

結合された振動反応系の同期解析

大阪大学大学院 生命機能研究科 宮崎 淳¹

結合振動子系を対象とした位相縮約モデルにおいて、振動間の相互作用を特徴付ける結合関数を実際の系を対象に導く方法を示す。さらに二つの連結された Belousov-Zhabotinsky 反応系を対象にこの方法を実験的に適用した。その結果、求めた結合関数を用いて同期の振舞いが正確に記述・予測できることが示された。この方法では 1) 振動子間の位相差を特定、2) 固有振動周期からの振動間隔のずれを測定するだけで振動・結合機構詳細に立ち入ることなく結合関数を測定することができる。また、より多くの振動子で構成される系への適用性についても議論する。

1 はじめに

自然界には多くの自発的なリズムを刻むリミットサイクル振動子が存在し、それらが多数集まると相互作用を介して協同的なリズムを形成する。これら結合振動子系の動的振舞いの代表的な解析法として位相モデルが挙げられ、一般的に次のような位相方程式により記述される [1]。

$$d\phi_i/dt = \omega_i + \sum_{j \neq i}^N \epsilon_{ij} q_i(\phi_i - \phi_j), \quad (1)$$

ここで、 ϕ_i , $\omega_i \equiv 2\pi/T_i$ はそれぞれ振動子 i の位相、角振動数、 ϵ_{ij} は振動子 ij 間の結合強度を表す。 N は系の振動子の総数を表す。 $q(\psi)$ は結合関数と呼ばれる、振動子間の相互作用を特徴づける周期関数である。位相モデルは振幅の変化が無視できるような弱結合系に対して有効であり、振動・結合機構の詳細に立ち入らず同期現象を取り扱うことのできる利点がある。式 (1) を用いた解析では多くの場合結合関数として正弦関数が仮定され、結合強度に依存して振動子集団の同期転移がおこることが示されている [1]。しかし、現実の系を対象に位相モデルの立場から同期現象を正確に記述するには結合関数を具体的に決める必要がある。特に心筋のペースメーカー細胞や、Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応系などいびつな波形を刻む振動子系では結合関数は正弦関数と一致するとは限らない。実際、結合関数が高調波を含む場合には、より多様な振舞いがおこることが示されている [2, 3]。

このような背景の下、本稿ではまず二つの振動子を用いた結合関数の決定法を導出する。さらに連結された BZ 反応系に対してこの方法を適用し、振動子系の振舞いを位相モデルを用いて正確に記述することを目的とした。

¹E-mail: miyazaki@fbs.osaka-u.ac.jp

2 理論

二つの結合振動子間の結合関数を決定する方法について説明する。二つの結合系に対する位相方程式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} d\phi_1/dt &= \omega_1 + \epsilon q(\psi) \\ d\phi_2/dt &= \omega_2 + \epsilon q(-\psi) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで位相差 $\psi \equiv \phi_1 - \phi_2$ であり、結合強度は等しいとした。このとき、結合により振動子 i がリミットサイクルを一周するのに $T_i + \Delta T_i$ の時間がかかるとし、さらに $\omega_1 - \omega_2$ が小さく、位相差がゆっくり時間変化すると仮定すると次の式が導かれる。

$$\begin{aligned} 2\pi = \oint d\phi_i &= \int_0^{T_i + \Delta T_i} dt \frac{d\phi_i}{dt} \\ &= \int_0^{T_i + \Delta T_i} dt [\omega_i + \epsilon q(\psi)] \\ &\simeq (T_i + \Delta T_i) [\omega_i + \epsilon q(\psi)] \end{aligned} \quad (3)$$

以上より $q(\psi)$ は ΔT_i の一次までで次のように与えられる。

$$q(\psi) = \frac{2\pi \Delta T(\psi)}{\epsilon T_i^2} \quad (4)$$

ここで ΔT_i は ψ に依存するため $\Delta T(\psi)$ と明記した。式 (4) より、固有振動周期からのずれ $\Delta T(\psi)$ を様々な位相差 ψ に対して測定することで $q(\psi)$ を求めることができる。それぞれの振動子の位相は 0 から 2π の間で実験的に次の式により計算される。

$$\phi_i(t) = 2\pi \frac{t - t_{k_i}}{t_{k_i+1} - t_{k_i}} \quad \text{for } t_{k_i} < t < t_{k_i+1} \quad (5)$$

ここで t_{k_i} は振動子 i の k 番目の波形ピークがみられる時間を表す。式 (5) で位相は時間に対して一定に増加すると定義されており、これは位相モデルにおける $\epsilon \rightarrow 0$ の極限での定義と一致する。

3 実験・解析

前節で導出した方法を実際に適用するため、図 1a で示される二つの連結された BZ 反応槽を組み立てた。BZ 反応とは最も代表的な振動反応系の一つであり、実験的にも簡単に扱うことができるため同期現象を探るのにも適した系である [4]。本研究では振動周期を一定に保つため、溶液を一定速度で注入排出をおこなう連続流通攪拌反応槽 (CSTR) を用いた。二つの反応槽の溶液はポンプを用いて一定速度で交換されており、この送液速度が結合強度に対応する。また、固有振動周期に差をつけるため二つの反応槽は独立に温度コントロールされ、周期はそれぞれ $T_1 = 107 \pm 1s$ 、 $T_2 = 99 \pm 1s$ に設定した。

この系では結合強度に依存して同位相・反位相の同期が観測される。図 1b に幾つかの結合強度における位相差の時間発展、図 1c に結合強度を変えたときの系の振舞いを相図として示す。結合強度がゼロのとき二つの振動子は独立に振動しているため位相差は連続的に変化する (図 1b(1))。

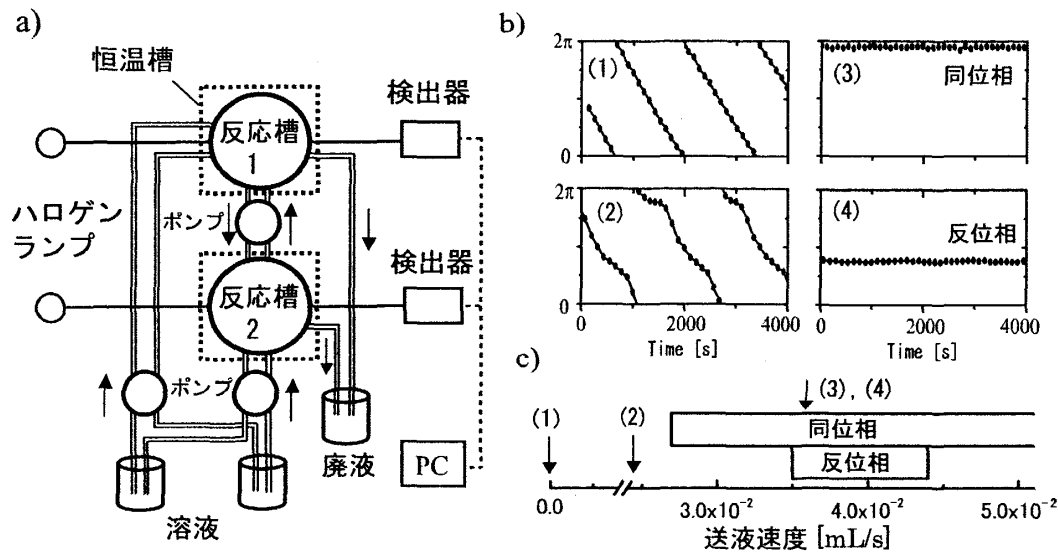


図 1: (a) 装置配置図：反応の様子は 500nm での透過光を記録した。(b) いくつかの結合強度における位相差の時間発展:(1) から (4) における結合強度は図 (c) 中の矢印で示す。(c) 結合強度を変化させたときの系の振舞い。

同期がおきているときには位相差はある特定の値にロックされる (図 1b(3),(4))。同位相同期では位相差は 2π よりやや小さな値、反位相同期では π よりやや小さな値をとる。このとき、同位相同期では振動周期 $T_{in} = 103s$ で同期しており、二つの固有振動周期の間をとる。一方、反位相同期では同期振動周期 T_{out} は 116s であり、それぞれの固有振動周期より長くなるのが特徴である。同期がおきる直前の結合強度では図 1b(2) に示すような特徴的な位相差の振舞いが見られる。これはそれぞれの振動子の振動間隔が位相差に依存しているからであり、このとき $\Delta T(\psi)$ を様々な ψ に対して測定し、結合関数を求めることができる。図 2 にいくつかの結合強度で測定した結合関数を示す。ところで、同期がおきているときにも結合強度が弱いならば、系に摂動を与え一時的にロックされた位相差をずらし、その後、元の同期位相差へ収束する過程から同じように結合関数を計算することができる。この手順に従い、同期がおきているときに一時的に結合を停止させ位相差をずらすことにより結合関数を測定した (図 2 右部)。その結果、同期されているときでも結合強度が小さければ結合関数を正確に決めることができることが分かった。

次に測定した結合関数を用いて二つの結合 BZ 反応槽でみられる同期の振舞いについて説明する。位相差の時間発展は式 (2) から次のように与えられる。

$$d\psi/dt = -\Delta\omega + \epsilon Q(\psi) \tag{6}$$

ここで $\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1$ 、 $Q(\psi) \equiv q(\psi) - q(-\psi)$ である。同期がおきるときには位相差の時間発展はゼロなので、解は $Q(\psi)$ と $\Delta\omega/\epsilon$ との交点で与えられる。図 3 に二つの特徴的な $\Delta\omega/\epsilon$ の値と $Q(\psi)$ との交点を示す。結合強度をゼロから徐々に大きくしていくと $\Delta\omega/\epsilon$ は 2π よりやや小さな値で $Q(\psi)$ と交点を持つ。二つの交点のうち白丸で示した点は不安定解であり、実際に実現されるのは黒丸で示した安定解 ($\psi = \psi_{in}$) である。この解が同相同期に対応する。さらに結合強度を大きくすると今度は π よりやや小さな値で交点を持つ。このとき表れる安定解 ($\psi = \psi_{out}$) が反位相同期に対応する。次に同期振動周期について説明する。図 3b より $q(\psi_{in}) > 0$ 、 $q(-\psi_{in}) < 0$ であり、

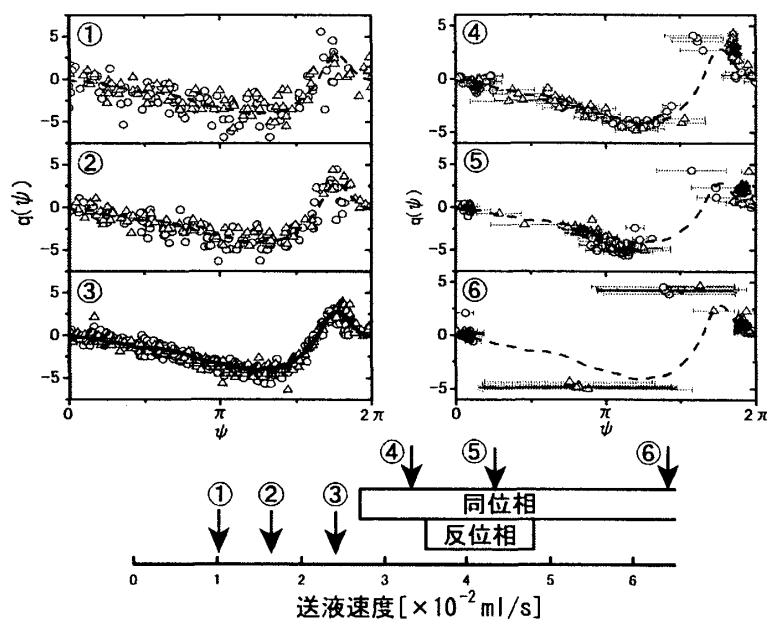


図 2: いくつかの結合強度で測定した結合関数。それぞれにおける結合強度は下部の図の矢印として示す。破線は左最下部で求めた実線と同じであり、データの同一性を示している。上部右のデータにおける水平なバーは 1 周期にわたる位相差の変化を示しており、位相差の不確定さに対応する。

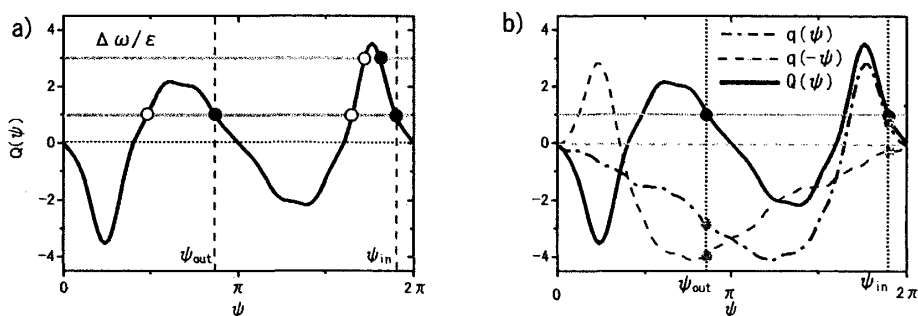


図 3: a) $Q(\psi)$ と $\Delta\omega/\epsilon$ との交点。黒丸と白丸はそれぞれ式 (6) の安定解、不安定解を表している。b) $q(\psi)$ 、 $q(-\psi)$ 、 $Q(\psi)$ を重ねたプロット。灰色の丸印が $q(\pm\psi_{in/out})$ を示す。

同位相同期のときの振動周期 T_{in} は二つの固有振動周期の間の値をとることが示される。また一方、 $q(\psi_{out}), q(-\psi_{out}) < 0$ より、反位相同期のときの振動周期 T_{out} はそれぞれの固有振動周期よりも長くなるのが分かる。このように測定した $q(\psi)$ を用いることで実験結果を正確に説明することができるようになる。実験ではより強い結合強度では反位相同期が見られなくなるが、これは結合関数の導出で消えてきた速く変化する成分を考慮することで説明される [5]。

より多くの振動子で構成される系に適用できるよう本手法を拡張することは今度の課題として挙げられる。その一方で振動子集団が同一の種類の場合には、二つの結合系に対して測定された結合関数を用いて多数の振動子系の振舞いを記述することができるだろう。そこで例としてに三つの BZ 振動子が等しく結合された系についてシミュレーションを行った。三つの結合系に対する位相方程式は次のように記述される。

$$d\phi_i/dt = \omega_i + \epsilon[q(\phi_i - \phi_j) + q(\phi_i - \phi_k)] \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (7)$$

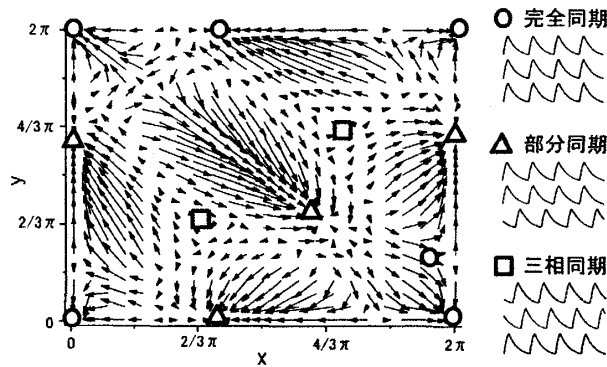


図 4: 式 (8) に対応する xy 平面でのベクトル場。丸印は完全同期解、三角は部分同期解、四角は三相同期解を示す。

ここで $x = \phi_1 - \phi_2$ 、 $y = \phi_2 - \phi_3$ とすると、その時間発展は

$$\begin{aligned} dx/dt &= \omega_x + \epsilon[q(x) + q(x+y) - q(-y) - q(-x)] \\ dy/dt &= \omega_y + \epsilon[q(y) + q(-x) - q(-x-y) - q(-x)] \end{aligned} \quad (8)$$

になる。ここで $\omega_x = \omega_1 - \omega_2$ 、 $\omega_y = \omega_2 - \omega_3$ である。系の同期解は式 (8) から x, y の平面でのベクトル場をプロットすることで図示的に知ることができる。図 3 の結合関数を用いてプロットしたベクトル場を図 4 に示す。ここで簡単のため $\omega_x = \omega_y = 0$ とした。この図から同期解に対応する三種類のアトラクタが得られる。それぞれ、1) 三つの振動子が位相をそろえている同期 (完全同期)、2) 二つの振動子は位相をそろえているが、もう一つの振動子の位相がずれている同期 (部分同期)、3) 三つの振動子が位相を $(2/3)\pi$ ずらす同期 (三相同期) に対応する。このことから多数の BZ 振動子が集まった場合には幾つかの集団に分かれて同期することが予測される。

4 まとめ

本稿では弱結合下の振動子系において、相互作用を特徴付ける結合関数が振動間隔と位相差を測定することで測定されることを示した。本手法では基礎方程式に表されるような振動や結合機構の詳細に立ち入らなくても結合関数が決定され同期現象を解析することができる。そのため、一般に複雑な機構を持つ生体組織でみられる協同的振舞いを明らかにする際にも有効だと期待される。

参考文献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillation, Wave, and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [2] H. Daido, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 760 (1994).
- [3] H. Kori and Y. Kuramoto, *Phys. Rev. E* **63**, 046214 (2001).
- [4] M. Marek and I. Stuchl, *Biophys. Chem.* **3**, 241 (1975); M.F. Crowley and I.R. Epstein, *J. Phys. Chem.* **93**, 2496 (1989); M. Yoshimoto, K. Yoshikawa, and Y. Mori, *Phys. Rev. E* **47**, 864 (1993).
- [5] J. Miyazaki and S. Kinoshita, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 194101 (2006).