billiard系に於ける周期軌道の統計性

名古屋大学　大学院理学研究科　物質理学専攻（物理系）　浅水屋 剛[1]

1 Introduction

周期軌道の相関は量子カオスという文脈で極めて重要な役割を果たす。ここでは量子カオスを、カオスを示すような系での量子-古典対応、という観点であるとする。重要な例の一つが、準位統計の普遍性に関する BGS (Bohigas-Giannoni-Schmit) conjecture [4] で、量子系の準位統計が対応する古典系のエルゴード性と強く結び付いているとしている。

準位密度は準位統計の議論に於いて基本となる量で、本来量子力学の範疇にある量である。

$$d(E) \equiv \sum_n \delta(E-E_n) = \langle d(E)\rangle + d_{osc}(E), \tag{1}$$

$d(E)$ が準位密度で $\langle d(E)\rangle$, $d_{osc}(E)$ は各々その平均, 揺らぎの部分である。Gutzwiller の跡公式は準位密度の揺らぎの部分 $d_{osc}(E)$ を半古典的に評価したものである [5]。

$$d_{osc}(E) = \frac{1}{\pi\hbar}\Re\sum_{\gamma,\kappa} B_\gamma \frac{T_\gamma}{\kappa}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_\gamma(E)\right], \tag{2}$$

γ, S_γ, T_γ, B_γ, κ は各々周期軌道の index, 作用, 周期, 安定性,Maslov 指数, 繰り返し数で、これらの量は総て正準変換に対して不変である。つまり準位密度が総ての古典周期軌道に関する和として表された事になる。この跡公式が絶対収束しない級数であるという事、さらに後述の spectral form factor の解析等から周期軌道間の相関が指摘されてきた [1]。しかしそのような相関が如何なるものかは未だに良く理解されていない。

spectral form factor（SFF）[3] は二点準位相関関数をフーリエ変換したもので、周期軌道相関の議論の中で重要な指標の一つとして挙げられる。

$$K(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{\langle d(E)\rangle}\left\langle d_{osc}\left(E+\frac{\eta}{2}\right)d_{osc}\left(E-\frac{\eta}{2}\right)\right\rangle_E \exp\left[-i2\pi\langle d(E)\rangle\eta\tau\right], \tag{3}$$

ただし $\tau = T/T_H$ で、 $T_H = 2\pi\hbar\langle d(E)\rangle$ は Heisenberg 時間という特徴的な時間スケールである。SFF は時間反転対称な系でランダム行列理論と半古典論とから各々次のような形に書ける。

$$K^{GOE}(\tau) = 2\tau - 2\tau^2 + \ldots, \qquad \text{for} \quad \tau < 1 \tag{4}$$

$$K^{scl}(T) \approx \frac{1}{2\pi\hbar\langle d(E)\rangle}\sum_{\gamma,\gamma',\kappa,\kappa'}\left\langle B_\gamma B^*_{\gamma'}\frac{T_\gamma}{\kappa}\frac{T_{\gamma'}}{\kappa'}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(S_\gamma - S_{\gamma'})\right]\delta\left(T-\frac{T_\gamma+T_{\gamma'}}{2}\right)\right\rangle_{E,T} \tag{5}$$

(4) の 2τ の項については (5) の対角項によるものであると理解されている [3]。それ以外の項に関しては、非対角項の総和に依るものであるという事以上には半古典論による理解は深まらなかった。

近年、非対角項に寄与するであろう周期軌道の対に関して Sieber-Richter によって提案がなされた [8]。この提案とそれに続く研究 ([6], [9], [10]) の共通した仮定は、相関に寄与する周期軌道の対が互いに近い事、寄与する軌道の対の性質と Maslov 指数の一致、である。彼等は各々に周期軌道の対とそれらの分布を仮定し、(4) に於ける $-2\tau^2$ に相当するものを半古典論から再現した。ただしこれらの仮定は自明ではない。その上、他の周期軌道の対が如何にして相殺されていくかというからくりについて、理解は極めて不充分であると言える。

[1]E-mail: asamizu@r.phys.nagoya-u.ac.jp

2 ねらい&数値計算

本研究の狙いは式 (4) の $-2\tau^2$ の部分に相当する軌道相関の候補を露な形で見出す事である。その発想は、本当に相関があるのであればSFF の半古典表式 (5) に出ている量の統計性にも現れる筈である、というものである。また、そういった相関が pruning の度合いの如何に関わらず存在し続けるかどうかも極めて重要な問題である。pruning とは (Gutzwiller の跡公式が適用できる) 双曲系の周期軌道の集合が一般的に持つ性質で、平たく言うと、系のあるパラメタを変化させた時に周期軌道の総数が減少する、というものである。これ迄の研究では pruning を考慮した解析が為されてこなかった。

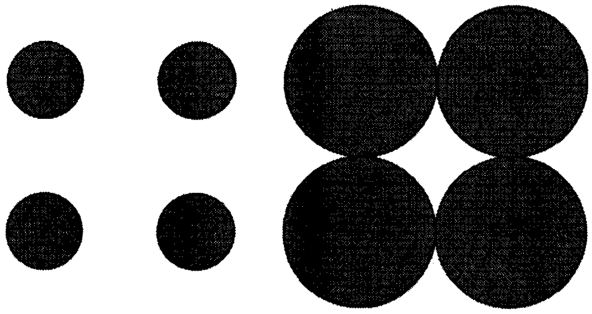

図 1: 4-disk billiard：左：$r = 0.5$, 右：$r = 1.0$

本研究 [2] では、先ず周期軌道の対の統計性に着目し、4-disks billiard 系 (図 1) に於いて周期軌道の対の長さに関する統計について議論した。この系では、4つの disk が同じ半径を持ち、その半径がパラメタとなって $r = 0.5$ から $r = 1.0$ まで値を変化させている。各々の半径の値に於いて、周期軌道は衝突回数 17 回のものまで数値的に求められた。これらの周期軌道のデータから、分布 $C^{\pm}_{\Delta L_{\pm},m_-,m_+}(L_-, L_+)$ を計算した。

$$
\begin{aligned}
C^{\pm}_{\Delta L_{\pm},m_-,m_+}(L_-, L_+) \equiv \sharp\{\gamma \neq \gamma' \mid m_- \Delta L_- \leq L_\gamma - L_{\gamma'} < (m_- + 1)\,\Delta L_-\,, \\
m_+ \Delta L_+ \leq L_\gamma + L_{\gamma'} < (m_+ + 1)\,\Delta L_+\},
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
L_\pm = L_\gamma \pm L_{\gamma'}, \quad \Delta L_\pm = \sup_\gamma \{L_\gamma \pm L_{\gamma'}\}/M_\pm, \quad m_\pm = 0, 1, \ldots, M_\pm - 1 \in \mathbf{N}. \tag{7}
$$

分布関数 $C^{\pm}_{\Delta L_{\pm},m_-,m_+}(L_-, L_+)$ を考える理由は、(5) 式から、非対角項の寄与では exp の位相や δ 関数が最も重要で、しかも同時に考える事が不可欠だからである。特に billiard 系では作用 S_γ と周期 T_γ はどちらも長さ L_γ に置き換えられ、従って問題は周期軌道の対の長さの和と差の問題に帰着される。

さらに、上記の対の統計性を理解する為に、対の統計ではない周期軌道の長さスペクトルの累積数密度 $N(L)$ を求めた。これはすなわち、系に於ける長さ L までの周期軌道の総数を記述する。

$$
N(L) \equiv \sum_{\gamma=0}^{\infty} \theta(L - L_\gamma)\,. \tag{8}
$$

$N(L)$ は一般の双曲系に於いて、L の大きい極限で以下のように漸近する事が証明されている [7]。

$$
N(L) \sim \exp(h_{top} L)/L \equiv N_{asympt}(L)\,, \tag{9}
$$

ただし h_{top} はトポロジカルエントロピーである。ここで着目したいのは漸近形からのズレである。そこで以下のように、数値計算で得られた $N(L)$ から漸近形 $N_{asympt}(L)$ を差し引いた量 $N_{fluct}(L)$ を見る事にした。

$$
N_{fluct}(L) = N(L) - N_{asympt}(L)\,. \tag{10}
$$

3 結果

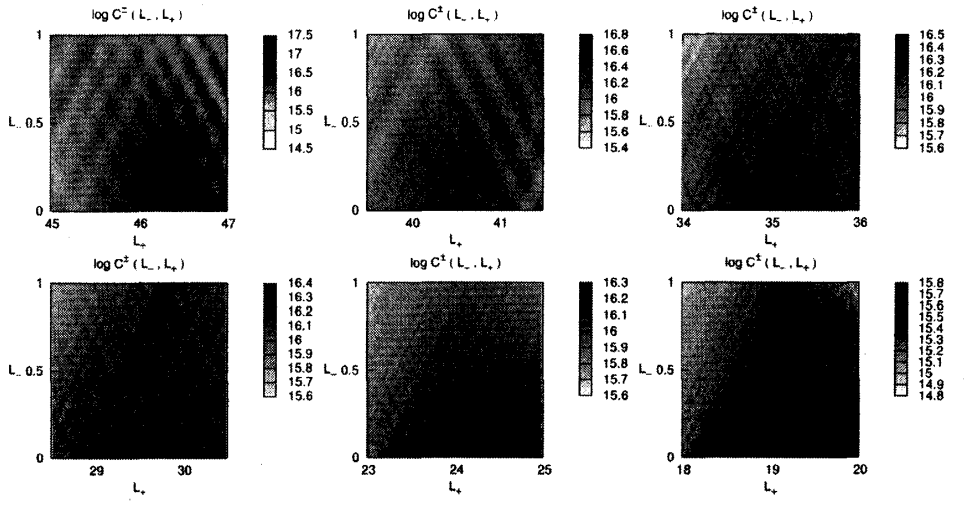

図 2: $C^{\pm}_{\Delta L_{\pm},m_-,m_+}(L_-,L_+)$:上 (左から)$r=0.5,\ 0.6,\ 0.7$; 下 (左から)$r=0.8,\ 0.9,\ 1.0$

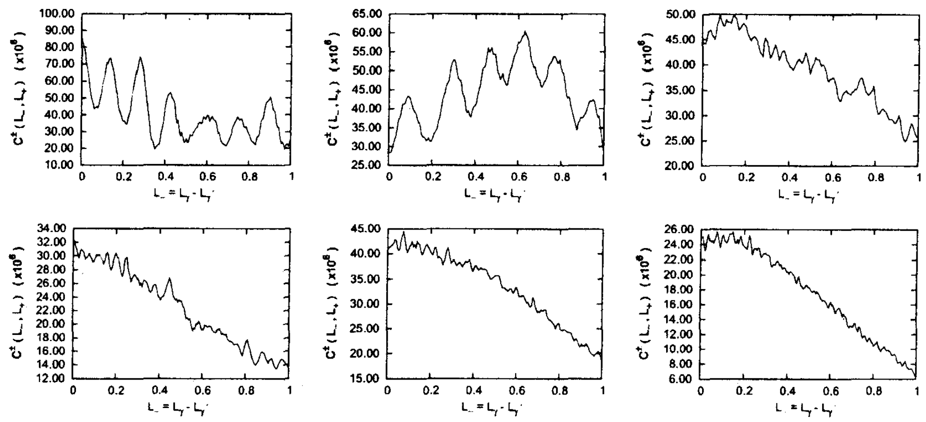

図 3: $C^{\pm}_{\Delta L_{\pm},m_-,m_+}(L_-,L_+)$ の断面: 上 (左から)$r=0.5,\ 0.6,\ 0.7$; 下 (左から)$r=0.8,\ 0.9,\ 1.0$

$C^{\pm}_{\Delta L_{\pm},m_-,m_+}(L_-,L_+)$ の分布を見ると、$r=0.5$ から $r=1.0$ まで周期的 peak 構造が、幅を変えこそすれ、パラメタの如何に依らず見える (図 2,3)。つまり pruning に依存しない相関が得られた事になる。一方、$N(L)$ の揺らぎの部分 $N_{flct}(L)$ からも周期構造が見出された (図 4)。この他の解析から、周期軌道の対に関する統計 $C^{\pm}_{\Delta L_{\pm},m_-,m_+}(L_-,L_+)$ に見られる周期構造が単独の周期軌道の統計性 $N(L)$ に見られる周期構造に起因していることが解ってきた。

以上の様な、pruning があっても存在する周期軌道の相関は、SFF の非対角項に重要な寄与をするであろうと考えられる。今後は Sieber-Richter の研究との対応も視野に入れ、周期構造に寄与するような周期軌道の分類を行いたい。

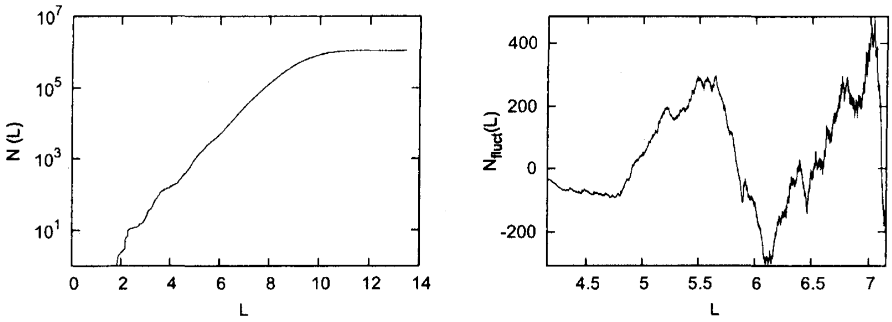

図 4: 長さスペクトルの累積数密度：左：$N(L)$, 右：$N_{fluct}(L)$

参考文献

[1] N. Argaman, F. M. Dittes, E. Doron, J. P. Keating, A.Y. Kitaev, M. Sieber, and U. Smilansky. Correlations in the actions of periodic orbits derived from quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 71, No. 26, pp. 4326–4329, 1993.

[2] Takeshi Asamizuya. Statistical properties of periodic orbits in 4-disk billiard system: pruning-proof property. *arXiv: nlin.CD/0503016*, 3 2005.

[3] Michael V. Berry. Semiclassical theory of spectral rigidity. *Proc. Roy. Soc. London A*, Vol. 400, p. 229, 1985.

[4] Oriol Bohigas, Marie-Joya Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 52, No. 1, p. 1, 1984.

[5] Martin C. Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechnaics.* Springer–Verlag, New York, 1990.

[6] Sebastian Müller. Classical basis for quantum spectral fluctuations in hyperbolic systems. *Eur. Phys. J.B*, Vol. 34, pp. 305–319, 2003.

[7] William Parry and Mark Pollicott. An analogue of the prime number theorem for closed orbits of axiom a flows. *Ann. of Math.*, Vol. 118, No. 3, pp. 573–591, Nov 1983.

[8] Martin Sieber and Klaus Richter. Correlations between periodic orbits and their role in spectral statistics. *Physica Scripta*, Vol. T90, pp. 128–133, 2001.

[9] D Spehner. Spectral form factor of hyperbolic systems: leading off-diagonal approximation. *J.Phys.A*, Vol. 36, pp. 7269–7290, 2003.

[10] Marko Turek, Dominique Spehner, Sebastian Müller, and Klaus Richter. Semiclassical form factor for spectral and matrix element fluctuations of multidimensional chaotic systems. *Phys. Rev. E*, Vol. 71, p. 016210, 2005. arXiv: nlin.CD/0409012.