

長期記憶を持ち非常に希の起こる現象の解析

東京情報大学 総合情報学部 山崎和子¹, 大城正典, 中尾宏

1 はじめに

近年、人間社会の複雑化に伴い、様々なリスクが絡み合って我々の生活を脅かしている。ハリケーンや大雪などの異常気象や地震、原油価格の高騰、ひいては株式市場や外国為替市場の暴落暴騰に至るまで、まれに起こる現象が複雑化したネットワークを通して非常に深刻な結果をもたらす傾向がますます顕著になりつつある。これらの「災害」に対処する科学の発達が望まれている。このような異常な現象の解析において、最近、極値理論が著しく発達した。しかし、この理論では、個々の事象が独立して生起することが大前提であり、それが大きく理論の適用範囲を制限している。多くの自然現象や社会経済現象は長期記憶を持つと考えられるが、それら記憶を持つ時系列の異常値の解析は、未踏の分野である。

定常でランダムな時系列において、一定幅以上の変動の生起はポアソン過程に従い、生起間隔 τ の確率密度関数は平均生起間隔 τ の指数分布を持つ。したがって、この密度関数は τ によりスケールされる。つまり、大きな幅の変動の頻度は小さく τ の統計的性質は悪いが、その確率密度関数を、統計的性質の良い小さな変動の確率密度関数から推測することができる。

一方定常で長期記憶を持つ時系列においては、もはや生起間隔 τ の確率密度関数が指数分布をもつことは期待できない。しかし最近様々な長期記憶時系列についても、同様のスケーリングが存在し、その確率密度関数が引き延ばされた指数関数になることが実証的に示された。[1][2][3][4][5]ここでも、希に起こる異常値の統計的性質を、頻度の大きい現象からスケーリングにより推測することができる。

筆者の一人とボストン大学のグループは、為替交換比率やニューヨーク株式市場の日次データや1分ごとのデータを用い、このスケーリングが成り立つことを確かめた。また、1つ前の生起間隔の条件付確率や、条件付平均生起間隔は、強く1つ前の生起間隔に依存をし、生起間隔もクラスタリングを起こしていることを示した。[6][7][8]

ここではこれらの論文の紹介をするとともに、この生起間隔の確率分布関数の関数形は長期記憶の指数 α （ハースト指数またはDFAの指数）と引き延ばされた指数関数の指数 γ との間に $\alpha = 1 - \gamma/2$ の関係があることを様々なモデルやデータを使って示す。

¹E-mail: yamasaki@rsch.tuis.ac.jp

2 生起間隔 τ の確率密度関数のスケーリングと τ 自身の記憶

まず、それぞれの株式価格の上昇率を求める。

$$G(t) \equiv \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

²図1にその絶対値を標準偏差で規格化した $g(t)$ が閾値 q を超えた間隔 τ_q を図で説明する。

この生起間隔 τ_q の確率密度関数 $P_q(\tau)$ を図2(a),(b)に、それを平均生起間隔 $\bar{\tau}$ (ここでは q に関する添字を省略する。) でスケールしたものを図2(c),(d)に示す。異なる q について、異なっていた確率密度関数が平均生起間隔 $\bar{\tau}$ でスケールすると1本に重なることがわかる。

図3に、ある q について1つ前の間隔 τ_0 (ここでは q に関する添字を省略する。) を条件とした、条件付平均生起間隔 $\hat{\tau}(\tau_0)$ を、 τ_0 に対して描いた(中塗りのマーク)。 $\hat{\tau}$ と τ_0 に正の相関があることがわかる。また、 $g(t)$ をシャッフルした時系列について同様にして条件付平均生起間隔 $\hat{\tau}(\tau_0)$ を求めると(中抜きマーク)、期待されるように $\hat{\tau}$ と τ_0 に相関はない。

3 生起間隔 τ の確率密度関数 $P_q(\tau)$ の関数形とスケール指数

$P_q(\tau)$ は以下のような引き延ばされた指数関数

$$P_q(\tau) \sim e^{-\alpha\tau^\gamma}$$

でよく表される。ここで、 $\gamma \sim 0.3 \sim 0.4$ 。次に株式価格上昇率の絶対値の時系列から DFA 指数を求めるとおよそ $\alpha \sim 0.8 \sim 0.9$ 。これらの指数は、 $\alpha = 1 - \gamma/2$ の関係を示唆している。

次に、長期記憶を持つ典型的モデルより生成したデータと心臓の鼓動の間隔について、閾値 q 以上の上下動の生起間隔 τ の確率密度関数 $P_q(\tau)$ を求めた。 $\bar{\tau}$ でスケールをし、引き延ばされた指数関数 $e^{-\alpha\tau^\gamma}$ にフィットさせた。指数 γ と DFA 指数 α は概ね $\alpha = 1 - \gamma/2$ の関係を満たしていることが解る。(図4)

	γ	α
stock price	0.3 ~ 0.4	0.8 ~ 0.9
gaussian cascade	0.16	0.90
multinomial cascade	0.028	0.96
figarch	0.31	0.85
multifractal random walk	0.52	0.70
heart beats	0.24	0.86

4 バリュース・アット・リスクへの応用

ファイナンスの分野で、リスクの指標として広く使われているバリュース・アット・リスクは、ある時間スケール Δ に対する価格上昇率 r の確率密度関数を $p_\Delta(r)$ とすると、与えられた損失確率

²1分ごとのデータについては、日中のアノマリティを消去するため、インデックスとして取引日 i と取引時間 s を持つ株価を全取引日 $i = 1, N$ で平均したイントラディのパターン $A(s)$ で規格化した。

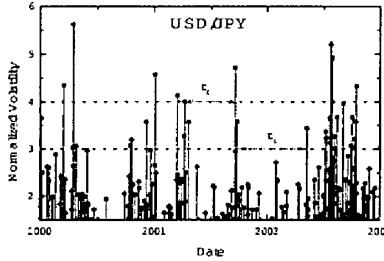


図 1: 閾値 $q_1 = 3$ と $q_2 = 4$ を越えた事象の生起間隔の図式的説明。それぞれの q に対する生起間隔を矢印で示す。

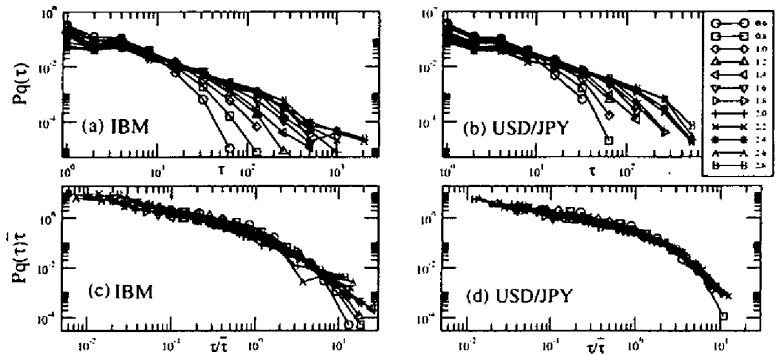


図 2: 生起間隔 τ の確率密度関数 $P_q(\tau)$ 。(a) 典型的な株価, IBM の日足 と (b) 典型的な為替交換比率, 日次の USD/JPY の 1 2 個の閾値 q について図示した。図 (c) と (d) は, $\bar{\tau}$ でスケールし, $\bar{\tau}P_q$ を $\tau/\bar{\tau}$ について図示した。

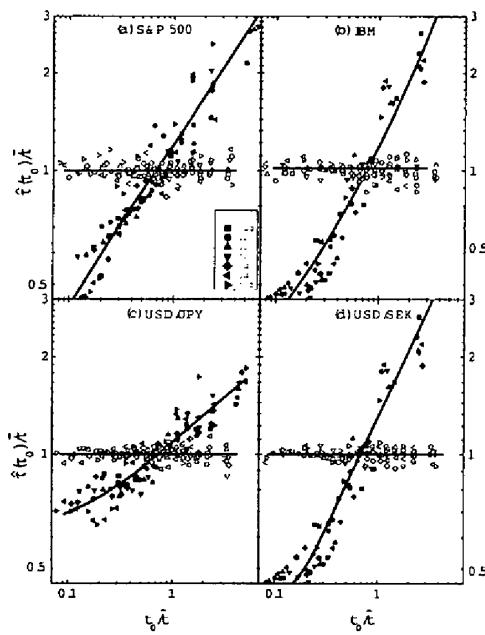


図 3: $\bar{\tau}$ でスケールされた条件付平均値 $\hat{\tau}(\tau_0)$ 。(a) S&P 500 の日足, (b) IBM の株の日足, (c) 日次の USD/JPY 為替交換比率と (d) 日次の USD/SEK 為替交換比率 (中塗りのマーク)。規格化し絶対値をとった時系列 $g(t)$ をシャッフルした後, 同様にして求めた条件付平均生起間隔 $\hat{\tau}(\tau_0)$ (中抜きのマーク)

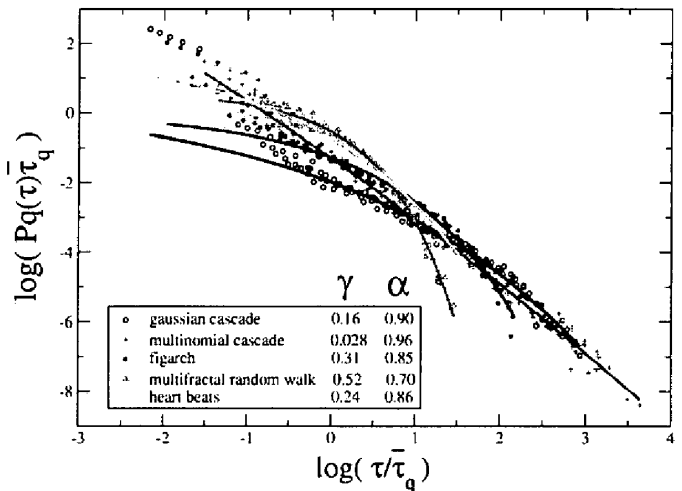


図 4: 長期記憶を持つ典型的モデルより生成したデータと心臓の鼓動の間隔について, 閾値 q 以上の上下動の生起間隔 τ の確率密度関数 $P_q(\tau)$. $\bar{\tau}$ でスケールをし, 引き延ばされた指数関数 $e^{-a\tau}$ にフィットさせた。指数 γ と DFA 指数 α は概ね $\alpha = 1 - \gamma/2$ の関係を満たしていることが解る。

p^* でおきる下落 q で定義される。

$$\int_{-\infty}^{-q} p_{\Delta}(r) dr = p^* \quad (1)$$

Δ を価格時系列の1ステップとし、 τ を $q\sigma$ 以上の上下動の生起間隔ではなしに、 $-q\sigma$ 以下の下落の生起間隔とするとこの確率 p^* は生起間隔 τ の平均 $\bar{\tau}$ の逆数となる。

また条件付平均間隔 $\hat{\tau}(\tau_0)$ についても、以下のようにその逆数が条件付確率の積分となる。

$$\frac{1}{\tau} = \int_{-\infty}^{-q} p_{\Delta}(r) dr. \quad \frac{1}{\hat{\tau}(\tau_0)} = \int_{-\infty}^{-q} p_{\Delta}(r|\tau_0) dr. \quad (2)$$

したがって、 $\hat{\tau}(\tau_0)$ をスケーリングによって推測することによりダイナミックなリスクの予測が可能になる。[7]

参考文献

- [1] Bunde, A., Eichner, J. F., Kantelhardt, W. and Havlin, S., Long-Term Memory: A Natural Mechanism for the Clustering of Extreme Events and Anomalous Residual Times in Climate Records, *Phys. Rev. Lett.*99, 048201.(2005)
- [2] Livina, V., Tuzov, S., Havlin, S. and Bunde,A., Recurrence intervals between earthquakes strongly depend on history, *Physica A* 348:591-595. (2005)
- [3] Bunde, A., Eichner, J. F., Havlin, S. and Kantelhardt, W., Return intervals of rare events in records with long-term persistence *Physica A* 342, 308-314. (2004)
- [4] Bunde, A., Eichner, J. F., Havlin, S. and Kantelhardt, W., The effect of long-term correlations on the return periods of rare events *Physica A* 330, 1-7. (2003)
- [5] Corral, A., Long-Term Clustering, Scaling, and Universality in the Temporal Occurrence of Earthquakes, *Phys. Rev. Lett.* 92:108501. (2004)
- [6] Yamasaki, K., Muchnik, L., Havlin, S., Bunde, A. and Stanley, H.E., Scaling and Memory in Volatility Return Intervals in Financial Market, *Pro.Natl.Aad.Si.*102,942. (2005)
- [7] Yamasaki, K., Muchnik, L., Havlin, S., Bunde, A. and Stanley, H.E.,Scaling and Memory in Return Loss Intervals: Application to Risk Estimation ,*Pratial Fruits of Eonphysics*, edited by H.Takayasu (2005)
- [8] Fengzhong Wang,Kazuko Yamasaki, Shlomo Havlin, and H. Eugene Stanley,Scaling and memory of intraday volatility return intervals in stock markets, *PHYSICAL REVIEW E* Vol.73, 026117(2006)