

株式市場における市場インパクトの実証的研究とミクロな確率モデル

増川純^一

福山平成大学経営学部経営情報学科

1. はじめに

外国為替や株など、連続オークションにより価格形成される金融市場における価格変動の分布がFat tailを持つことは、市場や時間スケールを超えたStylized factとして広く知られている¹⁾⁴⁾。しかしながら、「価格変動分布の裾野付近の大規模な価格変動が何によって引き起こされているのか」についての議論は未だ続いている⁵⁾⁶⁾。素朴に考えれば、「大きい取引が大きい価格変動を引き起こす」というのはもっともらしい言明のように思える。実際、Market impactの実証研究では、一定期間の出来高とその期間での平均的な価格変動の大きさとの関係を調べたものが多い⁵⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾。それらの研究によれば、「平均的な価格変動の大きさは出来高の上に凸な単調増加関数である」というのが最も一般的な見解である。これに対し、価格変動の大きさと市場の流動性との間の関係に注目した研究もある⁶⁾¹⁰⁾。その中でも、Farmerら⁶⁾はロンドン証券取引所の上場株式の実証研究により、「価格変動の大きさは出来高とは無関係であり、それは最良気配(Ask/bit)とそれに隣接する気配との間のGapにより決まる」、また「価格変動分布のFat tailはこのGapの揺らぎ分布のFat tailと一致する」と結論している。

それでは、気配間のGapの揺らぎ分布のFat tailは、どのような個人投資家、機関投資家、証券会社などのブローカー（以下総称してトレーダーという）の振る舞いから生じているのであろうか？本稿では、株式市場の連続オークションの確率的ミクロモデルを作成し、そのシミュレーションによる解析から、トレーダーが過去の注文状況を模倣する指値注文(Limit order)を出す傾向を持てば、価格変動分布の裾野のベキ乗則を説明できることを示す。次節では、連続オークション市場における価格形成メカニズムを概観し、大規模な価格変動が起こるメカニズムについて、対極的な二つの考え方を述べ、先に述べたFarmerらの研究を簡単に

紹介する。3節では、株式市場の価格形成をミクロなレベル(Order flow)で記述する確率モデルと、そのシミュレーションによる解析結果について報告する¹⁾。

2. 連続オークション市場における価格形成メカニズム

ここでは、外国為替市場や多くの株式市場で採用されている価格形成の連続オークション方式を概観する。まず注文は売り注文と買い注文の二種類ある(ダブルオークション)。注文の仕方には、注文量のみを指定する成り行き注文(Market order)と、売値の最低値(あるいは買値の最高値)と注文量の両方を指定する指値注文(Limit order)の二通りの方法がある。約定には価格優先の原則が適用される。売値を上回る買値の買い注文(あるいは買値を下回る売値の売り注文)があれば直ちにマッチングされ約定する。約定されていないLimit orderは注文控え(Limit order book)に売り(あるいは買い)気配としてストックされている。売りMarket orderは、Limit order bookにストックされている最良の買い気配(Bit = 最高値の買いLimit order)とマッチングされ、買いMarket orderは最良の売り気配(Ask = 最低値の売りLimit order)とマッチングされる。最良気配(Ask/bit)に複数のLimit orderがある場合は時間優先の原則が適用される。AskとBitの値段の間隔をSpreadという。

このような価格形成メカニズムを持つ連続オークション市場において、ほとんどの場合約定はAskかBit上で起こる²⁾ので、価格変動の要因としては、取引サイドが変わるか、最良気配(Ask、Bit)が変わる、の二つ

¹ 紙面の関係で実証研究についての報告は含めることが出来ませんでした。それについては参考文献9)を参照してください。

² 東京証券取引所で1999年11月から2000年10月まで頻繁に取引された21銘柄に関して、99.9%の約定がAskかBit上で行われた。

が考えられる。このうちで、Market impactに関係するのは、成り行き買い（売り）で最良売り（買い）注文がクリアされて、最良気配（ask、bit）が変わる場合である。Large market impact、即ち最良気配の大規模変動は、次の様な典型的かつ対極的な二つのケースで起こると考えられる。

- a. 大規模な Market order によって、最良気配から離れた Limit order までがマッチングによりクリアされて最良気配が大きく動く。
- b. 最良気配と次の気配との間の Gap が大きいため、Market order のサイズにかかわらず最良気配が大きく動く。

これらのいずれが主要因となって、大規模な価格変動を引き起こすのであろうか？これに関して、Farmerら⁶⁾は、ロンドン証券取引所の Limit order book の履歴を注意深く調べた。具体的には、Limit order book は実際の Historical data をもちい、サイズを固定した仮想的な Market order を発注して Ask (Bit) がどれだけ変動するかを調べた。その結果、平均的なサイズに固定した仮想的な Market order に対して、実際の Ask (Bit) の変動分布とほとんど同じものが得られた。また、実際の Ask (Bit) の変動分布は、最良気配 (Ask/bit) とそれに隣接する気配とのあいだの Gap の分布とほとんど一致した。これらの結果から、Farmerらは

- ・ 価格(最良気配)の変動の大きさは Market order のサイズとは無関係であり、それは最良気配 (Ask/bit) とそれに隣接する気配とのあいだの Gap により決まる

と結論している。そこで、今度は Gap の分布の Fat tail はどのようなメカニズムで生じるのかということが問題となる。次節では、トレーダーが過去の注文状況を模倣する指値注文 (Limit order) を出す傾向を持たせ、Gap の裾野のベキ乗則を説明できる事をモデルによって検証したい。

3. 確率モデル

この節では、前節で概観した連続オークション市場の Limit order book の時間発展を記述する確率モデルと、シミュレーションによる解析結果について報告する。市場には3つのタイプの注文が到着する。Limit order、Market orderそしてOrderのCancellationである。それらの注文の到着率（単位：件/時間）を、それぞれ λ_{limit}^{offer} (λ_{limit}^{buy})、 λ_{market}^{offer} (λ_{market}^{buy})、 λ_{cancel}^{offer} (λ_{cancel}^{buy}) とする。ここでインデクス offer と buy は、それぞれ売り側の注文と買い側の注文を表す。一般に、注文価格（指値）は現在の株価、Ask/bit、過去の注文状況など（それらを総称して Limit order book の履歴ということにする）に依存するものと考えられるが、それらの依存性を無視し（ただし、売り Limit order はその時点での Bit より上、買い Limit order はその時点での Ask より下に置かれるものとする）、注引量も固定したモデルは、Zero intelligence model¹¹⁾ と呼ばれている。もちろんこのようなモデルからは価格変動分布の Fat tail や Volatility clustering のような相関は出てこないが、より現実的なモデルのための第 0 近似としての意味を持つと考えられる。合理的な意思決定者としてのトレーダーを仮定する期待効用理論とは対極にある考え方であろう。

ここでは、ベースモデルとして Zero intelligence model を用いる。ただし、各注文の到着率は Limit order book の履歴に依存するものとする。Zero intelligence model をベースとして、このような依存性を実装したモデルを模倣的 Limit order モデルと呼ぶことにする。Limit order book の履歴への依存の仕方についてはいろいろなものがあるが、思い付くままに上げてみると、

- ・ Limit order は注文時の価格付近に集中する、
- ・ 売り Limit order は Ask 付近に、買い Limit order は Bit 付近に集中する、

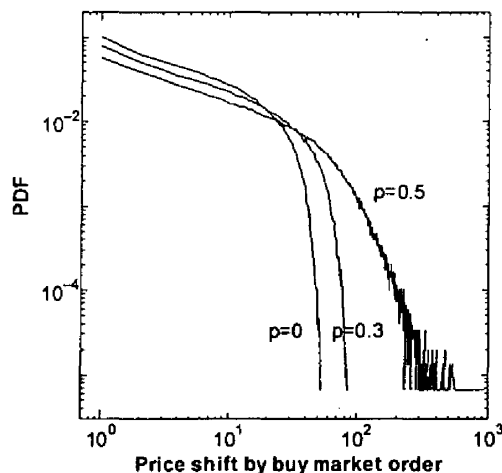
- Limit order は過去に実現した価格が優先的に選択される、
- Limit order は注文のストックが多いところが優先的に選択される、

などがある。どの依存性が重要なファクターとなるのかについては、データによる検証を行わなければならないが、ここでは、発見論的方法を採用して次の仮設を試みることにする。

- Limit order は確率 p で注文のストックが多い価格が優先的に(ストック量に比例して)選択され、確率 $1-p$ で spread 内か Ask/bit から距離 $depth$ の範囲内の価格がランダムに選択される。

ここで、 p と $depth$ はモデルのパラメータである。最近、スケールフリー・ネットワーク¹²⁾がWWWネットワーク、生体内の代謝ネットワーク、神経細胞ネットワークなど枚挙に暇が無いほどさまざまな世界で見つかり、それらに共通する成長過程として、優先的選択型成長モデル^{13),14)}(Preferential attachment growth model)が注目を集めている。模倣的Limit orderモデルは、ネットワーク理論ではないが“Rich gets richer”という発想は共通している。違いは、ネットワーク理論ではエッジの数の多いノードが優先的に選択されるため、エッジの数の分布がベキ分布に成長していくのに対し、このモデルでは、注文量の多い指値が優先的に選択されることにより、指値間のGapの揺らぎにベキ分布が生じることである。注文量はMarket orderやCancellationにより消費されるので、注文量がベキ分布に成長していくわけではない。従って、模倣的Limit orderモデルは成長型のモデルではない。模倣的Limit orderモデルは、Gapの揺らぎを自己組織的臨界現象(Self-organized criticality)¹⁵⁾として捉えるモデルである。

ここでシミュレーション結果を幾つか紹介しよう。図1は買いMarket orderにより生じた価格変動の確率密度関数である(パラメータを売りと買いで対称に設定しているので、売りMarket orderにより生じた価格変動の確率密度関数も符号は逆であるが同様の結果である)。確率 p が大きいほど注文量のストックが多い価格が優先的に選択される傾向が強いが、 $p=0, 0.2, 0.3, 0.4$ (このうち図では0と0.3しか示されていない)では分布にFat tailは見られなかったが、 $p=0.5$ では裾野付近にベキ分布が生じた。ベキ指数は裾野付近の \sqrt{n} 個のデータを使った(n は全データ数)Hill's estimatorで 3.7 ± 0.2 であった。ただし、ベキ指数は $depth$ をおおきくすると、それに従って大きくなる傾向があった。図2は買いMarket orderが発生した時をサンプル点として、Askとそれに隣接する気配との間のGapを計測した結果のプロットであるが、やはり、 $p=0.5$ で裾野付近にベキ分布が生じた(Bit



とそれに隣接する気配との間のGapの計測結果も同様)。

図1 買いMarket orderにより生じた価格変動の確率密度関数。 p は注文量のストックが多い価格を優先的に選択するトレーダーの割合を表す。 $\lambda_{lim\ up}^{offer} \cdot \delta t = \lambda_{lim\ up}^{buy} \cdot \delta t = 0.1$ 、 $\lambda_{market}^{offer} \cdot \delta t = \lambda_{market}^{buy} \cdot \delta t = 0.05$ 、 $\lambda_{cancel}^{offer} \cdot \delta t = \lambda_{cancel}^{buy} \cdot \delta t = 0.05$ 、 $depth=50$ 、ここで δt はシミュレーションの1 stepに対応する時間間隔。ステップ数は300万回。

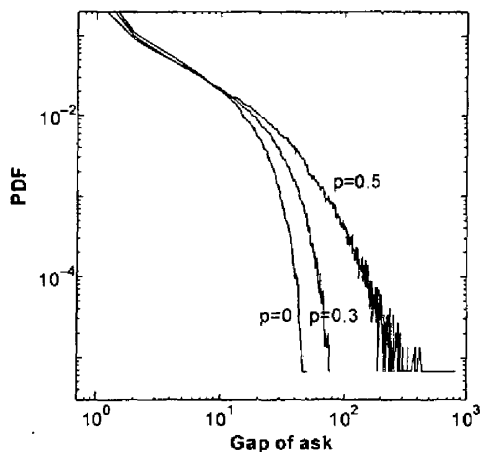


図2 買い Market order が発生した時の、Ask とそれに隣接する気配との間の Gap の確率密度関数。パラメータの値やステップ数は図3と同じ。

参考文献

- 1) B. B. Mandelbrot, The variation of certain speculative prices, J. of Business, 36, 394-417, 1963
- 2) R. N. Mantegna and H. E. Stanley, Scaling Behavior in the Dynamics of an Economic Index, Nature, 383, 46-49, 1995
- 3) P. Gopikrishnan, M. Meyer, L. A. N. Amaral and H. E. Stanley, Inverse Cubic Law for the Distribution of Stock Price Variations, Eur. Phys. J., B3, 139-143, 1998
- 4) T. Mizuno, S. Kurihara, M. Takayasu, H. Takayasu, Analysis of high-resolution foreign exchange data Of USD-JPY for 13years, PhysicaA, 324, 296-301, 2003
- 5) X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Plerou and H. E. Stanley, A theory of power law distributions in financial market fluctuations, Nature, 423, 267-270, 2003
- 6) J. D. Farmer, L. Gillemot, F. Lillo, S. Mike and A. Sen, What really cause large price changes?, Quantitative Finance, 4, 383-397, 2004
- 7) F. Lillo, J. D. Farmer and R. N. Mantegna, Master curve for price-impact function, Nature, 421, 129-130, 2003
- 8) 大村敬一, 宇野淳, 川北英隆, 俊野雅司, 株式市場のマイクロストラクチャー, 日本経済新聞社, 1998
- 9) J. Maskawa, Empirical study of the market impact in the Tokyo Stock Exchange, in Practical Fruits of Econophysics, ed. By H. Takayasu, Springer-Verlag Tokyo, 72-76, 2005
- 10) B. Biais, P. Hillion and C. Spatt, An Empirical Analysis of the Limit order Book and the Order Flow in Paris Bourse, J. of Finance, 50, 1655-1689, 1995
- 11) E. Smith, J. D. Farmer, L. Gillemot and S. Krishnamurthy, Statistical theory of the continuous double auction, Quantitative Finance, 3, 481-514, 2003
- 12) R. Albert and A.-L. Barabasi, Statistical mechanics of complex networks, Rev. of Mod. Phys., 74, 47-97, 2002
- 13) A.-L. Barabasi and R. Albert, Emergence of Scaling in Random Networks, Science, 286, 509-512, 1999
- 14) P. L. Krapivsky and S. Render, Organization of growing random networks, Phy. Rev. E, 63, 066123, 2001
- 15) P. Bak, How nature works: the science of self-organized criticality, Springer-Verlag New York, 1996

福山平成大学経営学部、〒720-0001 福山市御幸町上岩成正戸117-1、E-mail:maskawa@heisei-u.ac.jp