

## 知覚交替インターバルのガンマ分布則を導く一つのモデル

三井利夫\*

(2006年9月4日受理)

### 1. まえおき

2005年の本誌[1]に柳田氏の講義ノートが載っており、多義図形知覚についての論述がある。心理物理の問題であるが、物性夏の学校で取り上げられた問題なので、関心を持たれる方もあるかと思い、これについての論説を本誌に投稿することとした。

図1は[1]にも引用されている多義図形の例である。この図を見るとき、目への入力是一定であろうが、意識の上では、白い部分が盃として見えたり、黒い部分が向かい合った顔のように見えたりする。また図はじっと見続けると、或る時間盃に見えるが、次の時間顔に見え、ついでまた盃に見えてくる。つまり自律的な知覚交替が起る。1人の被験者について、図1を示して知覚交替を繰

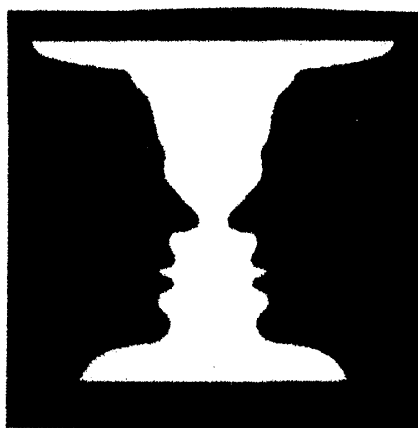


図1. 多義図形の例。ルビンの顔と杯。

返えさせ、盃（一般に A）のように見える時間間隔  $t_A$  と顔（一般に B）のように見える時間間隔  $t_B$  それぞれの分布のヒストグラムをつくると、よい近似でガンマ分布となる。このことは 1967 年ころから知れているが、Murata, Yanagida 等の研究グループ[1, 2, 3]は多くの被験者を用い、この現象を詳しく調べ、後述のように興味ある結果を得た。 $t_A$  或いは  $t_B$  を  $t$  で表し、 $\alpha$  と  $\beta$  を分布を特徴付けパラメータとすると、ガンマ分布の確率密度(例えば[4]の p.60 参照)は、Murata 等の記号[2, 3]を使って、次のようになる。

$$f(t) = \beta^\alpha t^{\alpha-1} \exp(-\beta t) / \Gamma(\alpha) \quad (\alpha > 0) \quad (1-1)$$

$\Gamma(\alpha)$  はガンマ関数である。図 2 に、 $\beta = 2$  と置き、 $\alpha = 1, 2, 3, 4$  と置いたときの  $f(t)$  を示す。なお、[2]の Fig.1, [3]の図 2 には  $\alpha = 4.45, \beta = 3.74 \text{ s}^{-1}$  と  $\alpha = 2.96, \beta = 0.640 \text{ s}^{-1}$  とおいたときの計算値を実測のヒストグラムと比較して示してあるが、一致は極めて良い。

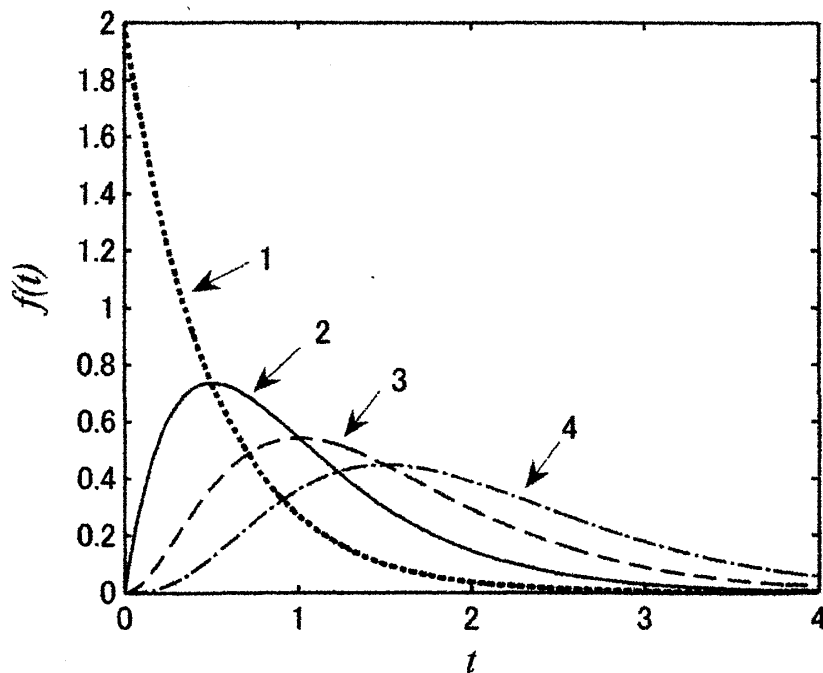


図 2. 式 (1-1) で与えられるガンマ分布の確率密度  $f(t; \beta, \alpha)$  の例。 $\beta = 2$  と置いて計算。曲線に対応させた数字は  $\alpha$  の値を示す。実験では  $\alpha = 2, 3, 4$  のヒストグラムが高頻度で現れる。我々のモデルでは  $\alpha = 1$  のヒストグラムが現れることは期待できない。

心理物理のような人間くさい実験でガンマ分布といった数学的にきれいな法則性がみられるのは大変興味のあることであるが、その原因について具体的なモデルの提案はまだないようである。その一つの理由は、ガンマ分布というアナログ的法則をそのままに考えると、ニューロン系のデジタル的情報処理とは結び付けにくいといったことであろう。Murata らは[2, 3]は多くの図と被験者を用い、各図と各被験者に対しガンマ分布のパラメータ $\alpha$ を求めた。 $\alpha$ の出現頻度のヒストグラムをつくったところ、 $\alpha$ が整数(2, 3, 4)のところに明瞭なピークが現れること、つまり図2の $\alpha = 2, 3, 4$ のようなヒストグラムの出現頻度が高いという極めて興味ある結果を得た。 $\alpha$ が整数の場合、(1-1)はポアソン分布(例えば[4]の p.45 参照)となる。従ってこの結果はアナログ的なガンマ分布則の基礎にはデジタルなポアソン分布があり、知覚交替がニューロンの閾値的情報処理に繋がる可能性を示唆している[2, 3]。これについて筆者は、2005年の8月に情報通信研究機構の関西先端研究センターでの村田氏ら脳情報グループの集まりで、[2, 3]の結果が示唆する可能な脳内過程のモデルについて話した。問題の性格上、モデルは仮定の多いものになったが、興味をもって聞いていただいたように思うので、以下にその時の話を整理して述べる。

## 2. ガンマ分布の導出

Murata ら[2, 3]の結果で特徴的なことを挙げると次のようになる。

- (1) 現象の基本にはデジタルな過程があることが示唆された。
- (2) 1つの図が見えている時間のオーダーは1秒の程度で、通常のニューロンの時定数1ミリ秒に比べて長い。
- (3) (1-1)式で、 $t$ をAの見えている時間インターバル $t_A$ とした場合のパラメータを $\alpha_A, \beta_A$ とし、またBの見えている時間インターバル $t_B$ に対しては、パラメータを $\alpha_B, \beta_B$ で表わすと、実験で求まる $\alpha_A$ と $\alpha_B, \beta_A$ と $\beta_B$ は一般にかなり異なった値をとる。

特徴(1)の重要性に付いては既に述べた。文献[5]で議論されているように、脳内の或種のニューロン群は、2つの安定状態のどちらかをとるといった双安定性を示す可能性がある。いまそのような双安定性を示すニューロン群AとBが存在するとし、状態の一方はニューロン群の興奮状態に、他方は非興奮状態に対応すると仮定する。図形AまたはBが認識されている状態は脳内でニュー

ロン群 A または B が興奮状態にあることに対応するとする。非興奮から興奮への転移には A, B それぞれに特有の閾値があるとする。また A と B の興奮はそれぞれ抑制し合うとする。特徴 (1) はそのようなニューロン群が一方の主役であることを暗示する。

このようなニューロン群の時定数は長くあり得るから、上記特徴 (2) もそのようなニューロン群が関与するとして理解できる。

後の議論で明らかになるように、上記特徴 (3) は、眼からの情報を A もしくは B に先立って処理をするニューロン群  $O_A$  と  $O_B$  が存在し、それぞれが A または B へインパルス束を送っていることを示唆する。 $O_A$  から A 或いは  $O_B$  から B に送られるインパルス束の間隔は乱雑で相関がないことと仮定する。これらインパルス束入力によるニューロン群 A もしくは B の細胞群内電位の上昇は相加的と近似してよいとする。A または B 興奮の閾値は比較的少数個のインパルス束入力で興奮が起ると考える。

こういった仮定を基に考えられる知覚交替の様相を図 3 に示す。横軸は時間である。簡単のため、1つのインパルス束を1つのパルスで表わすことにする。図 3 (a1) は  $O_A$  からニューロン群 A に送られるインパルス束の列を示す。まずニューロン群 A の興奮が起ったとし、その興奮の持続する時間帯を(a2)の縦縞の領域で示す。A の興奮の閾値を  $n_A$ 、B の閾値を  $n_B$  と記す。図 3(a1)には  $n_A = 4$ 、(b1)には  $n_B = 3$  の例を示す。(b1)に示すように、A が興奮している間に B へのインパルス入力は蓄積され、B の興奮が始まる (b2)。ここで、A は B を抑制しようとし、B は A を抑制しようとするが、興奮の初期での抑制が強いと仮定すると、B から A への抑制が強く、A は非興奮状態に入る(a2)。そこからまた A へのインパルス束入力の蓄積は始まり(a1)、やがて A の興奮が始まり(a2)、B の興奮は止まる(b2)。知覚交替とはこのようなことの繰り返しと考える。

(b2)に縦縞で示した B の興奮の持続時間は、(1a)の  $n_A$  個のインパルス束を含む時間  $t$  に同じである。ここで、時間間隔  $t$  が  $n_A$  個のインパルス束を含む確率  $w_n$  を考えよう。この  $w_n$  は B の興奮の持続時間が  $t$  となる確率に等しいと考えてよいであろう。ところで(1a)では  $t$  の右端は決っているが左端が不定で、図に即しては考えにくいので、図を離れて、確率論的に  $w_n$  を考えることにする。この  $w_n$  を求めるのは、統計力学の教科書 (例えば[6]) でよく議論されるどころの、大きな体積  $V$  の中にある理想気体で特定の小体積  $v$  に  $n$  個の分子が存在する確率を求めるといったポアソン分布の議論と似たものとなる。ただ普通  $v$  を

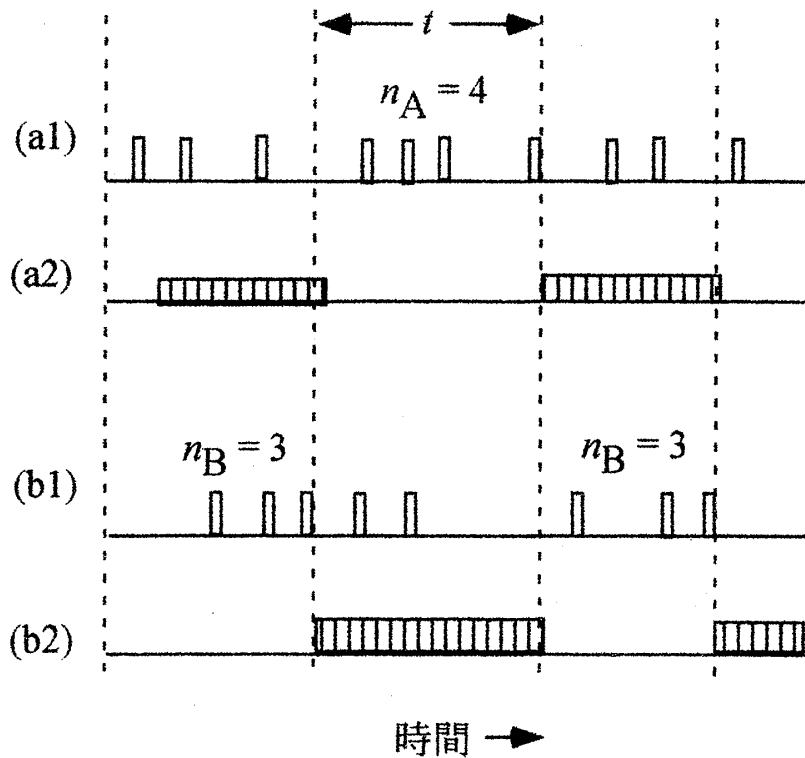


図3. ニューロン群AとBの興奮状態の交替。横軸は時間。  
 (a1): ニューロン群Aへのインパルス束入力。1つのインパルス束を1つのパルスで表わす。(a2): 縦縞の領域はAが興奮している時間帯。(b1): ニューロン群Bへのインパルス束入力。(b2): 縦縞の領域はBが興奮している時間帯。

固定して  $n$  を変数にして考えるが、我々の場合  $n$  を固定して  $v$  を考えるといった形になる。

ニューロン系の興奮を考える上で特殊な点として次の問題がある。すなわち、通常のポアソン分布の計算では、小体積  $v$  に0個の分子が存在する確率は有限の値となるが、今考えているニューロン系では、インパルス束の入力という実体がなければニューロン群の興奮が起きないから、 $n=0$  に対する興奮の確率は0となる。この点の混乱を避けるため、以下の統計的考察では  $n \geq 1$  として  $w_n$  を考える。3節で議論するように、このことは実験との比較の上で重要となる。

ニューロン系に即した形で少し丁寧に  $w_n$  を導くことにする。長い時間  $T$  の間にニューロン A に入力するインパルス束の数を  $N$  と記す。インパルス束の間隔はランダムで、 $T$  が充分長ければ  $N$  は  $T$  に比例する。空間で考える方が考え易いので、長さ  $T$  の軸索を考え、その上に  $N$  個のインパルス束が存在すると考える。まずインパルス束はお互いに区別できるものとして、それらに 1 から  $N$  までの番号を付け、軸索上にそれらを互に相関なしに載せてゆくことを考える。幅  $t$  の領域の中に 1 つ特定のインパルス束が存在する確率  $p$  は

$$p = t/T \quad (2-1)$$

である。このインパルス束が  $t$  外に存在する確率は  $1-p$  である。実際はインパルスが相互に区別できないことを考慮すれば、 $t$  の中にインパルスが  $n$  個存在する確率  $w_n$  は

$$w_n = [N! / \{(N-n)! n!\}] p^n (1-p)^{N-n} \quad (2-2)$$

となる。 $n$  は  $N$  に比べて非常に小さいとすると、 $N! / (N-n)! = N^n$  と近似でき、(2-2)式は

$$w_n = (N^n / n!) p^n (1-p)^{N-n} \quad (2-3)$$

となる。ここで、 $p = t/T$  は非常に小さく、 $n$  は 1 ~ 5 程度なので、 $(1-p)^n$  は 1 に近いであろうから、

$$w_n = (N^n / n!) p^n (1-p)^N \quad (2-4)$$

と置ける。長時間観測で  $t$  領域に現れるインパルス束の数の平均を  $\langle n \rangle$  と書くと、

$$p = \langle n \rangle / N \quad (2-5)$$

なので

$$(1-p)^N = \{1 - \langle n \rangle / N\}^N \quad (2-6)$$

となる。 $N$  が充分大きければ  $\{1 - \langle n \rangle / N\}^N$  は  $\exp(-\langle n \rangle)$  で近似できるので、(2-4) は

$$\begin{aligned} w_n &= (N^n / n!) (\langle n \rangle^n / N^n) \exp(-\langle n \rangle) \\ &= (1/n!) \langle n \rangle^n \exp(-\langle n \rangle) \end{aligned} \quad (2-7)$$

となる。 $n!$  はガンマ関数で  $\Gamma(n+1)$  と書ける。(2-1) と (2-5) からは

$$\langle n \rangle = Np = Nt/T \quad (2-8)$$

となる。これを (2-7) に入れると、(2-1) の少し上での注意したように、 $w_n$  は  $n \geq 1$  の場合を考えているから、このことを合わせて、

$$w_n = \{(N/T)^n / \Gamma(n+1)\} t^n \exp(-(N/T)t), \quad n \geq 1 \quad (2-9)$$

となる。

実験では、知覚交替時間  $t$  のガンマ分布を表わす(1-1)式の  $\alpha$  と  $\beta$  は、同じ被験者でもその時の状態（例えば環境の変化、疲労の度合いなど）によっても少し変ることが知られている。図形AもしくはBを見ている最中でも、気が散るなどのため、或いはニューロン系の中に発生する雑音的なインパルスのため、知覚交替に要する時間  $t$  には変動があるであろう。結果として、 $n$  は各時刻で整数であるとしても、図を見ている間の平均として非整数になることがありうるであろう。このことを考慮し、 $\alpha$  を非整数として

$$n = \alpha - 1, \quad \alpha \geq 2 \quad (2-10)$$

$$N/T = \beta \quad (2-11)$$

と置くと、(2-9)は

$$w_{\alpha-1} = \beta^{\alpha-1} t^{\alpha-1} \exp(-\beta t) / \Gamma(\alpha), \quad \alpha \geq 2 \quad (2-12)$$

となる。これを(1-1)と比べると

$$w_{\alpha-1} = f(t) / \beta \quad (2-13)$$

となる。(1-1)の  $f(t)$  は  $t$  で 0 から  $\infty$  まで積分すると 1 になるように基準化されている。 $w_{\alpha-1}$  について同様の積分をすると (2-13) によって積分は  $1/\beta$  となる。この積分は  $n$  に依存しないから、 $n=1$  の場合を考えると、積分はインパルス束 1 個を含む平均時間になる筈で、実際 (2-11) により  $T/N$  となる。

### 3. 議論

以上、知覚交替インターバルのガンマ分布の表式 (1-1) と同じ形の分布(2-12) をモデルから導いた。基本的な仮定は、ニューロン群 A と B への入力インパルス束の間隔が乱雑で相関がないことと A と B の閾値的情報処理であった。

一般の教科書に載っているガンマ分布は、(1-1)式にも示したように、 $\alpha > 0$  で定義されている。従って、実験家がしきたりに従って、時間インターバル  $t$  の分布がガンマ分布で表わされることを前提にしてデータ整理を行う場合、 $\alpha = 1$  の場合も  $\alpha$  が 2 以上の場合と同等に考えることになる。[2, 3]でもそのような考えでデータの解釈がなされ、 $\alpha$  のヒストグラムで  $\alpha = 1$  でもピークが現れることが期待された。しかしながら、[2]の Fig.3 または[3]の図 4 に示されている  $\alpha$  の出現頻度のヒストグラムでは、 $\alpha = 2, 3, 4$  ( $n = 1, 2, 3$ ) で明瞭なピークがみられるが、 $\alpha = 1$  にピークは出ない。Murata ら[2, 3]は  $\alpha = 1.6$  あた

りに見られる  $\alpha$  の出現頻度のピークに注目し、 $\alpha=1$  のピークが実験上の誤差で1.6に移動したものと説明しているが、移動が大きすぎるように感じられる。(2-1)式の少し前に述べたように、インパルス束の入力という実体がなければニューロン群の興奮が起きないから、 $n=0$  に対する興奮の確率は0である。(2-10)により  $\alpha=n+1$  で、 $n=0$  は  $\alpha=1$  に当るから、このことは  $\alpha=1$  では興奮は起らないことを意味する。つまり我々のモデルでは、 $\alpha$  のヒストグラムで  $\alpha=1$  にピークは期待できない。この観点からは、 $\alpha=1.6$ あたりのピークの再現性について実験的な検討が望まれる。

(2-11)から  $1/\beta = T/N$  となり、これは平均のインパルス間隔にあたる。2 節の冒頭、Murata ら[2, 3]の結果で特徴的なことの項目 (3) で述べるたように、実験で求められた  $\beta$  の大きさは、同一被験者でも A を見ている時と B を見ている時で異なる。これはニューロン群 A と B へのインパルス入力相互に独立であることを意味する。これが最初に眼からの入力を処理するニューロン群として  $O_A$  と  $O_B$  の存在を仮定した理由である。しかし、 $O_A$  や  $O_B$  のように、最初の段階ででたらめな間隔でインパルス束を発生するニューロン組織がどのような形で存在しうるか等は遺された問題である。物性物理では、実験データと原子分子的理論の中間に熱力学的現象論の段階を置き、詳しいモデルの議論に入る前に実験データが示唆するモデルへの基本的制約を整理する。本稿で提案したモデルはそのような現象論の一種と理解されたい。

なお、ここに提案したモデルに関して、双安定性で一方の状態を興奮状態と考える場合、例えば MaCulloch-Pitts のモデル (例えば[7]の 2.4 節参照) で論じられるように、ニューロンを結ぶフィールドバック回路の存在が必要かという質問があった。これに対しては次のように答えた。例えば単一ニューロンの場合でも、Hodgkin-Huxley の理論でパラメータ  $h, m, n$  を適当に選べば、或る強さ以上の刺激で反復興奮が起り (例えば[7]の 1.5 節参照)、相空間でのニューロンの代表点は一定の閉軌道 (リミットサイクル) に漸近するので、それ自体で双安定性な系となる。よってフィールドバック回路の存在は必ずしも必要ではないものと思われる。このようなニューロンを線状にあるいは柱状に繋ぐだけでも双安定性ニューロン群は作れるであろう。



## 謝辞

鈴木良次教授、村田勉博士をはじめ、情報通信機構、関西先端研究センター、脳情報グループの方々の御支援に感謝する。

## 引用文献

1. 柳田敏雄：素子の“あいまいさ”と生体システムの“やわらかさ”. 物性研究 83 (2005) 691-696.
2. T. Murata, N. Matsui, S. Miyauchi, Y. Kakita and T. Yanagida : “Discrete stochastic process underlying perceptual rivalry”. *NeuroReport* 14 (2003) 1347-1352.
3. 村田勉：視覚的意識のゆらぎと脳内確率機構. 数理科学 464 (2002) 75-83.
4. 中川正雄、真壁利明：確率過程. 培風館 (1987).
5. 甘利俊一：神経回路の数理. 産業図書 (2004) 4章 神経集団の巨視的力学.
6. 中村伝：統計力学. 岩波書店 (2006) pp. 237~239 .
7. 三井利夫、菅田一博、広野力、中西健二：生物物理学序説 - 神経膜の興奮、思考の基礎論. 共立出版 (1983).