィンな非整数ブラウン運動 (fractional Brownian motion; *fBm*) 曲線 $x_H(t)$, $H = \nu_z$ で近似できると仮定しよう。 $H = 1/2$ の場合が図 3 に示した通常のブラウン曲線である。 $t = 0$ で原点 $x_H = 0$ からスタートしたこの *fBm* 粒子に対して連続極限を考えると、時間 t での変位が $x_H \sim x_H + dx_H$ の間にある確率は

$$w(x_H, t)dx_H = \frac{1}{(4\pi Dt^{2H})^{1/2}} \exp\left(\frac{-x_H^2}{4Dt^{2H}}\right) dx_H \quad (5)$$

で与えられる。ここで D は粒子の拡散係数である。従って、時刻 t に原点 ($x_H = 0$) に戻る確率は $p_r(t) \sim t^{-H}$ であり、時間間隔 0 から T の間に原点に戻る回数 $N_r(T)$ は

$$N_r(T) \sim \int_0^T p_r(t) dt \sim T^{1-H} \quad (6)$$

となる。これは *fBm* 曲線の水平線との交点 ($x_H(t) = 0$ を満たす) の集合が自己相似であり、フラクタル次元 $D_0 = 1 - H$ のランダムなカントール集合をなすことを意味する。

ここで再び地表に話を戻そう。図 8 のような地表の垂直断面プロフィールは近似的に $\nu_x = 1, \nu_z = H < 1$ の自己アフィン曲線であった。従って、ある高度の水平線とこの曲線との交点はフラクタル次元 $D_0 = 1 - H$ の自己相似な点集合をなすであろう。このような点集合を水平面内で結んでできた等高線はやはり自己相似であり、そのフラクタル次元 D はマンデルブロの経験則により

$$D = D_0 + 1 = 2 - H = 2 - \nu_z \quad (7)$$

と表される。即ち、地表の垂直断面プロフィールは自己アフィンであっても、その等高線の集り（海岸線の集りは標高 0 m で、その特別な場合）は近似的に自己相似なのである。実際に、図 8, 9 で示された八溝山系で (7) 式が近似的に成り立っていることが示されている。[(7) 式は *fBm* 曲線の局所次元 D_L の表式と一致するが、その意味は全く異なることに注意すべきである]。また、等高線の集りから 1 本だけを取り出したとき、そのフラクタル次元を D' とすると、 $D' \leq D$ であることも注意しておく。

§4 マルチフラクタル

現実にはフラクタルを前節のように拡張してもまだ捉え切れない興味深いパターンが沢山ある。我々日本人にはお馴染みの墨流しのパターンは、変幻自在な線状部分だけ取り出せばあるいは自己相似に見えるかもしれない。しかし、それに付随したあの微妙な濃淡の変化を無視しては墨流しパターンの不思議な美しさを逃すことになる。

図 10(a) は遠方で放出されたブラウン運動粒子が原点近くにあるクラスター（最初は原点上の 1 点）に付着凝集するという単純なルールで成長させたパターンの 1 例である。このようなモデルは DLA (diffusion-limited aggregation, 拡散に支配された凝集) と呼ばれ、2, 3 次元空間でできるパターンは、それぞれ、 $D \cong 1.7, 2.5$ の自己相似フラクタルであることが知られている。ブラウン運動は拡散と等価であるが、このモデルではパターンの成長が非常に遅いので、拡散方程式の時間項が無視できる（準静的近似）。即ち、DLA はラプラス場の中でのランダム・パターン形成を記述するプロトタイプモデルとみなせる。実際、DLA は電析（金属葉）、誘電破壊（リヒテンベルク図、稲妻など）、樹枝状結晶成長、粘性の異なる 2 流体界面の不安定性に起因するヴィスカス・フィンガリング、石コウなどの溶解、はては細菌のコロニー形成に到るまで、多くのランダム・パターン形成を説明する興味深いモデルである。

図 10(a) にある DLA パターンが導体でできているとして、これを囲む充分遠方の電極との間に電圧を印加した時にこの導体表面に誘起される電荷分布を模式的に描いたのが図 10(b) である。よく知られているように、外に伸び出した枝の先端部では誘起電荷の密度は高く、奥まった枝の付け根あたりでは非常に低い。誘起電荷は DLA パターン上に濃淡をもって分布している。

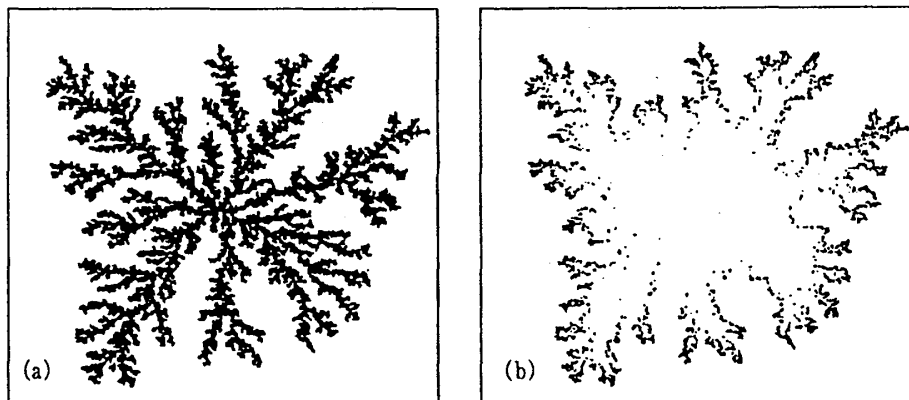


図 10: (a) 粒子数 $N = 5 \times 10^4$ からなる DLA パターンの 1 例。自己相似で $D \cong 1.7$. (b) DLA パターン上に誘起された電荷の分布。

これら墨流しの濃淡や導体表面上の誘起電荷のような物理量の分布パターンはどのように定量的に特徴づけたらよいのだろうか。図 10(b) のパターンは単一のフラクタル次元をもつ自己相似な DLA パターンの上に乗った濃淡の分布なのだから、それがフラクタル次元で表せるとしても 1 個で済むわけがない。とてもこれまでのように単一のフラ

クタル次元, あるいは有限個の指数で特徴づけ得るとは思えない. このような場合には
 いろんな値の指数を持ったパターンが無数に重なり合って1つのパターンができてい
 る. あるいは指数が空間内やパターン上で揺れていると見ればよいだろう. 従って, この
 場合には指数の分布をも指定しなければならない. このようにして特徴づけられる何らか
 の物理量の分布パターンをマルチフラクタル (multifractals) と呼び, 自己相似の大幅な
 拡張とみなされる.

4.1 特異性指数 α

ある非負の物理量 (導体表面の誘起電荷, 乱流中のエネルギー散逸率や渦度, または
 不均一物体中の応力など通常のものだけでなく, 墨流しのように単なるパターンの濃淡
 でもよい) が空間に分布している場合を考えよう. この分布は墨流しや乱流のように考
 える空間全体に拡がっていてもいいし, 導体表面の誘起電荷のように空間中のある領域
 に限られていてもよい. さらに, この限られた領域そのものが図 10(a) のように自己相
 似フラクタルであっても構わない. また, 負の量ならその絶対値あるいは自乗をとれば
 よい.

d 次元空間中の位置 \mathbf{r} における上述のような非負の物理量を $\psi(\mathbf{r})$ としよう. 考える
 系 (体積 V) 全体を一辺 ε の d 次元立方体セルに分割する. i 番目のセル (体積 $v_i = \varepsilon^d$)
 内の $\psi(\mathbf{r})$ の分布の確率測度 $P_i(\varepsilon)$ を

$$P_i(\varepsilon) = \frac{\int_{v_i} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\int_V \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} \quad \left(\sum_i P_i(\varepsilon) = 1 \right) \quad (8)$$

と定義しよう. この確率測度 $P_i(\varepsilon)$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ に対して一般に

$$P_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha \quad (9)$$

とスケールされるであろう. この指数 α は特異性 (singularity) 指数または Lipschitz-
 Hölder 指数と呼ばれ, 分布確率の局所的な性質を特徴づける量である.

この指数 α の具体例としては, 図 11 のような 2 次元静電場 (ラプラス場 ϕ) 中の楔
 形導体表面での誘起電荷 σ の分布を考えるとよい. 導体表面上の電場を E_n (n は表面
 の法線方向を表す) とするとガウスの法則より

$$4\pi\sigma = E_n = -\frac{\partial\phi}{\partial n} \quad (10)$$

と表される. 楔の開き角を図のように $\gamma = 2\pi - \beta$ として楔の先端近くでラプラス方程
 式 $\nabla^2\phi = 0$ を解くと, よく知られているように, 楔の先端から距離 r , 楔の一辺から角
 度 θ の位置で

$$\phi = Ar^\lambda \sin \lambda\theta, \quad \lambda = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2\pi - \gamma} \quad (11)$$

と求まる. これを使うと, 楔の表面上で先端から s の距離での電荷分布密度 $p(s)$ は

$$p(s) \propto \sigma(s) \propto \left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{r=s} \sim s^{\lambda-1} \quad (12)$$

となる。従って、楔形導体の表面 (1次元) で考えてその先端での誘起電荷の確率測度 $P(\varepsilon)$ は

$$P(\varepsilon) = \int_{s \leq \varepsilon} p(s) ds \sim \varepsilon^\lambda \quad (13)$$

で与えられる。即ち、楔の先端でのこの分布の特異性指数 α は楔の角度 $\gamma = 2\pi - \beta$ を使って

$$\alpha = \lambda = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2\pi - \gamma} \quad (14)$$

と表されることがわかる。楔の開き角 γ が図 12 のように特別な場合; $\gamma = 0, \pi/2, \pi, 2\pi$ にはそれぞれ, $\alpha = 1/2, 2/3, 1, \infty$ となる。楔の辺上の点では $\gamma = \pi$ とみなされるので, そこでは $\alpha = 1$ である。边上では $P(\varepsilon)$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ で ε に比例するのは当然なので, この結果は納得のいくところであろう。[ちなみに, 上例のようにラプラス方程式の解で表される確率測度を調和測度 (harmonic measure) という].

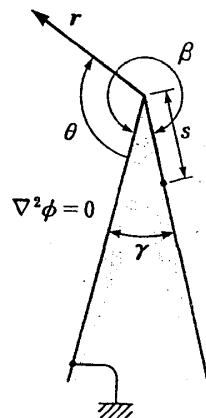


図 11: 2次元平面内の楔形導体。楔の開き角は $\gamma = 2\pi - \beta$ 。

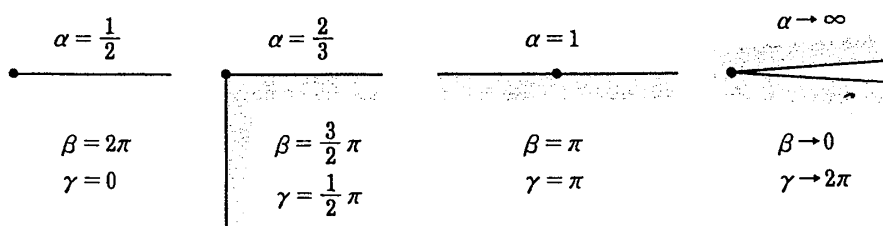


図 12: 特別な角を持つ楔の先端での特異性指数 α

4.2 $f(\alpha)$ スペクトル

振り返って図 10(a) を見ると, この2次元 DLA クラスタは近似的には, とがったのやへこんだのや, 大小様々の開き角を持つ楔の集合でできていると見なせよう。前述し

たように、このクラスターが導体でできているとして、その表面上での誘起電荷分布を考えてみる。外に突き出したような枝の先端部は楔で近似するとその角 γ が小さく (β が大きく)、従って (14) 式より α は小さい。他方、クラスター内部に切れ込んだ“フィヨルド”の奥の部分では楔角 γ が大きく (β が小さく)、 α は大きい。換言すると、図 10(b) のような誘起電荷の分布測度の特異性指数 α そのものがいろいろな値をとって DLA クラスター (正確にはその表面; 確率のサポート) 上に分布する。

そこでこれを一般化して、ある領域 (サポート上) に分布する任意の物理量の確率測度を考える。このサポートそのものが図 10(a) のようなフラクタル次元 D_0 の自己相似フラクタルとする。但し、それが通常の線や面、空間ならば $D_0 = 1, 2, 3$ と置けばよい。このサポート上で指数 α が $\alpha' \sim \alpha' + \Delta\alpha'$ の間の値をとる点の集合に注目しよう。この点集合は自己相似なサポートの部分集合なので、その上にフラクタル次元 $f(\alpha')$ で自己相似的に分布すると仮定するのが妥当であろう。即ち、そのような集合の中の点の数 ΔN は $\varepsilon \rightarrow 0$ で

$$\Delta N \cong \Delta\alpha' \rho(\alpha') \varepsilon^{-f(\alpha')} \quad (15)$$

と表されると仮定するわけである。[1 次元的な量である (1) 式の R をセル・サイズ ε で測り、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると $R \sim \varepsilon^{-1}$ とスケールされることに注意しよう]。 $f(\alpha)$ は指数 α を持つサポート上の点集合のフラクタル次元の意味を持ち、一般に α によってその値が変る。マルチフラクタルの名の所以である。また、 $f(\alpha)$ はサポート上の部分集合のフラクタル次元なので

$$f(\alpha) \leq D_0 \quad (16)$$

を満たし、注目している物理量の分布の大局的な性質を特徴づける量である。以上により、ある物理量の確率測度の $f(\alpha)$ スペクトルが求められればその確率分布の特徴が捉えられたことになる。

図 11 にあるような 2 次元楔形導体の誘起電荷分布についての $f(\alpha)$ スペクトルは容易に求められる。(14) 式より楔の先端で $\alpha = \pi/\beta$ 、この α をもつ点集合 (先端の 1 点) のフラクタル次元は $f = 0$ であり、楔の両側面では $\gamma = \beta = \pi$ より $\alpha = 1$ (図 12 参照)、この α を持つ点集合 (線) のフラクタル次元は $f = 1$ である。即ち、この場合の $f(\alpha)$ スペクトルは

$$f = \begin{cases} 0, & \alpha = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2\pi - \gamma}, \\ 1, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (17)$$

の 2 点で表される。

4.3 一般化次元 D_q

では単純な楔ではなくて、図 10(a) のようなはるかに複雑な DLA クラスター上に誘起された電荷分布 (図 10(b)) の場合の $f(\alpha)$ はどうであろうか。原理的には、クラスター上の各点で (9) 式に従って α を求めて α のクラスター上での分布地図を作り、それを基に (15) 式から $f(\alpha)$ を決定することも可能であろう。しかしこれはあまり実際的ではなく、通常は次のような手続きに従う。

まず, (8) 式の確率測度 $P_i(\varepsilon)$ からその $(q-1)$ 次モメント, あるいは“分配関数”

$$Z_q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [P_i(\varepsilon)]^q \quad (18)$$

を定義する. ここで $N(\varepsilon)$ は考えている系内で実際に 0 でない確率測度を持つ (即ち, この測度のサポートをカバーするのに必要な) セルの総数であることに注意しよう. この $Z_q(\varepsilon)$ はコンピュータを使えば比較的容易に計算できる. これも $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で, q に依存した形で

$$Z_q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\tau_q} \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (19)$$

とスケールされると仮定しよう. それが本当かどうかは (18) 式で ε を変えて $Z_q(\varepsilon)$ を計算し, このスケーリング性を確かめればよい. ここで指数 τ_q を

$$\tau_q = (q-1)D_q \quad (20)$$

とおく. 因子 $(q-1)$ は (8) と (18) から $Z_{q=1} = 1$ でなければならないこと (規格化条件) から来ている. (18) 式より Z_q は確率分布の情報をくまなく内包するので, (19), (20) から導かれる

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (21)$$

もこの確率分布を特徴づける量といえることができる. この D_q は一般化次元 (generalized dimension) と呼ばれている.

$q=0$ の時には $Z_{q=0} = N(\varepsilon)$ だから

$$D_0 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (22)$$

となり, これはサポートのフラクタル次元に他ならない. また, $q=1$ では (21) 式は直接使えないが, (18), (21) で $q=1+\delta, \delta \rightarrow 0$ とすることにより

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) \ln P_i(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (23)$$

と表され, 分子が情報量なので情報次元 (information dimension) と呼ばれている. D_2 は相関次元 (correlation dimension) である. 特に, 図 10(a) そのもののように, 確率分布がサポート上で一様に分布する場合には, $P_i(\varepsilon) = N(\varepsilon)^{-1}$, 従って $Z_q(\varepsilon) = N(\varepsilon)^{1-q}$ であり, (21) 式から D_q は q に依らず

$$D_q = D_0 \quad (24)$$

となる. 一般には D_q は q に関して減少関数

$$D_q \geq D_{q'} \quad (q < q') \quad (25)$$

であることが証明できる。等号は (24) 式の場合である。

D_q は一般には次元とは言えない。むしろ臨界現象におけるギャップ指数 Δ_n に対応するものとするべきである。臨界現象では Δ_n は n に依らず一定であったが、一般の測度分布では D_q は必ずしも一定ではない点が興味深いのである。

$f(\alpha)$ ではある物理量の空間分布の局所的な性質を α で、大局的な性質を f で特徴づけていたわけであるが、 D_q ではどうであろうか。(18) 式からわかるように、 $q \rightarrow \infty$ では確率最大の部分が、 $q \rightarrow -\infty$ では確率最小の部分が Z_q に主に寄与する。従って、 q を変えることにより (18) 式の和に主に寄与する部分を次々にピックアップすることができる。 D_q は q でチューニングした部分のスケーリング指数なのである。従って、 D_q スペクトルがわかれば問題にしている確率分布の性格を特徴づけることが可能となる。

4.4 $f(\alpha)$ と D_q との関係

同じ物理量の分布を $f(\alpha)$ でも D_q でも特徴づけられるのであれば、両者は必ず関係しているはずである。式 (9) を (18) に代入し、セル i についての和を (15) を使って α の積分に置き換えると、“分配関数” $Z_q(\varepsilon)$ は

$$Z_q(\varepsilon) = \int d\alpha' \rho(\alpha') \varepsilon^{q\alpha' - f(\alpha')} \quad (26)$$

と表される。 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限ではこの積分は $q\alpha' - f(\alpha')$ が最小となる α' の値で決まる。そこで

$$\frac{d}{d\alpha'} \{q\alpha' - f(\alpha')\} = 0, \quad \frac{d^2}{d\alpha'^2} \{q\alpha' - f(\alpha')\} > 0$$

を満たす α' を $\alpha(q)$ とすると

$$f'(\alpha(q)) = q, \quad f''(\alpha(q)) < 0 \quad (27)$$

となる。後の式は $f(\alpha)$ 曲線が上に凸であることを示している。この $\alpha(q)$ を使えば (26) は

$$Z_q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{q\alpha(q) - f(\alpha(q))}$$

と近似でき、(19) と (20) 式より

$$\tau_q \equiv (q-1)D_q = q\alpha(q) - f(\alpha(q)) \quad (28)$$

となる。この式の両辺を q で微分して (27) を代入すると $\alpha(q)$ が、また (28) 式そのものから $f(\alpha(q))$ が D_q (あるいは τ_q) を使って

$$\left. \begin{aligned} \alpha(q) &= \frac{d\tau_q}{dq} = \frac{d}{dq} \{(q-1)D_q\}, \\ f(q) &= q\alpha(q) - \tau_q = q\alpha(q) - (q-1)D_q \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

と表される。即ち、 D_q が求まっていれば、(29) 式によって q を媒介変数にして $f(\alpha)$ が決定できることがわかった。式 (27) ~ (29) より、 $f(\alpha)$ は $q=0$ で最大値 D_0 をとる

こと ((16) 式) や $\alpha(q=1) = f(q=1) = D_1$ などが容易に導ける. (29) 式をみると, $\tau_q = (q-1)D_q$ と $f(\alpha)$ とはルジャンドル変換で結ばれており, 熱力学との形式的類似も見えて来るであろう ($q \leftrightarrow \beta, \tau_q \leftrightarrow \beta F, \alpha \leftrightarrow E, f \leftrightarrow S$).

図 10 に示したような 2 次元 DLA クラスタ (図 10(a)) 上の誘起電荷分布 (図 10(b)) についての D_q 及びスペクトルをそれぞれ, 図 13, 14 に示す. D_q が減少関数である

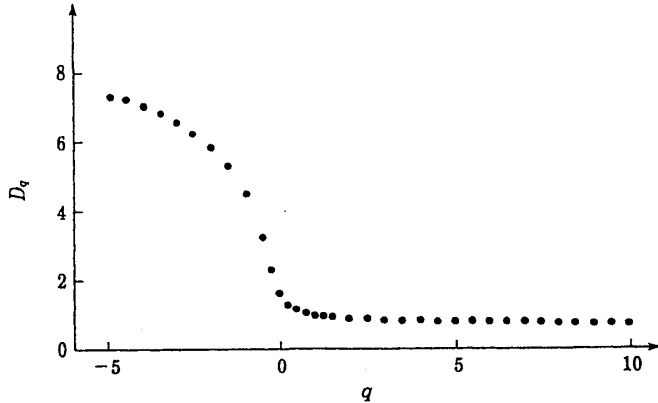


図 13: 2 次元 DLA クラスタの誘起電荷分布 (成長確率の分布に等価) についての一般化次元 D_q . 数値計算による.

とか, $f(\alpha)$ が上に凸であるとか, その最大値がサポート (2 次元 DLA クラスタ) のフラクタル次元 1.7 に近いとか, α の値の範囲が 1/2 あたりから 9 近くの大きな値までにわたっていることなど, 予想されたいろんな特徴がこれらの図から読み取れるであろう. 実は, DLA クラスタの成長確率はクラスタ表面上でのラプラス場の勾配に比例することがわかっている. 従って, (12) 式よりこれは誘起電荷分布に比例する. 即ち,

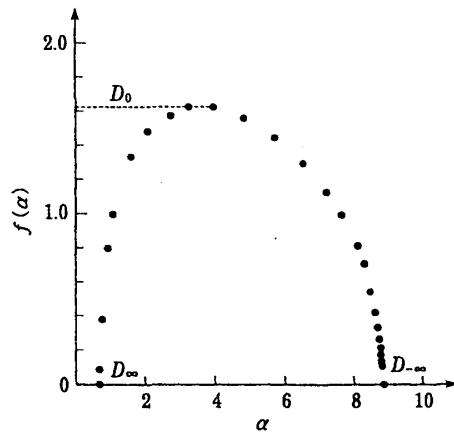


図 14: 図 13 と同様の例についての $f(\alpha)$ スペクトル. 数値計算による.

図 13, 14 は 2 次元 DLA クラスタの成長確率の分布に関する D_q 及び $f(\alpha)$ に等価なのである. 後者の $D_q, f(\alpha)$ は樹枝状成長やヴィスカス・フィンガリングなどの実験でも求められている.

シェルビンスキー・カーペットやパーコレーション・クラスターのような大小様々のループが入り組んだ自己相似パターンの両端に応力や電圧を加えた時のパターン上の局所的な応力や電位降下の値の分布は決して一様でないことは容易に想像がつく。これらの量はパターン上に強弱多様に分布し、マルチフラクタルであることが知られている。また、発達乱流のエネルギー散逸率が空間にマルチフラクタル的に分布していることも実験的に調べられている。

最後にマルチフラクタルが初めての読者にノントリビアルで最も簡単な演習問題を1つ。鉱石中の鉱物の分布に関して次のような de Wijs の経験則があるそうである：“1つの鉱石を2等分したとき、各々の鉱石には鉱物が $p_1, p_2 = 1 - p_1$ の割合で含まれる。さらに各々の鉱石を2等分して4個に分けると、鉱物の各々の部分に $p_1^2, p_1p_2, p_2p_1, p_2^2$ の割合で含まれる。次下同様で、一般に鉱物は鉱石中に決して一様に分布していない ($p_1 \neq 0.5$)”。これは鉱石だけでなく、ずっと大きいスケールでも何となく納得できる。鉱山のある恵まれた町村は郡や市の中で局在しているであろう。このような郡市も県内どこでもというわけにはいかない。県もまたしかり（我が故郷富山県を見よ）。国でみても日本は鉱物資源が全然豊富でない。上述の経験則は地球規模で成り立っているような気がする。

それはともかく、上の経験則を単位長さの線分上の確率分布にモデル化できる。この線分を2等分し、一方に確率 p_1 を、他方に $p_2 = 1 - p_1$ を割り振る。次に各々の線分をさらに2等分してそれぞれに同じ比率で確率を割り振ると、4個の線分がそれぞれ $p_1^2, p_1p_2, p_2p_1, p_2^2$ の確率を持つことになる。以下、同様の手続きを繰り返す。結果は $p_1 = p_2 = 0.5$ の時には一様分布だが、それ以外には非一様な分布が得られる。特に $p_2 \ll 1$ のときには一端に局在した分布となる。

この場合の $D_q, f(\alpha)$ の表式を導出せよというのが問題である。確率が線分上に乗っている（サポートが線分）ので $D_0 = 1$ は当然だが、この場合には D_q と $f(\alpha)$ の厳密な表式が導ける。確率の割り振りの過程が2項的であることに注目し、 n 段階目の線分の長さを分割セルの大きさに選ぶと $\varepsilon = 2^{-n}$ であり、セルの総数は $N(\varepsilon) = 2^n$ となる。これらのことと (9), (15), (18) 式を使えばよい。

§5. おわりに

以上、現実の多様なパターンを定量的に取り扱うためには、自己相似から自己アフィン、マルチフラクタルへとフラクタルを拡張しなければならないことを見て来た。最近、特に活発になったパターン形成の物理的研究の観点からはフラクタルは非常に強力な「道具」である。道具は大切にしなければならない。グラグラした金槌などを振り回したらケガをするのがオチである。しかしそうは言っても最も重要なのは、どうして多くのランダム・パターンがフラクタルで記述できるのか、という点であろう。これを抜きにしては本末転倒になるが、難問ではあり、現在でも世界中で研究されている。今のところ、パターン形成の物理学的研究に第一原理が存在しないので、各論的に追求しなければならないであろう。

筆者の薄学駄才のために「物性夏の学校」にぴったりの話題で議論を進めることができなかったことをお詫びしなければならない。しかし、自分の専門とは少々違う話を聞

いて自分の分野の場合に当てはめてみるのも結構面白い知的ゲームではないであろうか。本稿で議論したような考えを自身の研究に適用し発展させてみたいという方々がいれば筆者の望外の喜びである。

本稿は本田勝也，早川美徳，佐藤信一，大内俊二各氏らとの共同研究を基礎に，以下に記す文献を参考にして記したものである。ここに上記各氏に深く感謝する。またこれを機会にちゃんと勉強してみたいという方は是非次の文献を参照されることをお勧めする。

参 考 文 献

- 1) J. Feder: Fractals (Plenum, New York, 1986) [物理から見たフラクタル一般の入門書].
- 2) T. Vicsek: Fractal Growth Phenomena, 2nd ed. (World Scientific, Singapore, 1992) [フラクタル成長現象の物理を取り扱った本].
- 3) 本田勝也：フラクタル(朝倉書店) [フラクタルの理論的な側面に重点がおかれている。特に自己アフィン・フラクタルな成長界面の取り扱いが興味深い。]
- 4) 松下貢：フラクタルの物理 (I), (II) (裳華房) [物理学におけるフラクタル的なアプローチの入門書]