複雑ネットワーク上の位相振動子の同期現象

北海道大学電子科学研究所情報数理分野　一宮　尚志

ネットワーク構造は、生命現象のみならず多くのものに共通して見られる構造である。神経細胞のネットワーク、WWW、食物連鎖など、極論してしまえば、多くの要素が互いに相互作用する現象では、常にネットワーク構造が見られると言ってよいだろう。最近の研究により、多くのネットワークには共通の特徴が見られることがわかった。中でも代表的な特徴とされるのがスケールフリー性と呼ばれるものである。これは、各ノードに隣接するノードの数 k の分布関数が $P(k) \propto k^{-\gamma}$ のように k の冪で与えられる性質である。

このようなネットワーク構造の中で見られるダイナミクスを、ネットワークを特徴づける一つの量と結びつけられないであろうか。例えば、Pastor-Satorras と Vespignani による感染症モデルの研究によると、ランダム・スケールフリーネットワーク上の SIS モデルにおいて、$\gamma \leq 3$ の時に転移点が0になり、どれほど感染力の弱い感染症でもネットワーク全体に拡がってしまう。これは、$\langle k^2 \rangle$ の発散のためといわれてきたが、最近の研究では隣接行列の最大固有値の発散がより本質的であることが明らかとなっている。このように、ネットワークを特徴づける一つの量が系の定性的性質を決定することが示されれば、ネットワーク上のダイナミクスの理解において大きな進展となるであろう。

以上のような動機を持って、ネットワーク上の位相振動子の同期現象に関しての研究を行った。具体的に考える方程式系は以下のようなものである。

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + K \sum_j a_{i,j} f(\theta_j - \theta_i)$$

ここで θ_i はノード i にある振動子の位相、$a_{i,j}$ は隣接行列である。

まず、ω_i がランダムに分布しており、$f(\theta) = \sin(\theta)$ の場合、この系は相互作用 K を変化させることにより同期一非同期転移を示すが、この転移点は SIS モデルと同様に隣接行列の最大固有値により決まっていることが知られている。一方、$f(\theta) = \sin(\theta + \alpha)$ とすると、このようなことはいえない。例えば、下の図にいくつかのランダムネットワーク（ノード数１０００）におけるオーダーパラメータの α 依存性を示す。 ここで $\omega_i = 0$ にとってある。通常の格子やネットワークでは、この系は $-\pi/2\alpha < \pi/2$ で同期、それ以外では非同期の転移を起こす。しかしながら、図に見られるように、ランダムネットワークでは $0 < \alpha < \pi/2$ でも同期を起こさない状況があるように見受けられる。これはノードの非一様性から来るものと思われる。全てのノードが同じ度数 k を持つなら、完全に同期した状態は $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ で線形安定である。しかしランダムネットワークでは度数はノードにより異なっており、この場合は完全同期状態は周期解にはならない。このような系の振るまいを記述するには、ノードの非一様性を表す何らかの量が必要ではないかと思われる。