金融市場の価格変動の待ち時間に関する指数分布からのずれ

ソニー株式会社　佐塚　直也 [1]

金融市場の価格変動の待ち時間に関する指数分布からのずれを議論する。これまで金融市場の取引はポワソン過程に従って起こり、その待ち時間を指数分布と仮定した上での議論が多くなされてきた。しかし、その一方で、高頻度な実データからは指数分布とはならない結果が得られ始めている。そこで本論文では、指数分布からのずれを定量的に検証するために、指数分布を特別な場合として含む、より一般的な分布としてワイブル分布を導入する。そして実データのワイブル分布へのあてはめを用いて、指数分布からのずれをワイブル確率紙、分布間距離等により具体的に検証する。

1　イントロダクション

これまで金融市場の取引は独立に起こり、その取引間の時間間隔である待ち時間を指数分布とした上での議論が多くなされてきた[2]。しかしながら、高頻度な実データからは指数分布とはならない結果が得られ始めていることも事実である [1, 2]。それゆえ、市場の振舞いを定量的かつ系統的に調べるための理論を構築する際には、この指数分布の仮定の妥当性を検討しておくことはとても重要であろう。そこで本研究では、指数分布からのずれを調べるために、指数分布を特別な場合として含む、より一般的な分布を導入する。その分布は少数のパラメータのみで指数分布からのずれを定量化できることが望ましい。つまり、そのような分布を実データにあてはめ、指数分布からのずれの程度をそのパラメータを介して判定したい。この目的のために適した分布の一例としては広く「ワイブル分布」が知られている。ワイブル分布は故障時間の分布や人の寿命分布などに利用されており、1つの変数 m を用いて次のように書ける。

$$\text{確率密度関数}\quad f(t) = \frac{m}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{m}\right] \tag{1}$$

$$\text{累積分布関数}\quad F(t) = 1-\exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{m}\right] \tag{2}$$

m は形状を特徴付けるパラメータであり、図1に $m=0.5,1,2$ について確率密度関数を図示した。この図1と式(1)から明らかなように $m=1$ の場合は指数分布と一致するので、実際に指数分布を特別な場合として含むことが見て取れる。よって、実データにワイブル分布をあてはめた際の推定値 m が1からどの程度離れているかによって、その分布の指数性を定量的に評価することができる。従って、本論文の目標は、実データにおける指数分布からのずれの程度を、データのワイブル分布へのあてはめを用いて具体的に計測・検証することである。

---

[1]E-mail: Naoya.Sazuka@jp.sony.com

[2]本研究では待ち時間が比較的短い領域のみを扱う。

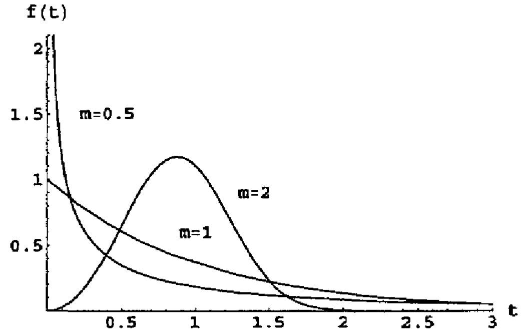

図 1: mの値の違いによる確率密度関数の形状 ($\alpha = 1$)

2 価格変動の待ち時間の解析

2.1 データ

今回は、実データとしてソニー銀行のドル円為替レート（ソニーバンクレート）を解析する。ソニーバンクレートは、市場レートを参照してソニー銀行が提示する為替レートをいい、直前の表示レートに対して市場レートが 10 銭以上変動するとその市場レートと同じ値をとり、それ以外であれば変動しない（直前のレートを維持する)。原則として、為替市場が開いている間は提示されている。つまり通常のダブルオークション市場と異なり、ソニーバンクレートは市場レートのみに影響され、顧客の取引には一切影響されない。用いるデータの期間は 2001 年 10 月から 2004 年 5 月、データ数は約 46,000、平均待ち時間は約 20 分である。ソニーバンクレートの平均待ち時間は、価格幅の小さい変動の多くが間引かれているので、市場データの約 7 秒より長い。ここで i 番目と $i+1$ 番目の価格変動の間の待ち時間 t_i（秒）を

$$t_i = s_{i+1} - s_i \tag{3}$$

と定義する。s_i は i 番目の変動が起こる時間である。まず、待ち時間が t 以上である累積確率 $P(>t) = 1 - F(t)$ を片対数グラフで見ると、図 2 のようになる。 するとソニーバンクレートの待ち時間は指数分布ではないことがわかる。もし待ち時間が指数分布であれば、データの片対数プロットは直線になるはずであるが、図 2 より直線からずれていることが明らかに見て取れる。

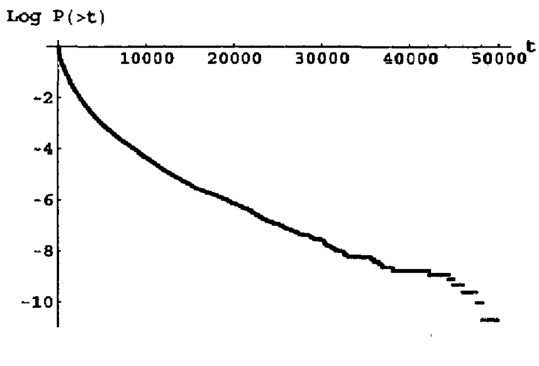

図 2: 待ち時間の累積確率 $P(>t)$ に関する片対数グラフ

しかし、この累積確率の片対数プロットでは指数分布からのずれの定量的評価には不十分である。そこで、ここからは前節で説明したように、指数分布からのずれの程度を実データのワイブル分布へのあてはめによって定量化する。具体的にはワイブル確率紙によって視覚的にそのずれを確認する。

2.2 ワイブル確率紙

ワイブル分布の式 (2) の両辺に対数を 2 回とると

$$\ln\ln\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)=m\ln t-m\ln\alpha \tag{4}$$

となり、$X=\ln t$、$Y=\ln\ln\left(1/\left(1-F(t)\right)\right)$ と変換された座標上では、式 (4) は傾き m の直線となる。このように変換された用紙をワイブル確率紙といい、データがワイブル分布に従っているか否かを調べることができる。もしデータがワイブル分布に従うのであれば、データはワイブル確率紙上で傾き m の直線に大体のる。指数分布に従うのであれば傾きは 1 となる。よって、指数からのずれが直線の傾き m によって確認できる。まず実データにワイブル分布をあてはめると、m の推定値は約 0.59 になる。そして図 3 からわかるように、実データは推定値 0.59 の傾きをもつ直線上に大体のる。よって、ソニーバンクレートの待ち時間は指数分布ではなく、$m=0.59$ のワイブル分布に近いことがわかる。そして、指数分布からのずれの程度が m より定量的に確認できる。

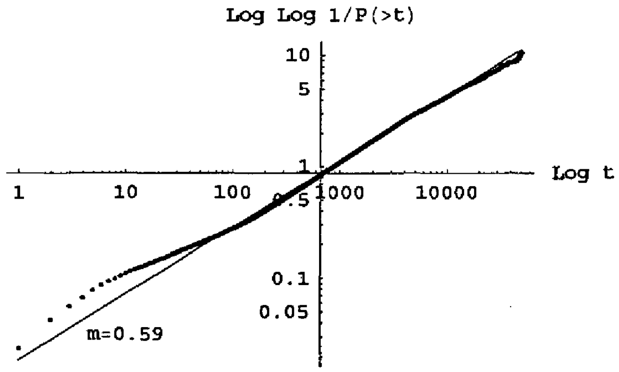

図 3: ワイブル確率紙、データと推定した傾き 0.59 の直線。

2.3 分布間距離

次に、別の視点を用いて指数分布からのずれを確認する。指数分布とワイブル分布が実データからどの程度はなれているかを計測することで、実データの指数分布からのずれを評価する。そのための指標として、分布間の離れ具合を表す"距離"を導入する。具体的には「Kullback-Leibler divergence」や「Hellinger 距離」などがあり、実データの分布 P とモデルの分布 Q との間の距離をそれぞれ KL divergence $=\sum_{t=1}^{t_{max}}P(t)\ln\left(P(t)/Q(t)\right)$、Hellinger 距離 $=\sum_{t=1}^{t_{max}}2\left(P(t)-Q(t)\right)^2$ のように書くことができる。表 1 は Q が実データにあてはめたワイブル分布 ($m=0.59$)、または

実データにあてはめた指数分布である場合の PQ 間の分布間距離である。表 1 より、2つの指標ともにワイブル分布の方が指数分布より実データに対して近いことがわかる。ここで Hellinger 距離は距離の公理を満たすので、値の大小を比べることができる。よって Hellinger 距離において、ワイブル分布は指数分布よりも実データに約 1.7 倍近いことがわかる。このように、分布間距離からもソニーバンクレートが指数分布よりもワイブル分布に近いことがわかり、指数分布からのずれが定量的に確認できる。

	KL divergence	Hellinger 距離
Q=ワイブル	0.186308	0.210737
Q=指数	0.490746	0.356312

表 1: PQ 間の KL divergence と Hellinger 距離 ($t_{max} = 50,000$)。

3 議論と結果

本論文では、ソニーバンクのドル円為替レートを用いて、その価格変動の待ち時間が指数分布にならないことを示した。そして、その指数分布からのずれを、データのワイブル分布へのあてはめを用いて、ワイブル確率紙、分布間距離から具体的に計測・検証した。

もし、価格変動の待ち時間が指数分布であるならば、変動の計数過程は記憶を持たないポワソン過程であることを仮定している。しかし、実証的には待ち時間は指数分布からずれているので、実際の価格変動の計数過程には記憶があり、過去の履歴に依存している。さらに興味深いことは、本研究により、市場データが 10 銭以上変動するごとに抽出したソニーバンクレートにも待ち時間の非指数分布性が確認できたことである。この抽出方法の様々な役割も現在解析中である [3]。

謝辞

ソニー銀行の石井茂社長にはソニー銀行データの提供をはじめ有益なご助言を頂き感謝します。また京都大学基礎物理学研究所 YITP 研究会 YITP-W-05-17「経済物理学 II–社会・経済への物理学的アプローチ–」での有益な議論に感謝します。

参考文献

[1] M. Raberto et al, Physica A. **314** (2002), 749.

[2] E. Scalas et al, to appear in Physica A.

[3] N. Sazuka, to appear in EPJ B.